

古典的補間理論の回路, 制御への応用

阪大・工 木村英紀 (Hidenori Kimura)

1. はしがき

線形システム理論は制御, 回路, 通信, 信号処理, 計算論, 動的最適化などの分野に共通する工学の基礎理論である. 線形システム理論は1960年にKalmanによってその基本的な枠組が設定されて以来, 線形代数を主要な数学的道具とした動的システムの代数的構造の研究を軸として発展してきた. 動的システムの代数的構造の研究は, 可制御性や可観測性の双対性をはじめとする幾つかの elegant な理論を生むと同時に, 多変数制御系の構成理論, デジタルフィルタの構成理論, スペクトル分解のアルゴリズムなど実用的な面にもけなからず寄与してきた.

数年前からシステム理論の各分野で, 代数的な構造の研究とならんで伝達関数の解析的側面を重視する新しい手法が提案され, それによって得られた成果が今までの代数的方法によるものとは全く別の新しいシステムの構造を明らかにしつつある.¹⁾ この新しい手法は今世紀はじめに開花した古典解析

学, なかでもその核となつてゐる古典補間理論にそのルーツをもちてゐる. 本稿では古典的 (classical, old-fashioned) はなれ) 補間問題が最も先端的なシステム理論とどのように結びつゐたか, を要旨のみに限つて survey する.

2. Carathéodory の問題

クラス C (Carathéodory クラス) を次のように定義する.

$$C = \{ f(z) : |z| < 1 \text{ で解析的かつ } \operatorname{Re} f(z) \geq 0 \}.$$

Carathéodory は 1907 年に次の問題を提起した.²⁾

[Carathéodory の問題] ベキ級数表現

$$f(z) = \frac{1}{2} c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (1)$$

が与えられとき, $f(z)$ が C に属するかどうかを係数 $c_0, c_1, c_2, \dots$ にもとづいて判定するための条件を求めよ.

この問題に対する Carathéodory 自身の解答はすっきりしたものでなかったが, 数年後 Toeplitz はこの条件を以下のような elegant な形に表現した.

[Carathéodory - Toeplitz の定理]

(1) 式の f が C に属するための必要十分条件は

$$T_n := \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall n \quad (2)$$

である。

上の定理は次の重要な結果を生み出した。

[Carathéodory-Fejer-Herglotz の定理]

有限数列 $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ に対しその拡張 $\{c_{n+1}, \dots\}$ が存在して

$$f(z) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots \quad (3)$$

が $\mathcal{C}$ に属するためには $T_n \geq 0$ が必要十分条件である。もし $T_n > 0$ であれば上の条件を満足する拡張は無数に存在する。また $T_n \geq 0$ で $\text{rank } T_n = g < n$ ならば、上のような拡張は唯一つ存在し、有理関数 $f = h/g$ となる。ただし g は次数 g の多項式でその g 個の零点はすべて単位円 $|z|=1$ 上にある。

Carathéodory の問題はその後色々な形に拡張又は変形され、その一部はシステム理論や信号処理と直接結びついた。これについては後述するとして、次節で Carathéodory 問題の確率論的な意味について述べておく。

3. スパクトル推定問題

離散時間定常確率過程 $\{x(t); t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ の共

分散を

$$C_k = E[x(t)x(t+k)], \quad k=0, 1, \dots \quad (4)$$

とする. 但し $E[x(t)] = 0$ ($\forall t$) を仮定する. この C_k に対して (2) 式の T_n は明らかに非負定である. すなわち任意の ξ_i , $i=1, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n C_{|i-j|} \xi_i \xi_j &= \sum_{i,j=1}^n E[x(t+i)x(t+j)] \xi_i \xi_j \\ &= \left| \sum_{i=1}^n E[x(t+i) \xi_i] \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$\{x(t)\}$ に対するパワースペクトラムは

$$P_N(\omega) := \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-j\omega t}$$

$$S(\omega) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E|P_N(\omega)|^2 \quad (5)$$

で与えられる. 又は

$$S(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-j\omega k} \quad (6)$$

である. パワースペクトラムの重要な性質は正值性, すなわち

$$S(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \quad (7)$$

が満足されることである. (6)(7) 式より,

$$f(z) = \frac{1}{2} C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots \quad (8)$$

とおくと, $f \in C$ となることが分る. すなわち定常過程の

共分散系列 C_k は (2) 式を満足する。

時系列解析の重要な問題であるパワースペクトラムの推定問題は、有限個の共分散系列のデータ $C_0, C_1, \dots, C_n$ からそれを生成する定常時系列のパワースペクトラム $S(\omega)$ を推定することである。言い換えれば、与えられた系列 $\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ に対して、(8) 式の f が C に属するような拡張 $C_{n+1}, C_{n+2}, \dots$ をもとめることである。この問題に対する基本的な解答が [Carathéodory-Fejér-Herglotz の定理] によって得られていることが分る。あなわち $T_n \geq 0$ であることが、 $C_0, C_1, \dots, C_n$ に適合するパワースペクトラムが存在するための必要十分条件である。 $T_n > 0$ の場合は適合するパワースペクトラムは無数に存在するが、その中で汎関数

$$H(C_{n+1}, C_{n+2}, \dots) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k \right| \frac{dz}{z}$$

を最小にするものが、「最大エントロピー推定」とよばれている推定である。最大エントロピー推定は古典的なモーメント問題と直接結びついており、その解は Szegő の直交多項式によって表現することができる。この部分は線形予測理論や格子形デジタルフィルタの理論と関連が深い。³⁾

4. Schurのアルゴリズム

クラス $\mathcal{S}$ (Schurクラス) を次のように定義する.

$$\mathcal{S} := \{ f(z); |z| < 1 \text{ で解析的かつ } |f(z)| < 1 \}$$

クラス $\mathcal{S}$ とクラス $\mathcal{C}$ の関係は次の通りである.

$$f \in \mathcal{S} \iff \frac{a-f}{a+f} \in \mathcal{C} \quad (\forall a > 0) \quad (9)$$

Schur は Carathéodory の問題と同じ問題をクラス $\mathcal{S}$ に対して考察した.⁴⁾

[Schurの問題] (1917) ベキ級数表現

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (10)$$

が与えられたとき, $f \in \mathcal{S}$ となるための条件を係数 $a_0, a_1, \dots$ によって表現せよ.

関係(9)を用いれば Carathéodory の問題に対する解から Schur の問題に対する解は直ちに導けようである. しかしそのやり方は実際はそれほど簡単ではなく, Schur はこれに代って次のような主眼めて興味深い逐次的な解法を提示した.

もし(10)式の $f(z)$ が $\mathcal{S}$ に属するならば, $a_0 = f(0)$ であるから

$$|a_0| \leq 1 \quad (11)$$

である. もし $|a_0| = 1$ であれば最大値の原理より $f(z) \equiv a_0$ であり問題は自明となる. そこで $|a_0| < 1$ と仮定する.

$$g(z) := \frac{f(z) - a_0}{1 - \bar{a}_0 f(z)} z^{-1} \quad (12)$$

と定義する. 簡単な計算より

$$1 - |g|^2 = \frac{(1 - |a_0|^2)(1 - |f|^2)}{|1 - \bar{a}_0 f|^2}$$

となるから, $f \in \mathcal{S}$ と $g \in \mathcal{S}$ は等価である. 従って

$$g = a_0' + a_1' z + a_2' z^2 + \dots$$

$$a_0' = a_1 / (1 - |a_0|^2), \dots$$

が $\mathcal{S}$ に属するための条件をもとめればよい. そのための必要条件は (11) と同様に $|a_0'| \leq 1$ である. $|a_0'| = 1$ であれば最大値の原理より $g(z) \equiv a_0'$ となり問題は自明である. $|a_0'| < 1$ とすると, 前と同様に

$$h(z) := \frac{g(z) - a_0'}{1 - \bar{a}_0' g(z)} z^{-1} \quad (13)$$

を定義すると問題は $h \in \mathcal{S}$ となるための条件をもとめる問題に帰着される. 必要条件は $|a_0'| = |h(0)| \leq 1$ である.

このプロセスを繰返し, 関数の系列

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(\nu)}(z) = \frac{f^{(\nu-1)}(z) - \gamma_\nu}{1 - \bar{\gamma}_\nu f^{(\nu-1)}(z)} z^{-1} \quad (14)$$

$$\gamma_\nu = f^{(\nu-1)}(0)$$

を構成して行くのが Schur アルゴリズムである. 明らかに

$$|\gamma_\nu| \leq 1, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (14)$$

が $f \in \mathcal{S}$ のための必要十分条件である。上のプロセスから明らかのように、ある k で $|\gamma_k| = 1$ となれば、 $f(z)$ は $(k-1)$ 次の有理関数となり、以後 $\gamma_i = 0$ ($i > k$) となる。このように Schur アルゴリズムはクラス $\mathcal{S}$ を可算個のパラメータの系列 $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ (これを Schur パラメータと呼ぶ) によってパラメトライズしている。

Schur パラメータ γ_k は上のアルゴリズムによって逐次的に計算できるが、その陽な表現を (16) よりも一般的なベキ級数の比

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots} \quad (15)$$

に対して Schur は算している。すなわち系列 $\{\dots 0 a_0 a_1 \dots\}$ $\{0 \dots 0 b_0 b_1 b_2 \dots\}$ に対するハンケル行列をそれぞれ

$$A_\nu = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_\nu \\ 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}, \quad B_\nu = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_\nu \\ 0 & b_0 & \dots & b_{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix}$$

とおくと、(15) の f に対する Schur パラメータ γ_ν は

$$\gamma'_\nu = \det \begin{bmatrix} B_{\nu-1}^* & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1}^* & B_{\nu-1} \end{bmatrix} = \det (B_{\nu-1}^* B_{\nu-1} - A_{\nu-1}^* A_{\nu-1})$$

$$\gamma'_0 = 1, \quad \gamma'_{-1} = 1/b_0^2 \quad (16)$$

$$1 - |\gamma_\nu|^2 = \gamma'_{\nu-1} \gamma'_{\nu+1} / (\gamma'_\nu)^2 \quad (17)$$

で与えられることを Schur は示した.

上の結果から [Schur の問題] に対する解は直ちに得られる. すなわち (15) 式で $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = \dots = 0$ とおけば $B_\nu = I$ であるから, (10) 式の f が $\mathcal{S}$ に属するための必要十分条件は

$$I - A^* A \geq 0 \quad (18)$$

となることである. その他, 次に述べるように (16)(17) 式から導かれる応用は少なくない.

[応用 1] (離散時間システムの安定性)

n 次の多項式

$$h(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (19)$$

の零点が開単位円 $|z| < 1$ 内にあるための条件は

$$f(z) := \frac{h(z)}{z^n \bar{h}(z^{-1})} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{\bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{a}_n} \quad (20)$$

が $\mathcal{S}$ に属するための条件と同じである. 何故ならば $|z|=1$ で $|f(z)| = 1$ であるから, $f \in \mathcal{S}$ と f が単位円内で解析的であることは等価である (最大値の原理より). 従って A_ν と B_ν を (15) に対してと同様に (20) に対して定義し, $|\gamma_\nu| < 1$, すなわち (16) 式の $\gamma'_\nu > 0$, $\nu = 1, \dots, n$ となることが, (19) の零点が開単位円 $|z| < 1$ にあるため

の必要十分条件である。 $\gamma_{\nu'} > 0$ を check する手続きが Schur-Cohn テストとよばれてゐるもので、離散時間システムの安定性を判別するアルゴリズムとしてシステム理論の領域では古くから用いられてゐる。

[応用2] (H^∞ -ノルムの計算)

べき級数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

の H^∞ ノルム $\|f\|_\infty = \sup_{\omega} |f(e^{j\omega})|$ は、(18)式のスケーリングにより

$$\|f\|_\infty = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(A_\nu^* A_\nu)$$

で与えられる。ただし $\lambda_{\max}$ は最大固有値をあらわす。

[応用3] (最小ノルム拡大)

与えられた $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ に対し

$$J(a_0, a_1, \dots, a_n) = \min \{ \|f\|_\infty : f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + o(z^{n+1}) \} \quad (21)$$

とおくと

$$\begin{aligned} J(a_0, a_1, \dots, a_n) &= \min \{ \|f - z^{n+1}g\|_\infty : g \in H^\infty \} \\ &= \lambda_{\max}(A_n^* A_n) \end{aligned} \quad (22)$$

で与えられる。

5. その後の拡張

Carathéodory, Fejer, Toeplitz, Schur の理論はその後色々な形で拡張された。ここではその内、システム理論に關係の深い3つの結果について述べる。

Takagi は 1924 年に (22) 式を拡張した關係

$$\min \{ \|f - z^{n+1}g\|_{\infty} : g \in H^{\infty}(r) \} = \lambda_{r+1}(A_n^* A_n) \quad (23)$$

を得た。⁵⁾ただし $H^{\infty}(r)$ は単位円内に r 個の極をもつ複素関数の集合、 $\lambda_r(\cdot)$ は r 番目に大きな固有値 (対称行列の) をあらわす。もう論

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (24)$$

で

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

である。 $r=0$ の場合が (22) 式であることは容易に分る。

(23) 式のノルムは

$$\begin{aligned} \|f - z^{n+1}g\|_{\infty} &= \|z^{-(n+1)}f - g\|_{\infty} \\ &= \|a_n z^{-1} + a_{n-1} z^{-2} + \cdots + a_0 z^{-(n+1)} - g\|_{\infty} \end{aligned}$$

と変形できる。つまり (23) 式は z^{-1} に關する $(n+1)$ 次の多項式と $H^{\infty}(r)$ ((22) 式の場合は H^{∞}) との距離を H^{∞}

ノルムで測ったものとなって 11. これを拡張し z^{-1} に関するベキ級数と H^∞ (z に関するベキ級数) との間の距離をもとめたのが Nehari による次の結果である.⁶⁾ すなわち

$$f(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

としたとき

$$\min \{ \|f - g\|_\infty : g \in H^\infty \} = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(H^*H) \quad (25)$$

$$H = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

となる.

(25) は (22) の拡張であるが, これを Takagi の場合と同様に拡張したのが A-A-K (Adamjan, Aron, Krein) の定理である.⁷⁾ すなわち 1970 年にこの 3 名のソ連の数学者は

$$\min \{ \|f - g\|_\infty : g \in H^\infty(r) \} = \lambda_{r+1}^{\frac{1}{2}}(H^*H) \quad (26)$$

が成立することを示した. (22) (25) (26) などが $\inf$ ではなく $\min$ であることに注意された. A-A-K は (26) 式とならん

$$\min \{ \|f - g\|_H : g \in \bar{H}^\infty(r) \} = \lambda_{r+1}^{\frac{1}{2}}(H^*H) \quad (27)$$

となることを示した. ただし $\|\cdot\|_H$ は対応するハンケル作用素のノルムで, g は $\bar{H}^\infty(r)$, すなわち単位円内におみ極

をもつ r 次の有理関数の集合に属する。

上の結果を線形代数の言葉で表現しよう。べき級数

$$g(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots \quad (28)$$

に対するハンケル行列

$$H' = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (29)$$

に関して次の有名な結果がある。

[Kronecker の定理]

べき級数 (28) が r 次の有理関数 (極の数が r 個) であるための必要十分条件は

$$\text{rank } H' \leq r+1 \quad (30)$$

となることである。

この結果を用いると (27) 式は

$$\begin{aligned} \min \{ \|H - H'\| ; \text{rank } H' \leq r+1 \} \\ = (H \text{ の } (r+1) \text{ 番目の特異値}) \end{aligned} \quad (31)$$

と書くことができる。但し H は (25) 式, H' は (29) 式で与えられ, $\|\cdot\|$ は ℓ^2 によって誘導される作用素ノルムである。(31) 式は H' が (29) 式のような特別な構造, すなわちハンケル行列である, という制約を除けば数値解析の標準的な定理を示しているにすぎない。すなわち「行列 H の

($r+1$) 番目の特異値は H に最も近い rank が ($r+1$) 以下の行列との距離に等しい」という、よく知られた特異値の性質である。(31) 式の意義は「最小の距離を達成する rank が ($r+1$) 以下の行列としてハンケル行列を選ぶことができる」という事実を示した点にある。この事実は commutant lifting theorem に基礎をもっているが、数値解析、あるいは行列論の定理としてみるとき極めて興味深い。

(27) 式あるいは (31) 式は、与えられた安定なシステムの伝達関数 f に対し、それとの距離 $\|\cdot\|_H$ が最小となる r 次のシステムを構成することを可能にする。これは次数の大きなシステムを次数の小さなシステムで近似する「システムの低次元化問題」に対する顕著な貢献で、最近の線形システム理論に大きなインパクトを与えた。

6. Pick-Nevanlinna の補間問題

1916年、Pick は次の問題を提起した。

[Pick の補間問題]

$\mathcal{C}$ に属する複素関数 w が

$$w(z_i) = w_i, \quad i=1, \dots, n, \quad |z_i| < 1 \quad (32)$$

を満足するとき、 n 個の補間点と補間値の組 (z_i, w_i) , $i=1, \dots, n$ はどのような条件を満足しているか?⁹⁾

Pickはこの問題に対し Schwarz の公式を用いてきかめて初等的な方法で解答を与えた。あるいは $|z_i| \leq r < 1$, $\forall i$ を満足する r に対して Schwarz の公式より

$$\frac{w(z_i) + \overline{w(z_j)}}{1 - z_i \overline{z_j}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re} w(re^{i\theta})}{(re^{i\theta} - z_i)(re^{-i\theta} - \overline{z_j})} d\theta$$

となるから, C に属する関数の性質 $\operatorname{Re} w(z) \geq 0$ $|z| < 1$ より

$$P := (p_{ij}), \quad p_{ij} := \frac{w_i + \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \quad (33)$$

で定義される行列は半正定でなければならぬ。あるいは

$$P \geq 0 \quad (34)$$

Pickの問題はまた論 Carathéodory の問題と関連している。Carathéodory の問題がべき級数展開の最初の n 個の係数によってクラス C を特性づけるのに対し, Pickの問題は n 個の関数値によってクラス C を特性づける問題である。(34)式は Carathéodory-Toeplitz の定理(2)に対応している。

1919年に Nevanlinna は同じ問題を全く別の観点から Pickとは独立に考察した。¹⁰⁾ 彼は n 個の数値の対 (z_i, w_i) , $|z_i| < 1$, $\operatorname{Re} p_i \geq 0$, $i=1, \dots, n$ が与えられたとき, 補条件(32)を満足するクラス C に属する関数 w を具体的に構成する方法を見出した。Nevanlinna の原著論文は C では

なく $\mathcal{S}$ を取り扱ってゐるので、ここではそれに従ふ。すなわち Nevanlinna の考察した問題は次の通りである。

数値の対 (β_i, z_i) , $i=1, \dots, n$, が与えられてゐるとき、

$$f(z_i) = \beta_i, \quad i=1, \dots, n \quad (35)$$

を満足する $f \in \mathcal{S}$ が存在するための条件と、構成手順をもとめよ。

Nevanlinna の構成法 (Schur-Nevanlinna アルゴリズムとよばれる) は次のような逐次的なものである。いま f 上の問題の解とし、 f_2 を

$$f_2(z) := \frac{f(z) - \beta_1}{1 - \bar{\beta}_1 f(z)} \cdot \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z - z_1} \quad (36)$$

で定義する。 $f(z_1) - \beta_1 = 0$ であるから $(f(z) - \beta_1)/(z - z_1)$ は解析的 ($|z| < 1$ で) である。従つて f_2 は解析的である。
(z_1, β_1) を原点とした Schwarz の補題を用ゐることにより $f_2 \in \mathcal{S}$ と $f_1 = f \in \mathcal{S}$ は等価であることが分る。(36) 式で $z = z_i$, $i=2, \dots, n$, を代入すると (35) 式より

$$f_2(z_i) = \frac{\beta_i - \beta_1}{1 - \bar{\beta}_1 \beta_i} \frac{1 - \bar{z}_1 z_i}{z_i - z_1} := \beta'_i, \quad i=2, \dots, n \quad (37)$$

を満足する。(36) 式を f について解くと

$$f(z) = \frac{f_2(z) B_1(z) + \beta_1}{\bar{\beta}_1 B_1(z) f_2(z) + 1}, \quad B_1(z) := \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \quad (38)$$

となり, (37) 式が満足されれば (38) 式で与えられる f は (35) を満足することが容易に確かめられる. すなわち, もとの補間問題は, 補間条件の個数がひとつづつなくなった (37) を満足する補間関数をもとめるより簡単な補間問題に帰着された. 補間問題 (37) が可解であるための必要条件は $f_2 \in \mathcal{S}$ より

$$|\beta_2'| \leq 1 \quad (39)$$

である.

上の単純化を繰返し補間条件の数をひとつづつ減らし, 最後は補間条件のない問題に帰着させ, 次に逆過程 ((38) 式で示される) を繰返し元の補間問題の解を回復させる方法が Nevanlinna アルゴリズムである. このアルゴリズムと,

Carathéodory 問題に対する Schur アルゴリズムとの類似性は明らかである. 可解条件は, 各段階で (39) 式に対応する不等式が満足されることであり, そのようなものとして逐次的である. (36) 式や (37) 式は関数論的なアルゴリズムであるが, これは (33) 式の行列 P (これを Pick 行列とよぶ) の Cholesky 分解であることが知られている.

$f \in \mathcal{C}$ であれば $(1-f)/(1+f) \in \mathcal{S}$ であるから, 対応する変換を (33) 式に対して行くと, (35) 式を満足する $f \in \mathcal{S}$ が存在するための条件は

$$P_{ij} := \frac{1 - \beta_i \bar{\beta}_j}{1 - z_i \bar{z}_j}, \quad P = (P_{ij}) \geq 0 \quad (40)$$

であることが分る。又、適当なスケーリングにより (35) 式を満足する $|z_i| < 1$ で解析的な関数で $\sup_{\omega} |f(e^{j\omega})| \leq \sigma$ を満足するものが存在するための必要十分条件は

$$P = (P_{ij}) \geq 0, \quad P_{ij} := \frac{1 - \sigma^{-2} \beta_i \bar{\beta}_j}{1 - z_i \bar{z}_j} \quad (41)$$

であることが分る。

7. Pick-Nevanlinna補間理論の応用

Pick-Nevanlinna 補間理論の応用例として、電気回路網における広帯域インピーダンス適合問題、制御理論におけるロバスト安定化問題、の2つを簡単に述べる。

〔広帯域インピーダンス適合問題〕

インピーダンス適合とは、与えられた電源からできる限り多くのパワーを取り出すためにはどうしたらよいか、という問題である。下図のような簡単な場合を考えよう。Eは電源電圧で r_g は電源の内部抵抗である。これに負荷抵抗 r_L を接続したとき回路を流れる電流は

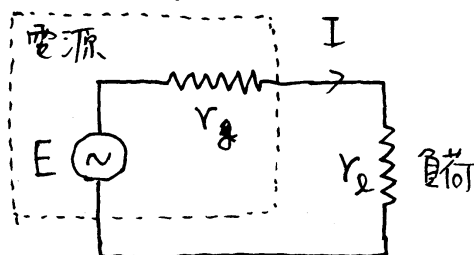


図1四

続したとき回路を流れる電流は

$$I = E / (r_g + r_L) \text{ であるから,}$$

負荷で消費される電力は

$$P = r_L |E|^2 / (r_g + r_L)^2$$

で与えられる。簡単な計算より

$$P = \left(\frac{1}{4r_g} - \left(\frac{r_e - r_g}{r_e + r_g} \right)^2 \right) |E|^2$$

となるから、 $r_e = r_g$ と選んだとき

負荷で消費される電力は最大値

$$P_{\max} = |E|^2 / 4r_g$$

となる。

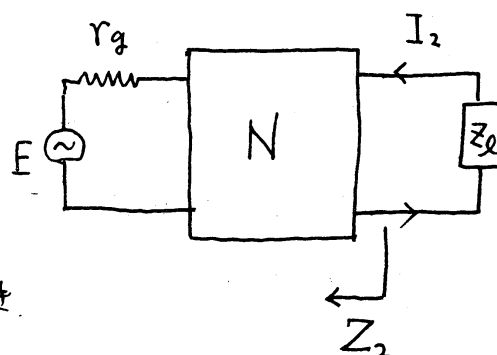


図2

実際問題で重要となるのは負荷が固定されておりそのインピーダンスが周波数依存性をもつ場合である。この場合は上図のように電源と負荷の間に無損失の伝送回路 N をとう入し、 Z_e で消費する電力を各周波数でなるべく大きくなるようにする。これが広帯域インピーダンス適合であり、宇宙通信などで最近重要になってきつつある問題である。無損失散乱行列の理論を用いると、 Z_e で消費される電力と電源が供給できる最大電力の比 $P/P_{\max}$ (これを transducer power gain とよぶ) は各周波数 ω で

$$\frac{P}{P_{\max}} = 1 - \left| \frac{Z_2(j\omega) - Z_e(-j\omega)}{Z_2(j\omega) + Z_e(j\omega)} \right|^2 \quad (42)$$

で与えられることが分る。ただし $Z_2(s)$ は図2図で示した通り、負荷側からみた回路の出カインピーダンスである。各 ω で (42) を最大にするような $Z_2(s)$ をもとめることが回路 N

の構成と等価である。 $Z_2(j\omega) = z_e(-j\omega)$ と選ぶことができれば問題は自明であるが、回路の受動性による制約から Z_2 も z_e も $\mathcal{C}$ に属するのでこれは不可能である。

いま $Z_e(-s)$ の極を $s_1, s_2, \dots, s_m$ とし

$$b(s) = (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)/(s+\bar{s}_1)\cdots(s+\bar{s}_m)$$

とすると $|b(j\omega)| = 1$ ($\forall \omega$) であるから

$$\lambda(s) = b(s) \frac{Z_2(s) - z_e(-s)}{Z_2(s) + z_e(s)} \quad (43)$$

とあったとき、 $P/P_{\max} = 1 - |\lambda(j\omega)|$ である。また $Z_2(s)$, $z_e(s)$ は $\operatorname{Re} s \geq 0$ で解析的であるから、 $b(s)$ の構成より λ も $\operatorname{Re} s \geq 0$ で解析的となる。今 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ を

$$z_e(\mu_i) + z_e(-\mu_i) = 0 \quad (44)$$

を満足する $\operatorname{Re} \mu_i \geq 0$ の数とすると、明らかに

$$\lambda(\mu_i) = b(\mu_i), \quad i=1, \dots, n \quad (45)$$

が満足されることが必要である。これは構成可能な transducer power gain $P/P_{\max} = 1 - \lambda(s)\lambda(-s)$ に対する制約条件であり、補間条件 (45) を満足する $\lambda(s)$ のうちで、 $\operatorname{Re} s \geq 0$ で解析的かつある帯域中 $\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2$ で $\sup |\lambda(j\omega)|$ を最小にする $\lambda(s)$ を求めることが、広帯域インピーダンス適合問題の数学的表現であることが示される。¹¹⁾ $\operatorname{Re} s \geq 0$ を $|z| \leq 1$ に写像すればこの問題は明らかに Pick-Nevanlinna

問題となる。

〔ロバスト安定化問題〕

与えられた線形システムをフィードバックによって安定化
する際に、システムのモデルが不確かさを含んでも安定化す
ることが可能であるかどうかを決めるのがロバスト安定化問
題である。この問題は次のように定式化できる。 $G(s)$ もあ

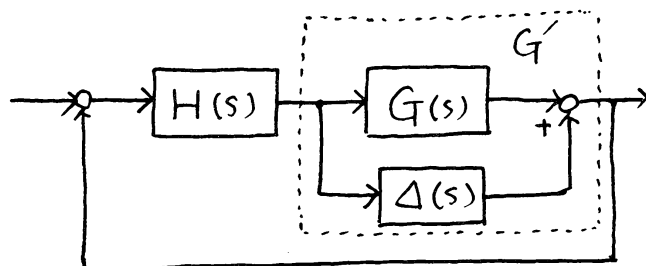


図3-4

るシステムモデルの伝達
関数とし、実際のシステ
ムは $G(s)$ に擾動 $\Delta(s)$
が加わったもの、すなわ
ちクラス

$\mathcal{P} = \{ G(s) + \Delta(s) : |\Delta(j\omega)| < r(j\omega) \} \quad (j = \sqrt{-1})$
に属するものとする。ただし $r(j\omega)$ は擾動の大きさを虚軸
すなわち実周波数軸上で限界づける関数である。問題はあ
る制御器（安定化器） $H(s)$ が存在して、図3-4の閉ループ
系がすべての $G' \in \mathcal{P}$ に対して安定であるようにできるかど
うか、である。

この問題に対する解は次のようになる。いま $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
を $G(s)$ の不安定な極 ($\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$) とし

$$\tilde{G}(s) = G(s) \frac{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)}{(s + \bar{\lambda}_1)(s + \bar{\lambda}_2) \cdots (s + \lambda_n)}$$

としたとき、上記の条件も満足する制御器が存在するための
必要十分条件は

$$\varphi(\lambda_i) = \tilde{G}(\lambda_i)/r(\lambda_i), \quad i=1, \dots, n$$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup |\varphi(j\omega)| < 1$$

を満足する $\operatorname{Re} s \geq 0$ で解析的な関数 $\varphi(s)$ が存在することである。この問題も明らかに Pick-Nevanlinna の補間問題であり、6 節の結果を用いれば容易に解が得られる。^{12, 13)}

8. むすび

補間問題と回路、システム、制御理論の接点を、問題の古典的な定式化に重点をおいて簡単に概観した。ここで述べたトピックは端緒的なものに限られており、現在両者の接点は信号処理の分野も含め深く広くなっている。この分野で工学サイドが数学（関数論、作用素論の最近の発展）から得たものは少なくない。工学者との積極的な交流を進めている Helton, Ball, Ptak, Gohberg, Dym, Ando, Sarason 等の貢献は著しい。我国の数学も、「超近代化路線」という言葉に見られる極端な純粋数学偏重を改め、従来数理論、組み合わせ理論、物理数学、非線形問題にほじ囿られていた応用数学が、システム制御信号処理の分野に広がることを大いに期待したい。