

2 種競争系の定常解の分岐構造

観音幸雄 (愛媛大学教育学部)

kanon@ed.ehime-u.ac.jp

1 はじめに

様々な自然現象の出現メカニズムを理解するために、反応拡散方程式

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \varepsilon D \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{f}(\mathbf{u}), & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ \mathbf{u}_x = 0, & x = 0, \pi, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

を用い、定常解の存在およびその安定性が調べられてきている。ここで、 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$, $\varepsilon > 0$ であり、 D はすべての要素が正である対角行列、 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ は滑らかな関数である。本報告では、 $N \geq 2$ をみたす反応拡散方程式の中で最も単純な非線形項をもつ Lotka-Volterra 競争系を扱い、 ε に関する定常解の大域的な分岐構造について考察する。

2 単独の反応拡散方程式

(1.1) において

$$N = 1, \quad f(u) = u(1-u)(u-a), \quad 0 < a < 1$$

とし、まず最初に、 ε に関する定常解の大域的な分岐構造について考えよう。このとき、 $u = 0$ および $u = 1$ は常微分方程式 $u_t = f(u)$ の安定な平衡点であり、 $u = a$ は不安定な平衡点である。(1.1) の定常問題

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon D u'' + u(1-u)(u-a), & x \in (0, \pi), \\ u' = 0, & x = 0, \pi \end{cases} \quad (2.1)$$

の解 $u(x)$ は、すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $u(x) = u(-x)$ をみたす周期 2π の周期関数とみなすことができる。ここで、 $' = \frac{d}{dx}$ である。変数変換 $x = \sqrt{\varepsilon} \xi$ を行うと、(2.1) は

$$u_\xi = v, \quad v_\xi = -D^{-1} f(u), \quad \xi \in \mathbf{R} \quad (2.2)$$

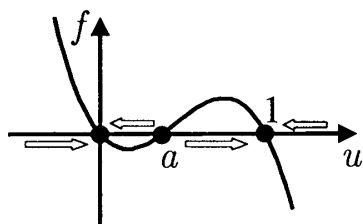


図 1: $f(u)$

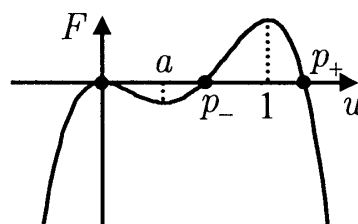


図 2: $0 < a < 1/2$ のときの $F(u)$

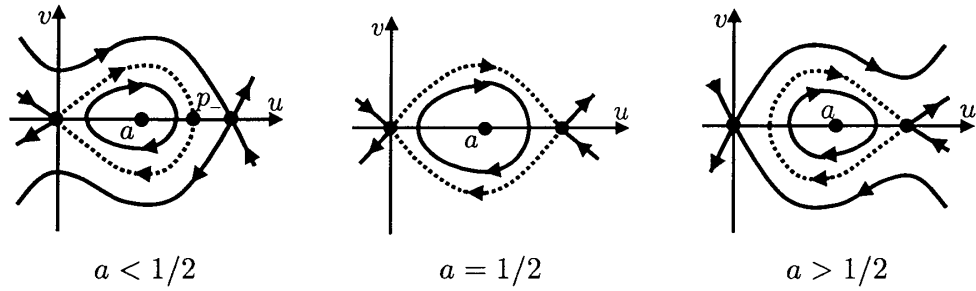


図 3: 流れ

と表せる.

$$\Xi = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad H(u, v) = \frac{D}{2} v^2 + F(u), \quad F(u) = \int_0^u f(s) ds$$

とおくと, (2.2) の任意の解 $u(\xi), v(\xi)$ に対して

$$\frac{d}{d\xi} [H(u(\xi), v(\xi))] = (D v_\xi(\xi) + f(u(\xi))) v(\xi) = 0$$

が成り立つので, 点 $(u(\xi), v(\xi))$ ($\xi \in [0, \Xi]$) は曲線 $H(u, v) = F(u(0))$ 上を動くことがわかる. 図 3 に示されるように, $H(u, v)$ の等高線を描くことにより, (2.2) によって生成される流れを理解できる. また, 境界条件 $v(0) = 0, v(\Xi) = 0$ より, (u, v) 平面で見ると, $\xi = 0$ のとき u 軸上を出発して, $\xi = \Xi$ のとき u 軸に再び戻ってくる軌道を見つければよいことがわかる.

$0 < a < 1/2$ のとき, 図 2 に示されるように,

$$F(u) = -\frac{1}{12} u^2 \{3u^2 - 4(1+a)u + 6a\}$$

は零点 $0, p_-, p_+$ ($a < p_- < 1 < p_+$) をもつ. 図 3 からわかるように, 各 $p \in (0, a) \cup (a, p_-)$ に対し, 初期条件 $u(0) = p, v(0) = 0$ のもとでの (2.2) の解 $u(\xi), v(\xi)$ に対して, 再び u 軸に戻ってくる最初の ξ を $\xi = \Xi(p)$ とし, $\varepsilon(p) = \pi^2 / \Xi(p)^2$ とおくと, $u(x/\sqrt{\varepsilon(p)})$ は $\varepsilon = \varepsilon(p)$ に対する (2.1) の解である. また, すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して,

$$(\varepsilon, u(x)) \text{ が (2.1) をみたす} \iff (k^2 \varepsilon, u(x/k)) \text{ が (2.1) をみたす}$$

が成り立つので, (2.1) の解の大域的な分岐構造は図 4 (b) のようになることが示唆される (例えば, 詳しくは Chafee-Infante [1] を参照せよ).

次に, $t \rightarrow +\infty$ における (1.1) の解の漸近挙動について考えよう. $u(x)$ に対して

$$\mathcal{H}(u(\cdot)) = \int_0^\pi \left\{ \frac{\varepsilon D}{2} u_x(x)^2 - F(u(x)) \right\} dx$$

とおくと, (1.1) の任意の解 $u(x, t)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(u(\cdot, t)) &= \int_0^\pi \{ \varepsilon D u_x(x, t) u_{xt}(x, t) - f(u(x, t)) u_t(x, t) \} dx \\ &= - \int_0^\pi \{ \varepsilon D u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)) \} u_t(x, t) dx = - \int_0^\pi u_t(x, t)^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

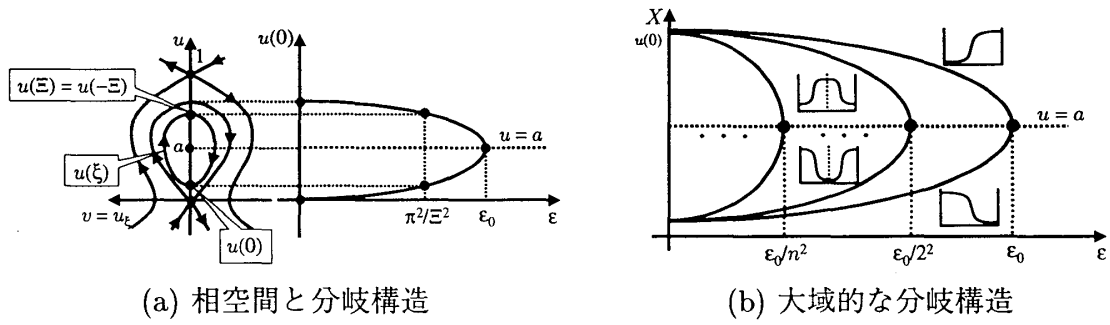


図 4: 分岐構造

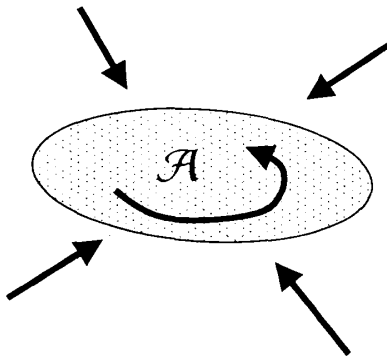
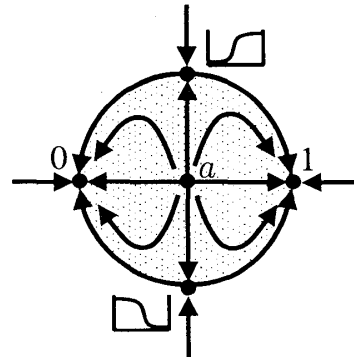
がみたされ, (1.1) は勾配系である. Hale [2, 第 4 章] より, (1.1) の大域的アトラクタ $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A} = \bigcup_{e \in E} W^u(e)$ と表現でき, (1.1) のすべての解は $t \rightarrow +\infty$ のとき $\mathcal{A}$ に漸近することが知られている. ここで, E は定常解の集合であり, $W^u(e)$ は $u = e$ における不安定多様体である. 以上のことから,

$t \rightarrow +\infty$ における反応拡散方程式 (1.1) の解の詳細な漸近挙動を理解するためには, すべての定常解を見つけ, それらの安定性を調べる重要な問題の一つである.

3 Lotka-Volterra 競争系

$N \geq 2$ をみたす反応拡散方程式 (1.1) の中で最も単純な非線形項をもつ Lotka-Volterra 競争系について考察しよう. ここで,

$$\begin{aligned} N = 2, \quad D = \text{diag}(d_u, d_v), \quad \mathbf{u} = {}^t(u, v), \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = {}^t(f, g)(\mathbf{u}), \\ f(\mathbf{u}) = f^0(\mathbf{u})u, \quad g(\mathbf{u}) = g^0(\mathbf{u})v, \quad \mathbf{f}^0(\mathbf{u}) = {}^t(f^0, g^0)(\mathbf{u}), \\ f^0(\mathbf{u}) = 1 - u^n - cv^n, \quad g^0(\mathbf{u}) = 1 - bu^n - v^n \end{aligned}$$

図 5: 大域的アトラクタ $\mathcal{A}$ 図 6: $\varepsilon_0/4 < \varepsilon < \varepsilon_0$

とし^{*}1, すべてのパラメータは正数である. また, 変数 $\mathbf{u}$ は個体群密度を意味するので, すべての $x \in [0, \pi]$ に対して $\mathbf{u}(x) \in R_+^2$ がみたされる正值解に制限して議論を行なうことにする. ただし, $R_+ = (0, +\infty)$ である.

順序関係 $\preceq$ を

$$(u_1, v_1) \preceq (u_2, v_2) \iff u_1 \leq u_2, v_1 \geq v_2$$

で定義し, 上の定義において, $\leq$ を $<$ で置き換えたものを $\prec$ と表すことにする. $\mathbf{u}_j(x, t) = {}^t(u_j, v_j)(x, t)$ ($j = 1, 2$) を (1.1) の正值解とすると,

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), \quad z(x, t) = v_2(x, t) - v_1(x, t)$$

は

$$\begin{cases} w_t = \varepsilon d_u w_{xx} + a_{11}(x, t) w - a_{12}(x, t) z, \\ z_t = \varepsilon d_v z_{xx} - a_{21}(x, t) w + a_{22}(x, t) z, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ w_x = 0, \quad z_x = 0, & x = 0, \pi, \quad t > 0 \end{cases}$$

の解である. ここで,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} (x, t) = \int_0^1 \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\theta \mathbf{u}_1(x, t) + (1 - \theta) \mathbf{u}_2(x, t)) d\theta$$

である. $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ の非線形性より, すべての (x, t) に対して $a_{12}(x, t) < 0$, $a_{21}(x, t) < 0$ が成り立つので, Protter-Weinberger [6, 第3章第8節] より, すべての $x \in [0, \pi]$ に対して $w(x, 0) \geq 0$, $z(x, 0) \geq 0$ であるなら, すべての $x \in [0, \pi]$, $t \geq 0$ に対して $w(x, t) \geq 0$, $z(x, t) \geq 0$ が成り立つ. これを順序関係 $\preceq$ を用いて表すと,

すべての $x \in [0, \pi]$ に対して $\mathbf{u}_1(x, 0) \preceq \mathbf{u}_2(x, 0)$ ならば, すべての $x \in [0, \pi]$, $t \geq 0$ に対して $\mathbf{u}_1(x, t) \preceq \mathbf{u}_2(x, t)$ が成り立つ.

つまり, 順序関係 $\preceq$ に関して (1.1) には比較定理が成り立つことがわかる.

また, $n = 2$ のときには, $\mathbf{u}(x) = {}^t(u, v)(x)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{u}(\cdot)) &= \int_0^\pi \left[\frac{\varepsilon}{2} \{ b d_u u_x(x)^2 + c d_v v_x(x)^2 \} - F(\mathbf{u}(x)) \right] dx, \\ F(\mathbf{u}) &= \frac{b}{2} u^2 + \frac{c}{2} v^2 - \frac{b}{4} u^4 - \frac{bc}{2} u^2 v^2 - \frac{c}{4} v^4 \end{aligned}$$

とおくと, (1.1) の任意の解 $\mathbf{u}(x, t) = {}^t(u, v)(x, t)$ に対して

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\mathbf{u}(\cdot, t)) = - \int_0^\pi (b u_t(x, t)^2 + c v_t(x, t)^2) dx \leq 0$$

^{*}1979年に Shigesaga-Kawasaki-Teramoto [8] によって, 個体群密度に依存する(非線形な)拡散効果と, 2次の非線形性をもつ反応項からなる競争系が提案されている. ある変数変換により, この競争系の拡散項を線形拡散に変換すると, それに伴って, 反応項が非常に複雑なものになる. 筆者は, その競争系の定常解の分岐構造や時間大域的な解の漸近挙動を研究するための最初の段階として, ここでの非線形性を扱い, 定常解の大域的な分岐構造を調べようとしている.

が成り立つので, $n = 2$ のときには (1.1) は勾配系となる. しかしながら, それ以外の $n > 0$ に対しては, (1.1) が勾配系かどうかは不明である.

本報告での目的を, (1.1) のすべての正値定常解を見つけることとし, ε に関する (1.1) の定常問題

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \varepsilon D \mathbf{u}'' + \mathbf{f}(\mathbf{u}), & x \in (0, \pi), \\ \mathbf{u}' = \mathbf{0}, & x = 0, \pi \end{cases} \quad (3.1)$$

の正値解の大域的な分岐構造について考察する.

3.1 評価

非線形項 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ は, 図 7 に示されるように, 4 つの場合に分類される. ただし, 矢印は $\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ で生成される流れを意味している. また, (3.1) の定数解としては, $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1 = {}^t(1, 0), \mathbf{e}_2 = {}^t(0, 1)$ および, $\max(b, c) < 1$ または $\min(b, c) > 1$ のとき正値解となる

$${}^t\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}, \hat{v}) = \left(\left(\frac{1-c}{1-bc} \right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{1-b}{1-bc} \right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

がある. まず, (3.1) に非定数正値解が存在する可能性がある (b, c) の範囲を特定しよう.

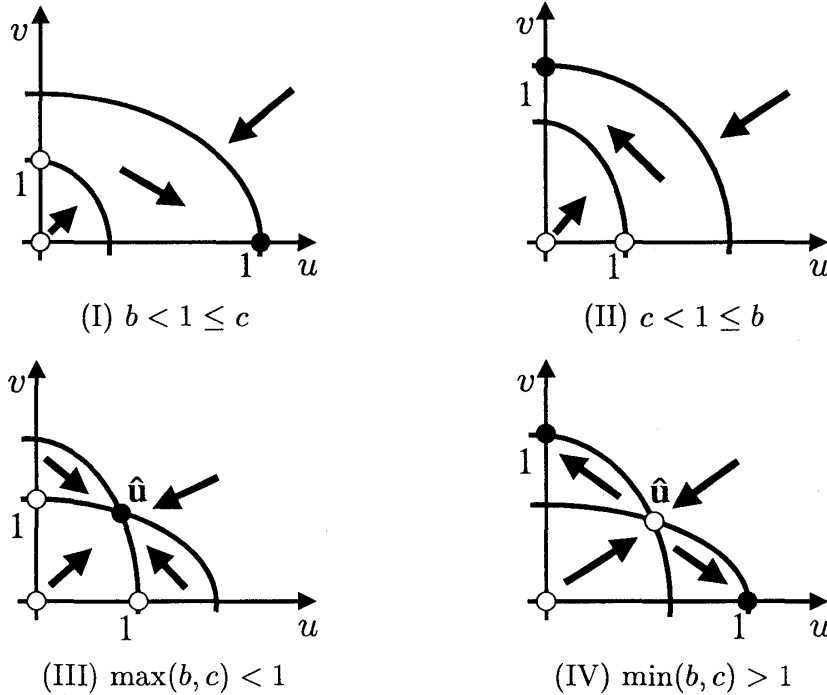


図 7: 非線形項の分類

$\mathbf{u}(x) = {}^t(u, v)(x)$ を (3.1) の任意の正値解とし,

$$\begin{aligned} u(x_-^u) &= \min_{x \in [0, \pi]} u(x), & u(x_+^u) &= \max_{x \in [0, \pi]} u(x), \\ v(x_-^v) &= \min_{x \in [0, \pi]} v(x), & v(x_+^v) &= \max_{x \in [0, \pi]} v(x) \end{aligned}$$

とくと,

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\varepsilon d_u \frac{u''(x_-^u)}{u(x_-^u)} = 1 - u(x_-^u)^n - c v(x_-^u)^n \geq 1 - u(x_-^u)^n - c v(x_+^v)^n, \\ 0 &\leq -\varepsilon d_v \frac{v''(x_+^v)}{v(x_+^v)} = 1 - b u(x_+^v)^n - v(x_+^v)^n \leq 1 - b u(x_-^u)^n - v(x_+^v)^n \end{aligned} \quad (3.2)$$

が得られる. 同様に

$$1 - u(x_+^u)^n - c v(x_-^v)^n \geq 0 \geq 1 - b u(x_+^u)^n - v(x_-^v)^n \quad (3.3)$$

も示せ, すべての $x \in [0, \pi]$ に対して

$$\mathbf{u}(x) \in \mathcal{R} \equiv (0, 1) \times (0, 1) \quad (3.4)$$

が成り立つ. $c < 1 \leq b$ のときには,

$$0 \leq (b-1) u(x_-^u)^n \leq (c-1) v(x_+^v)^n < 0$$

となり, 矛盾である. 同様に, $b < 1 \leq c$ のときにも矛盾が導かれる. また, $\min(b, c) < 1$ のときには,

$$v(x_+^v)^n - v(x_-^v)^n \leq b (u(x_+^u)^n - u(x_-^u)^n) \leq b c (v(x_+^v)^n - v(x_-^v)^n)$$

であるから, $u(x_+^u) = u(x_-^u)$ および $v(x_+^v) = v(x_-^v)$ が得られる. つまり, $\mathbf{u}(x)$ は定数関数である. 以上のことから, すべての n, d_u, d_v, ε に対して,

- (i) $b < 1 \leq c$ または $c < 1 \leq b$ のとき, (3.1) は正値解をもたない,
- (ii) $\max(b, c) < 1$ のとき, (3.1) の正値解は $\hat{\mathbf{u}}$ のみである,

ことがわかる. このことから,

(3.1) に非定数正値解が存在する可能性があるのは, $\min(b, c) \geq 1$ のときである.

以下では, $\rho = (n, b, c, d_u, d_v)$ とおき, $\mu = (b, c) \in \mathcal{M} \equiv \{(b, c) \mid \min(b, c) > 1\}$ の場合について考察する. このとき, $\hat{\mathbf{u}} \in R_+^2$ であることに注意したい.

3.2 空間的な様相

各 ρ に対して, $\mathbf{u}(x)$ が $\varepsilon > 0$ に対する (3.1) の正値解である $(\varepsilon, \mathbf{u}(\cdot)) \in R_+ \times X$ の集合を $E(\rho)$ とする. ここで, $X = \{\mathbf{u}(\cdot) \in C^2([0, \pi], \mathbf{R}^2) \mid \mathbf{u}'(0) = \mathbf{0} = \mathbf{u}'(\pi)\}$ である. さらに, ある $\ell \in \{0, 1\}$ が存在し, すべての $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $x \in (\pi j/k, \pi(j+1)/k)$ に対して $(-1)^{j+\ell} \mathbf{u}'(x) \succ \mathbf{0}$ が成り立つ $(\varepsilon, \mathbf{u}(\cdot)) \in E(\rho)$ の集合を $E_k(\rho)$ ($k \in \mathbf{N}$) とする ($E_k(\rho)$ に属する解の空間的な様相については図 8 を参照せよ). 定義から, すべての ρ に対して $\bigcup_{k \geq 0} E_k(\rho) \subset E(\rho)$ であり, さらに, 各 ρ, k に対して

$$(\varepsilon, \mathbf{u}(\cdot)) \in E_k(\rho) \iff (k^2 \varepsilon, \mathbf{u}(\cdot/k)) \in E_1(\rho)$$

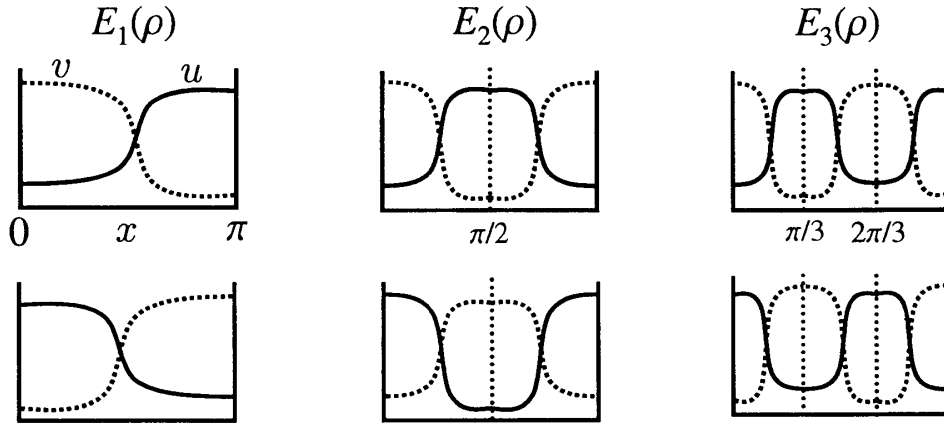


図 8: 空間的な様相

が成り立つ。

$\mathbf{u}(x) = {}^t(u, v)(x)$ を $\varepsilon > 0$ に対する (3.1) の任意の非定数正值解とする。境界条件より, $\mathbf{u}(x)$ は, すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(-x)$ をみたす周期 2π の周期関数とみなすことができる。また, $\mathbf{u}'(x)$ は

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon d_u U'' + f_u(\mathbf{u}(x)) U + f_v(\mathbf{u}(x)) V, \\ 0 = \varepsilon d_v V'' + g_u(\mathbf{u}(x)) U + g_v(\mathbf{u}(x)) V, \\ U = 0, \quad V = 0, \quad x = 0, \pi \end{cases} \quad x \in (0, \pi), \quad (3.5)$$

の非自明な解であるから, $\mathbf{u}''(0) \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u}'''(0) = \mathbf{0}$ である。 $u''(0) v''(0) = 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u' v')(0) &= 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}(u' v')(0) = 0, \quad \frac{d^3}{dx^3}(u' v')(0) = 0, \\ \varepsilon d_u d_v \frac{d^4}{dx^4}(u' v')(0) &= -4 d_v f_v(\mathbf{u}(0)) v''(0)^2 - 4 d_u g_u(\mathbf{u}(0)) u''(0)^2 > 0 \end{aligned}$$

となるので, すべての $x \in (0, x_0)$ に対して $u'(x) v'(x) \neq 0$ であり, $u'(x_0) v'(x_0) = 0$ が成り立つ $x_0 \in (0, \pi]$ が存在する。

すべての $x \in (0, x_0)$ に対して $u'(x) v'(x) > 0$ と仮定する。 $u'(x_0) = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{x_0} (\varepsilon d_u u'''(x) + f_u(\mathbf{u}(x)) u'(x) + f_v(\mathbf{u}(x)) v'(x)) u(x) dx \\ &= \varepsilon d_u (u''(x_0) u(x_0) - u''(0) u(0)) \\ &\quad + \int_0^{x_0} (f_u^0(\mathbf{u}(x)) u'(x) + f_v^0(\mathbf{u}(x)) v'(x)) u(x)^2 dx \neq 0 \end{aligned}$$

となり, 矛盾である。同様に $v'(x_0) = 0$ のときにも矛盾を導くことができるので, すべての $x \in (0, x_0)$ に対して $u'(x) v'(x) < 0$ が成り立つ。

$\mathbf{u}'(x_0) \neq \mathbf{0}$ を仮定する。このとき,

$$\mathbf{U}(x) (= {}^t(U, V)(x)) = \mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(2x_0 - x)$$

は $\mathbf{U}(x_0) = \mathbf{0}$, $U'(x_0)V'(x_0) = 0$, $\mathbf{U}''(x_0) = \mathbf{0}$ をみたす周期 2π の周期関数である. 簡単な計算から,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(UV)(x_0) &= 0, & \frac{d^2}{dx^2}(UV)(x_0) &= 2U'(x_0)V'(x_0) = 0, & \frac{d^3}{dx^3}(UV)(x_0) &= 0, \\ \varepsilon d_u d_v \frac{d^4}{dx^4}(UV)(x_0) &= -4d_v f_v(\mathbf{u}(x_0))V'(x_0)^2 - 4d_u g_u(\mathbf{u}(x_0))U'(x_0)^2 > 0 \end{aligned}$$

を確認できるので, すべての $x \in (x_0, x_1)$ に対して $U(x)V(x) > 0$ であり, $U(x_1)V(x_1) = 0$ となる $x_1 \in (x_0, x_0 + 2\pi]$ が存在する. $U(x_1) = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_0}^{x_1} (\varepsilon d_u u''(x) + f(\mathbf{u}(x))) u(2x_0 - x) dx = \varepsilon d_u (u(x_1)U'(x_1) - u(x_0)U'(x_0)) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} (f^0(\mathbf{u}(x)) - f^0(\mathbf{u}(2x_0 - x))) u(x) u(2x_0 - x) dx \neq 0 \end{aligned}$$

となり, 矛盾である. 同様に $V(x_1) = 0$ のときにも矛盾を導くことができるので, $\mathbf{u}'(x_0) = \mathbf{0}$ が成り立つ. 解の一意性より, すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(2x_0 - x)$ がみたされる. また, すべての $x \in (0, x_0)$ に対して $u'(x)v'(x) < 0$ であることと境界条件により, $\ell = \pi/x_0 \in \mathbf{N}$ となるので, $(\varepsilon, \mathbf{u}(\cdot)) \in E_\ell(\rho)$ である. ゆえに, 各 ρ に対して

$$E(\rho) = \bigcup_{k \geq 0} E_k(\rho)$$

が成り立つ. このことは, 各 ρ に対して, $E_1(\rho)$ の構造を調べるだけで, $E(\rho)$ の構造全体が理解できることを示している. また, 証明を見直すと, すべての $\mathbf{u} \in R_+^2$ に対して

$$f_u^0(\mathbf{u}) < 0, \quad f_v^0(\mathbf{u}) < 0, \quad g_u^0(\mathbf{u}) < 0, \quad g_v^0(\mathbf{u}) < 0 \quad (3.6)$$

がみたされる $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ であれば, 上の結果は成り立つことがわかる. 以下では, 非定数正値解 $\mathbf{u}(x)$ に対して, 上の証明によって定められる $\ell \in \mathbf{N}$ を $\ell(\mathbf{u})$ と表すことにする.

次に, $\varepsilon(p)$ および $\mathbf{u}(x, q) = {}^t(u, v)(x, q)$ は区間 (q_-, q_+) 上で定義された連続関数であり, 各 q に対して $\mathbf{u}(x, p)$ は $\varepsilon = \varepsilon(q)$ に対する (3.1) の非定数正値解である場合に, $\mathbf{u}(x, q)$ の空間的な様相について考えよう.

$$\ell_0 = \ell(\mathbf{u}(\cdot, q_0)) = \inf\{\ell(\mathbf{u}(\cdot, q)) \mid q \in (q_-, q_+)\}$$

となる $\ell_0 \in \mathbf{N}$, $q_0 \in (q_-, q_+)$ をとることができる. すべての $x \in (0, \pi/\ell_0)$ に対して $u'(x, q_0)v'(x, q_0) < 0$ がみたされることがと, $\mathbf{u}(\cdot, q)$ の連続性より, $q_0 \in \text{Int } Q$ であり, すべての $q \in Q$ に対して $\ell(\mathbf{u}(\cdot, q)) = \ell_0$ をみたす最大に延長された区間 Q が存在する. ここで, $q_- < \hat{q}_- \equiv \inf Q$ と仮定する. $\mathbf{u}(x, \hat{q}_-)$ は非定数であるから, $\ell_1 \equiv \ell(\mathbf{u}(\cdot, \hat{q}_-)) > \ell_0$ でなければならない. このとき,

$$\pi/\ell_1 \in (0, \pi/\ell_0), \quad \mathbf{u}'(\pi/\ell_1, \hat{q}_-) = \mathbf{0}$$

である. 各 $q \in Q$ に対して, $(0, \pi/\ell_0)$ 上で $\mathbf{u}'(x, q) > \mathbf{0}$ または, $(0, \pi/\ell_0)$ 上で $\mathbf{u}'(x, q) < \mathbf{0}$ が成り立つので, $\mathbf{u}''(\pi/\ell_1, \hat{q}_-) = \mathbf{0}$ でなければならない. また, $\mathbf{u}'(x, \hat{q}_-)$ は $\mathbf{u}'(\pi/\ell_1, \hat{q}_-) = \mathbf{0}$ をみたす

$$\mathbf{0} = \varepsilon(\hat{q}_-) D \mathbf{u}'' + \mathbf{f}_u(\mathbf{u}(x, \hat{q}_-)) \mathbf{u}, \quad x \in (0, \pi)$$

の非自明な解であるから, $\mathbf{u}''(x, \hat{q}_-) \neq 0$ でなければならない. これは矛盾である. ゆえに, $q_- = \inf Q$ である. 同様に $q_+ = \sup Q$ も示せるので, 次が成り立つ.

$\varepsilon(q)$ および $\mathbf{u}(\cdot, q)$ を区間 (q_-, q_+) 上で定義された連続関数とし, 各 q に対して, $\mathbf{u}(x, q)$ が $\varepsilon = \varepsilon(q)$ に対する (3.1) の非定数正值解であるとする. このとき, $\ell(\mathbf{u}(\cdot, q))$ は区間 (q_-, q_+) 上で定数関数である.

これは, (3.1) の非定数正值解の連続的な枝に対して, $\ell(\mathbf{u})$ の値は一定であることを示している.

ε および $\mathbf{u}(x) = {}^t(u, v)(x)$ は $(\varepsilon, \mathbf{u}(\cdot)) \in E_1(\rho)$ をみたすとする. (3.4) が成り立ち, すべての $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f_u(\mathbf{u}) - g_u(\mathbf{u}) &= 1 - (n+1)u^n - cv^n + nbu^{n-1}v \leq 1 + nb, \\ g_v(\mathbf{u}) - f_v(\mathbf{u}) &= 1 - (n+1)v^n - bu^n + ncuv^{n-1} \leq 1 + nc \end{aligned}$$

であることに注意する. ここで,

$$M(\rho) = \frac{\max(1 + nb, 1 + nc)}{\min(d_u, d_v)}$$

とおく. $\mathbf{u}'(x)$ はすべての $x \in (0, \pi)$ に対して $u'(x)v'(x) < 0$ をみたす (3.5) の非自明な解であるから, $\varepsilon > M(\rho)$ のときには,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi (\varepsilon d_u u'''(x) + f_u(\mathbf{u}(x))u'(x) + f_v(\mathbf{u}(x))v'(x)) \sin x \, dx \\ &\quad - \int_0^\pi (\varepsilon d_v v'''(x) + g_u(\mathbf{u}(x))u'(x) + g_v(\mathbf{u}(x))v'(x)) \sin x \, dx \\ &= \int_0^\pi (f_u(\mathbf{u}(x)) - g_u(\mathbf{u}(x)) - \varepsilon d_u) u'(x) \sin x \, dx \\ &\quad - \int_0^\pi (g_v(\mathbf{u}(x)) - f_v(\mathbf{u}(x)) - \varepsilon d_v) v'(x) \sin x \, dx \neq 0 \end{aligned}$$

となり, 矛盾である. ゆえに, 各 ρ に対して,

$$(\varepsilon, \mathbf{u}(\cdot)) \in E_1(\rho) \implies \varepsilon \leq M(\rho)$$

が成り立つ.

3.3 $u(0)$ に関する一意性

横軸を ε の値, 縦軸を $u(0)/\hat{u}$ の値として, $E_1(\rho)$ の構造を数値的に求めたものが図 9 である. これにより, ε に対しては複数の $u(0)$ が対応するが, $u(0) (\neq \hat{u})$ に対しては唯一つの ε が対応すること, つまり, $u(0)$ に関する (3.1) の正值解の一意性が期待できる. ここでは, このような性質が成り立つかどうか調べてみよう.

$(\varepsilon_j, \mathbf{u}_j(\cdot)) \in E_1(\rho)$ ($j = 1, 2$) を任意とする. 境界条件より, $\mathbf{u}_j(x) = {}^t(u_j, v_j)(x)$ ($j = 1, 2$) は周期 2π の周期関数とみなせる. ここでは, $u_1(0) = u_2(0)$ または $v_1(0) = v_2(0)$ が

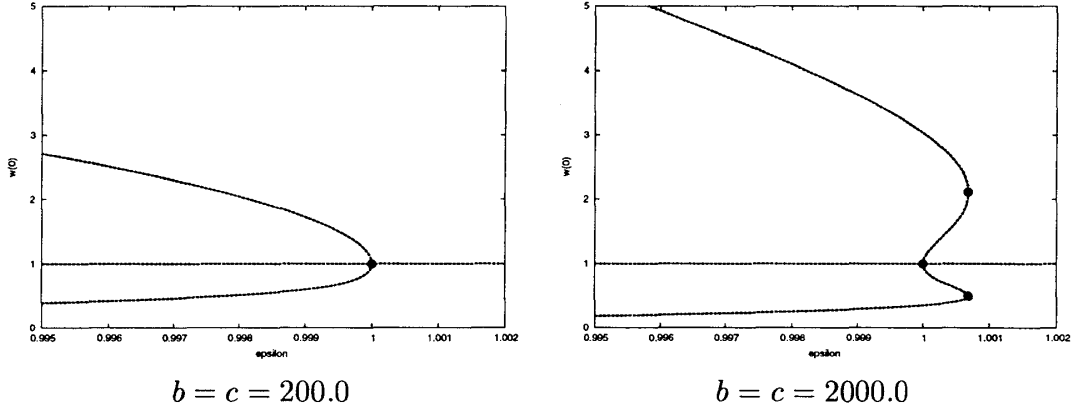


図 9: $n = 1.1$, $d_u = d_v$ の場合の分岐図

みたされるときに, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ および $\mathbf{u}_1(\cdot) = \mathbf{u}_2(\cdot)$ が成り立つことを示そう. u と v の役割を入れ替えることにより, $v_1(0) = v_2(0)$ の場合にも同様に示せるので, $u_1(0) = u_2(0)$ の場合のみを証明することにする. このとき, 一般性を失うことなく, $v_1(0) \geq v_2(0)$ を仮定してよい.

$v_1(0) > v_2(0)$ を仮定する. $\mathbf{U}_j(\xi) (= {}^t(U_j, V_j)(\xi)) = \mathbf{u}_j(\sqrt{\varepsilon_j} \xi)$ ($j = 1, 2$) は, 境界条件 $\mathbf{U}_\xi(0) = \mathbf{0}$ のもとでの

$$0 = D \mathbf{U}_{\xi\xi} + \mathbf{f}(\mathbf{U}), \quad \xi \in \mathbf{R} \quad (3.7)$$

の有界な正值解である.

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \end{pmatrix}(\xi) = \int_0^1 \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^0(\theta \mathbf{U}_1(\xi) + (1 - \theta) \mathbf{U}_2(\xi)) d\theta$$

とおくと, $\mathbf{f}^0(\mathbf{u})$ の非線形性より, すべての i, j, ξ に対して $a_{ij}^0(\xi) < 0$ である.

$$\hat{U}(\xi) = \frac{U_1(\xi)}{U_2(\xi)} \quad \hat{V}(\xi) = \frac{V_1(\xi)}{V_2(\xi)}$$

とおくと,

$$d_u \frac{d^2}{d\xi^2} (U_1 - U_2)(0) = -a_{12}^0(0) u_1(0) > 0$$

より,

$$\xi_1 \equiv \sup\{\tau > 0 \mid \text{区間 } [0, \tau] \text{ 上で } \hat{U}(\xi) > 1, \hat{V}(\xi) > 1 \text{ が成り立つ}\} > 0$$

をとることができる. $\hat{U}_\xi(0) = 0, \hat{V}_\xi(0) = 0$ であることと, すべての $\xi \in (0, \xi_1)$ に対して

$$\begin{aligned} d_u \frac{d}{d\xi} [U_2(\xi)^2 \hat{U}(\xi)] &= d_u (U_{1\xi\xi}(\xi) U_2(\xi) - U_1(\xi) U_{2\xi\xi}(\xi)) \\ &= -\left\{ a_{11}^0(\xi) (\hat{U}(\xi) - 1) U_2(\xi) + a_{12}^0(\xi) (\hat{V}(\xi) - 1) V_2(\xi) \right\} U_1(\xi) U_2(\xi) > 0, \\ d_v \frac{d}{d\xi} [V_2(\xi)^2 \hat{V}(\xi)] &= d_v (V_{1\xi\xi}(\xi) V_2(\xi) - V_1(\xi) V_{2\xi\xi}(\xi)) \\ &= -\left\{ a_{21}^0(\xi) (\hat{U}(\xi) - 1) U_2(\xi) + a_{22}^0(\xi) (\hat{V}(\xi) - 1) V_2(\xi) \right\} V_1(\xi) V_2(\xi) > 0 \end{aligned}$$

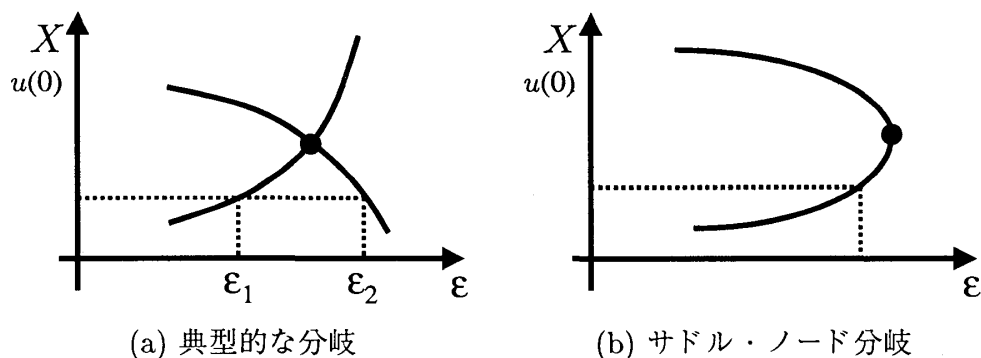


図 10: 分岐の例

が成り立つことから, すべての $\xi \in (0, \xi_1]$ に対して $\hat{U}_\xi(\xi) > 0$, $\hat{V}_\xi(\xi) > 0$ である.

$$1 = \hat{U}(0) < \hat{U}(\xi_1), \quad 1 < \hat{V}(0) < \hat{V}(\xi_1)$$

および ξ_1 の定義から, $\xi_1 = +\infty$ でなければならない. したがって, $U_1(\xi)/U_2(\xi)$ および $V_1(\xi)/V_2(\xi)$ は狭義単調増加関数である. $\Xi_j = \pi/\sqrt{\epsilon_j}$ とおくと, $U_j(\xi)$ は周期 $2\Xi_j$ の周期関数である. $E_1(\rho)$ に属する解の空間的な様相から, $U_1(\xi)$ は $\xi = \xi_2 \in \{0, \Xi_1\}$ で最大値をとるので,

$$\frac{U_1(\xi_2 + \Xi_2)}{U_2(\xi_2)} \leq \frac{U_1(\xi_2)}{U_2(\xi_2)} < \frac{U_1(\xi_2 + \Xi_2)}{U_2(\xi_2 + \Xi_2)} = \frac{U_1(\xi_2 + \Xi_2)}{U_2(\xi_2)}$$

が得られ, これは矛盾である. ゆえに, $v_1(0) = v_2(0)$ である. 解の一意性より, すべての $\xi \in \mathbf{R}$ に対して $U_1(\xi) = U_2(\xi)$ が成り立つ. 各 j に対して区間 $(0, \Xi_j)$ 上で $U_{j\xi}(\xi) V_{j\xi}(\xi) < 0$ であるから, $\epsilon_1 = \epsilon_2$ でなければならない. したがって,

ρ および $(\epsilon_j, \mathbf{u}_j(\cdot)) \in E_1(\rho)$ ($j = 1, 2$) を任意とする. $[\mathbf{u}_1(0)]_1 = [\mathbf{u}_2(0)]_1$ または $[\mathbf{u}_1(0)]_2 = [\mathbf{u}_2(0)]_2$ がみたされるならば, $\epsilon_1 = \epsilon_2$ および $\mathbf{u}_1(\cdot) = \mathbf{u}_2(\cdot)$ が成り立つ.

ここで, $[\mathbf{u}]_j$ はベクトル $\mathbf{u}$ の第 j 要素を意味する. これにより, (3.1) の正值解からの二次分岐は, 図 10 (a) に示されるような分岐は起きず, 起こったとしても, 図 10 (b) に示されるようなサドル・ノード型であることがわかる. また, 上の議論を見直すと, (3.6) がみたされる $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ に対しては, 上の結果が成り立つことがわかる.

3.4 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ からの分岐

変数変換 $u = \hat{u}w$, $v = \hat{v}z$ により, (3.1) は

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \epsilon D \mathbf{w}'' + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}), & x \in (0, \pi), \\ \mathbf{w}' = \mathbf{0}, & x = 0, \pi \end{cases} \quad (3.8)$$

と表せ, $\mathbf{e} = {}^t(1, 1)$ は (3.8) の定数解である. ここで,

$$\begin{aligned}\hat{w} &= \hat{u}^n, & \hat{z} &= \hat{v}^n, & \hat{\mathbf{w}} &= {}^t(\hat{w}, \hat{z}), & \mathbf{w} &= {}^t(w, z), & \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) &= {}^t(\hat{f}, \hat{g})(\mathbf{w}), \\ \hat{f}(\mathbf{w}) &= \hat{f}^0(\mathbf{w}) w, & \hat{g}(\mathbf{w}) &= \hat{g}^0(\mathbf{w}) z, & \hat{\mathbf{f}}^0(\mathbf{w}) &= {}^t(\hat{f}^0, \hat{g}^0)(\mathbf{w}), \\ \hat{f}^0(\mathbf{w}) &= 1 - \hat{w} w^n - (1 - \hat{w}) z^n, & \hat{g}^0(\mathbf{w}) &= 1 - (1 - \hat{z}) w^n - \hat{z} z^n\end{aligned}$$

である. また,

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} -n\hat{w} & \frac{n(\hat{w}-1)\hat{u}}{\hat{v}} \\ \frac{n(\hat{z}-1)\hat{v}}{\hat{u}} & -n\hat{z} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} -n\hat{w} & n(\hat{w}-1) \\ n(\hat{z}-1) & -n\hat{z} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

より,

$$\det(-D + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}})) = \det(-D + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e}))$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= (0, 1) \times \hat{\mathcal{J}}, & \hat{\mathcal{J}} &= \{ \mathbf{w} \in R_+^2 \mid w + z < 1 \}, \\ \mathbf{d} &= (d_u, d_v), & \mathcal{D}(n, \mu) &= \{ \mathbf{d} \in R_+^2 \mid \det(-D + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}})) = 0 \}\end{aligned}$$

とおく. $\hat{\mathbf{w}} \in \hat{\mathcal{J}}$ と (3.9) より, $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e})$ の各要素は負であり, $\det \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e}) = -n^2 \omega < 0$ である. ただし, $\omega = 1 - \hat{w} - \hat{z}$ とする. したがって,

$$\det(\gamma D + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e})) = 0$$

は実数解 γ_-, γ_+ ($\gamma_- = -1, \gamma_+ > 0$) をもち, $\nu \in \{-, +\}$ に対して, 行列 $\gamma_\nu D + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e})$ の固有値 0 に対応する固有ベクトルは,

$$\mathbf{v}_\nu = {}^t(n(1 - \hat{w}), \gamma_\nu d_u - n\hat{w})$$

と表せる. また, 簡単な計算から, $\mathbf{v}_-$ と $\mathbf{v}_+$ は一次独立であることがわかる.

定数解 $\mathbf{w} = \mathbf{e}$ のまわりで線形化した (3.8) の線形化作用素を

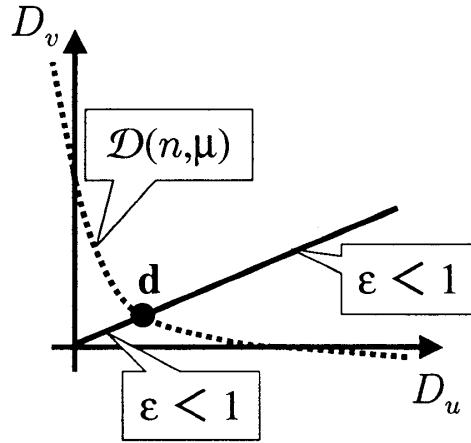
$$\mathcal{K}_\varepsilon \mathbf{w} = \varepsilon D \mathbf{w}'' + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e}) \mathbf{w}$$

とする. 境界条件 $\mathbf{w}'(0) = \mathbf{0}, \mathbf{w}'(\pi) = \mathbf{0}$ をみたす実数の範囲での $\mathcal{K}_\varepsilon \mathbf{w} = \mathbf{0}$ の任意の解 $\mathbf{w}(x)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(x) &= (C_1 e^{-\eta_+ x} + C_2 e^{\eta_+ x}) \mathbf{v}_+ + (C_3 e^{-i\eta_- x} + C_4 e^{i\eta_- x}) \mathbf{v}_- \\ &= (C_1 e^{-\eta_+ x} + C_2 e^{\eta_+ x}) \mathbf{v}_+ + 2 \operatorname{Re}(C_4 e^{i\eta_- x}) \mathbf{v}_-\end{aligned}$$

と表せる. ここで, $\eta_\pm = \sqrt{|\gamma_\pm|/\varepsilon} (> 0)$ であり, C_1, C_2 は実数, C_3, C_4 は $C_4 = \overline{C_3}$ をみたす複素数である. 境界条件より,

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (C_2 - C_1) \eta_+ \mathbf{v}_+ - 2 \operatorname{Im} C_4 \eta_- \mathbf{v}_-, \\ \mathbf{0} &= (C_2 - C_1 e^{-2\eta_+ \pi}) e^{\eta_+ \pi} \eta_+ \mathbf{v}_+ - 2 \operatorname{Im}(C_4 e^{i\eta_- \pi}) \eta_- \mathbf{v}_-\end{aligned}$$

図 11: 拡散係数 ($D_u = \varepsilon d_u$, $D_v = \varepsilon d_v$) と $\mathcal{D}(n, \mu)$

が得られる. $\mathbf{v}_-$ と $\mathbf{v}_+$ は一次独立であるから,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad \text{Im } C_4 = 0, \quad \text{Re } C_4 \sin(\eta_- \pi) = 0$$

となる. $\Phi_k(x) = \mathbf{v}_- \cos kx$ とおくと,

$$\ker \mathcal{K}_\varepsilon = \begin{cases} \{ \alpha \Phi_k(\cdot) \mid \alpha \in \mathbf{R} \} & (\varepsilon = 1/k^2, k \in \mathbf{N} \text{ のとき}), \\ \{ \mathbf{0} \} & (\text{その他}) \end{cases}$$

が成り立つ. $\mathcal{K}_\varepsilon$ の随伴作用素を $\mathcal{K}_\varepsilon^*$ とし,

$$\mathbf{v}_-^* = {}^t(n(1 - \hat{z}), -d_u - n\hat{w}), \quad \Phi_k^*(x) = \mathbf{v}_-^* \cos kx$$

とおくと, 同様の議論から,

$$\ker \mathcal{K}_\varepsilon^* = \begin{cases} \{ \alpha \Phi_k^*(\cdot) \mid \alpha \in \mathbf{R} \} & (\varepsilon = 1/k^2, k \in \mathbf{N} \text{ のとき}), \\ \{ \mathbf{0} \} & (\text{その他}) \end{cases}$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k, \Phi_k^* \rangle &= \int_0^\pi (\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*) \cos^2 kx \, dx = \frac{\pi}{2} (\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*) \\ &= \frac{\pi}{2} \{ n^2 (1 - \hat{w})(1 - \hat{z}) + (d_u + n\hat{w})^2 \} > 0 \end{aligned}$$

がみたされる. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^2(0, \pi)$ 内積を意味する.

$\varepsilon = 1/k^2$ ($k \in \mathbf{N}$) に対して, 境界条件 $\mathbf{w}'(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{w}'(\pi) = \mathbf{0}$ をみたす $\mathcal{K}_\varepsilon \mathbf{w} = \Phi_k(x)$ の解 $\mathbf{w}(x)$ が存在すると仮定すると,

$$0 < \langle \Phi_k, \Phi_k^* \rangle = \langle \mathcal{K}_\varepsilon \mathbf{w}, \Phi_k^* \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathcal{K}_\varepsilon^* \Phi_k^* \rangle = 0$$

となり, 矛盾である. したがって, 各 $k \in \mathbf{N}$ に対して, $\varepsilon = 1/k^2$ のとき $\mathcal{K}_\varepsilon$ は単純な固有値 0 をもち, その固有関数は $\Phi_k(x)$ である. また, その他の $\varepsilon > 0$ に対しては $\mathcal{K}_\varepsilon$ は

固有値 0 をもたない. $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ${}^t(0, 1/\hat{v})$ および ${}^t(1/\hat{u}, 0)$ からは (3.8) の正値解は分岐しないので, Rabinowitz [7] と第 3.1 節の評価より, 各 $k \in \mathbf{N}$ に対して, $\varepsilon = 1/k^2$ で $\mathbf{w} = \mathbf{e}$ から次の性質をみたす (3.8) の正値解が分岐することがわかる.

$(1/k^2, \mathbf{e}) \in \mathcal{C}_k(\rho)$ であり, $\{0\} \times X$ または $R_+ \times \{\mathbf{e}\}$ に到達する (3.8) の正値解から成る有界で連続的な枝 $\mathcal{C}_k(\rho)$ ($\subset R_+ \times X$) が存在する.

$\mathcal{P}(\rho) = \{[\mathbf{w}(0)]_1 \mid (\varepsilon, \mathbf{u}(\cdot)) \in \mathcal{C}_1(\rho)\}$ とおくと, $u(0)$ に関する一意性より, すべての $p \in \mathcal{P}(\rho)$ に対して $[\mathbf{w}(0, p, \rho)]_1 = p$ をみたす連続関数 $\hat{\varepsilon}(p, \rho)$, $\hat{\mathbf{w}}(\cdot, p, \rho)$ を用いて,

$$\mathcal{C}_1(\rho) = \{(\hat{\varepsilon}(p, \rho), \hat{\mathbf{w}}(\cdot, p, \rho)) \mid p \in \mathcal{P}(\rho)\}$$

と表すことができる.

3.5 分岐方向の計算

この節では, $(\varepsilon, \mathbf{u}) = (1, \mathbf{e})$ のまわりでの分岐方向について, さらに詳しく調べよう. $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ であるから, $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w})$ を $\mathbf{w} = \mathbf{e}$ のまわりで展開すると,

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{e} + \mathbf{h}) = \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e}) \mathbf{h} + \hat{\mathbf{f}}_2(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + \hat{\mathbf{f}}_3(\mathbf{h})$$

と表せる. ここで, $\hat{\mathbf{f}}_2(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ は $\mathbf{h}_1$ および $\mathbf{h}_2$ に関して線形な関数であり, $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ のとき $\hat{\mathbf{f}}_3(\mathbf{h}) = O(|\mathbf{h}|^3)$ がみたされる. 変数 ν を導入して,

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(\nu, \rho) = 1 + \frac{1}{\sqrt{d_u^2 + d_v^2}} (\nu \varepsilon_1(\rho) + \nu^2 \varepsilon_2(\rho) + \nu^3 \varepsilon_3(\nu, \rho)),$$

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}(x, \nu, \rho) = \mathbf{e} + \nu \Phi_1(x) + \nu^2 \mathbf{w}_2(x, \rho) + \nu^3 \mathbf{w}_3(x, \nu, \rho)$$

とおき, これらを (3.8) に代入する. このとき, $\mathcal{K}_1 \Phi_1(x) = \mathbf{0}$ であることと, (3.8) は

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\mathbf{w} - \mathbf{e}) &= -(\varepsilon - 1) D \mathbf{w}'' - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{e})(\mathbf{w} - \mathbf{e}) \\ &= -(\varepsilon - 1) D \mathbf{w}'' - \hat{\mathbf{f}}_2(\mathbf{w} - \mathbf{e}, \mathbf{w} - \mathbf{e}) - \hat{\mathbf{f}}_3(\mathbf{w} - \mathbf{e}) \end{aligned}$$

と表せることに注意すると, $\nu \rightarrow 0$ のとき上の両辺ともに $O(\nu^2)$ であり, ν^2 の項は

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 \mathbf{w}_2 &= -\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\sqrt{d_u^2 + d_v^2}} D \Phi_1''(x) - \hat{\mathbf{f}}_2(\Phi_1(x), \Phi_1(x)) \\ &= \frac{\varepsilon_1(\rho)}{\sqrt{d_u^2 + d_v^2}} D \mathbf{v}_- \cos x - \hat{\mathbf{f}}_2(\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-) \cos^2 x \equiv \mathbf{h}_3(x) \end{aligned} \tag{3.10}$$

である. $\mathcal{K}_1^*$ の固有値 0 に対応する固有空間は $\Phi_1^*(x)$ で張られているので,

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{h}_3, \Phi_1^* \rangle &= \frac{\varepsilon_1(\rho)}{\sqrt{d_u^2 + d_v^2}} (D \mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*) \int_0^\pi \cos^2 x dx \\ &\quad - (\hat{\mathbf{f}}_2(\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-), \mathbf{v}_-^*) \int_0^\pi \cos^3 x dx = \frac{\pi \varepsilon_1(\rho)}{2 \sqrt{d_u^2 + d_v^2}} (D \mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*) \end{aligned}$$

となり, $\varepsilon_1(\rho) = 0$ が得られる. 分岐方向を決定するためには, $\varepsilon_2(\rho)$ の値を調べる必要があるが, ν に関する 3 次項を計算するのはかなり困難である.

ここで, 分岐方向を調べるパラメータの範囲を明確にしておこう. パラメータ ρ の集合 $\mathcal{N}$ および $\mathcal{N}_2$ を

$$\mathcal{N} = \bigcup_{(n,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}} \{(n,\mu)\} \times \mathcal{D}(n,\mu), \quad \mathcal{N}_2 = \{\rho \in \mathcal{N} \mid n \geq 2\}$$

で定義すると, すべての $\rho \in \mathcal{N}$ に対して, これまで述べてきた結果は成り立つことに注意したい. また, すべての $\rho \in \mathcal{N}$ に対して,

$$\hat{\mathbf{w}} \in \hat{\mathcal{J}}, \quad 0 < \omega < 1, \quad d_v = \frac{n(n\omega - \hat{z}d_u)}{d_u + n\hat{w}}, \quad 0 < d_u < \frac{n\omega}{\hat{z}}$$

であるから, すべての $\rho \in \mathcal{N}$ に対して $(y, \hat{\mathbf{w}}) \in \mathcal{J}$ がみたされる. ただし, $y = d_u \hat{z}/(n\omega)$ である. $\lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ より, $\mathcal{N}$ および $\mathcal{N}_2$ は $\mathbb{R}^5$ の非有界な領域であるが, $\mathcal{J}$ は $\mathbb{R}^3$ の有界な領域であることに注意したい.

数式処理ソフト, 例えば, *Mathematica* を利用して計算すると,

$$\varepsilon_2(\rho) = \frac{\varepsilon_2^{(1)}(n, y, \hat{\mathbf{w}})}{\varepsilon_2^{(2)}(y, \hat{\mathbf{w}})}$$

は

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^{(1)}(n, y, \hat{\mathbf{w}}) &= 6\varepsilon_2^{(1,0)}(y, \hat{\mathbf{w}}) + 3\varepsilon_2^{(1,1)}(y, \hat{\mathbf{w}})(n-2) + \varepsilon_2^{(1,2)}(y, \hat{\mathbf{w}})(n-2)^2, \\ \varepsilon_2^{(2)}(y, \hat{\mathbf{w}}) &= 12\hat{z}^2(\hat{w}\hat{z} + 2\omega y - \omega y^2)(\hat{w}\hat{z} + 5\omega y - 4\omega y^2) \end{aligned}$$

と表される. ここで, $\varepsilon_2^{(1,j)}(y, \hat{\mathbf{w}})$ は非常に複雑であり, その詳細は付録に示す. $(\varepsilon, \mathbf{w}) = (1, \mathbf{e})$ のまわりでの分岐構造を理解するためには, 与えられた $\rho \in \mathcal{N}$ に対して, $\varepsilon_2(\rho)$ の正確な値は求められなくても, その符号を知ることが重要である.

3.6 分岐方向の数値的検証

ここでは, コンピュータを用いて, $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して $\varepsilon_2(\rho)$ の符号を数値的に検証する方法について考えよう.

コンピュータ内部では, 数値は有限桁の 2 進数として表現されているため, 例えば, 10 進数 0.1 の 2 進数表現は循環小数 $0.0001100_{(2)}$ であるから, コンピュータではその値を正確に表現することができない. そこで,

$$0.0001100_{(2)} \leq 0.0001100_{(2)} \leq 0.0001101_{(2)}$$

であるから, 実数 $0.0001100_{(2)}$ を, それを含む区間 $[0.0001100_{(2)}, 0.0001101_{(2)}]$ で扱うと, 区間から実数を特定することはできないが, 実数の値の評価は可能となる.

実数 α および区間 $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ が与えられたとき, 区間演算

$$\text{スカラーとの和差: } \alpha \pm [a_1, b_1] = [\alpha \pm a_1, \alpha \pm b_1],$$

$$\text{積: } \alpha \cdot [a_1, b_1] = [\min(\alpha a_1, \alpha b_1), \max(\alpha a_1, \alpha b_1)],$$

$$\text{区間と区間の和: } [a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2],$$

$$\text{差: } [a_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2],$$

$$\text{積: } [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_3, b_3],$$

$$a_3 = \min(a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2),$$

$$b_3 = \max(a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2)$$

を定義すると, 演算子 $\circ \in \{+, -, \cdot\}$ に対して,

$$\alpha \in \mathbf{R}, c \in [a, b] \implies \alpha \circ c \in \alpha \circ [a, b]$$

$$c_1 \in [a_1, b_1], c_2 \in [a_2, b_2] \implies c_1 \circ c_2 \in [a_1, b_1] \circ [a_2, b_2]$$

が成り立つ. 区間演算を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ に関する多項式 $P(\mathbf{x})$ の評価に用いると,

$$p([a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k]) < 0 \implies p(\mathbf{x}) < 0 \quad (\mathbf{x} \in R)$$

となる. ここで, $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$ である.

例えば, $p(x) = x^2 - 2x + 1.1$, $I = [0.8, 0.9]$ とする. 明らかに, すべての $x \in I$ に対して $p(x) > 0$ である. $I \cdot I = [0.64, 0.81]$, $2 \cdot I = [1.6, 1.8]$ であるから,

$$\begin{aligned} p(I) &= I \cdot I - 2I + 1.1 = [0.64, 0.81] - [1.6, 1.8] + 1.1 \\ &= [-1.16, -0.79] + 1.1 = [-0.06, 0.31] \end{aligned}$$

となる. これでは, すべての $x \in I$ に対して $p(x) > 0$ が成り立つことを示せていない. そこで, $J = [0.0, 0.1]$, $x = 0.8 + y$ とおくと, $I = 0.8 + J$ であり,

$$p(0.8 + y) = y^2 - 0.4y + 0.14, \quad J \cdot J = [0.0, 0.01], \quad 0.4 \cdot J = [0.0, 0.04]$$

となるので,

$$p(I) = J \cdot J - 0.4 \cdot J + 0.14 = [0.0, 0.01] - [0.0, 0.04] + 0.14 = [0.10, 0.15]$$

が得られ, すべての $x \in I$ に対して $p(x) > 0$ であることが示せる. このことは, 区間演算で多項式を評価する際には, 評価する区間の両端点が原点に近い方が評価がよくなることを示している.

Mathematica に組み込まれている区間演算機能を用いて, $(y, \hat{\mathbf{w}}) \in \mathcal{J}$ に対して

$$\varepsilon_2^{(1,j)}(y, \hat{\mathbf{w}}) < 0 \quad (j = 0, 1, 2), \quad \varepsilon_2^{(2)}(y, \hat{\mathbf{w}}) > 0$$

が成り立つことを数値的に検証できる. したがって,

すべての $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して $\varepsilon_2(\rho) < 0$ である。

分岐理論から、各 $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して、分岐点 $(\varepsilon, \mathbf{w}) = (1/k^2, \mathbf{e})$ の近傍で、分岐解は

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{e} + \nu \Phi_k(x) + O(\nu^2) \quad (\nu \rightarrow 0)$$

と表され、連続的な枝に関して $\ell(\mathbf{u})$ は定数であるから、すべての k, j ($k \neq j$) に対して $\mathcal{C}_k(\rho) \cap \mathcal{C}_j(\rho) = \emptyset$ である。つまり、各 $\rho \in \mathcal{N}_2$, $k \in \mathbf{N}$ に対して $\mathcal{C}_k(\rho)$ は $\{0\} \times X$ に到達しなければならないことになる。したがって、 $p_-(\rho) = \inf \mathcal{P}(\rho)$, $p_+(\rho) = \sup \mathcal{P}(\rho)$ とおくと、すべての $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して、

$$\lim_{p \rightarrow p_{\pm}(\rho)} \hat{\varepsilon}(p, \rho) = 0$$

が成り立つ。

3.7

$$\mathbf{p} = {}^t(p, q) \in \mathbf{C}$$

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon D \mathbf{w}'' + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}), & x > 0, \\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{p}, & \mathbf{w}'(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$\psi(x, \mathbf{p}, \varepsilon, \rho) = {}^t(\psi^w, \psi^z)(x, \mathbf{p}, \varepsilon, \rho)$ $D\psi(x, \mathbf{p}, \varepsilon, \rho)$ ($x, \mathbf{p}, \varepsilon, \rho$) ImiCHenry [2] Corollary 3.4.6 Q) $DC\psi'(\pi, \mathbf{p}, \varepsilon, \rho) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{p}, \varepsilon, \rho$) $C\psi(x, \mathbf{p}, \varepsilon, \rho)$ (3.8) D

$$\mathbf{w}(x) = {}^t(w, z)(x) \quad \varepsilon > 0 \quad (3.8) \text{ IC}$$

$$\mathbf{w}(x) = \psi(x, \mathbf{w}(0), \varepsilon, \rho)$$

$$\mathbf{C}2 \times 2 \text{ s } \psi_{\mathbf{p}}(x, \mathbf{w}(0), \varepsilon, \rho)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L} \mathbf{W} \equiv \varepsilon D \mathbf{W}'' + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}(x)) \mathbf{W} = \mathbf{0}, & x > 0, \\ \mathbf{W}(0) = I_2, & \mathbf{W}'(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$D\mathbf{W}(x) (= {}^t(W, Z)(x)) = \psi_{\mathbf{p}}(x, \mathbf{w}(0), \varepsilon, \rho) \mathbf{e}_1 \text{ D}$$

$$\mathbf{W}(0) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{W}'(0) = \mathbf{0}, \quad \varepsilon d_v Z''(0) = -\hat{g}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}(0)) > 0$$

$$\mathbf{C} \ x \in (0, x_2) \ W(x) > 0, \ Z(x) > 0 \ x_2 \in (0, \pi] \ D\mathbf{W}(x_2) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{x_2} [\mathcal{L} \mathbf{W}(x)]_1 w(x) dx = \varepsilon d_u W'(x_2) w(x_2) \\ &\quad + \int_0^{x_2} \left(\hat{f}_w^0(\mathbf{w}(x)) W(x) + \hat{f}_z^0(\mathbf{w}(x)) Z(x) \right) w(x)^2 dx < 0 \end{aligned}$$

$$CZ(x_2) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{x_2} [\mathcal{L} \mathbf{W}(x)]_2 z(x) dx = \varepsilon d_v Z'(x_2) z(x_2) \\ &\quad + \int_0^{x_2} (\hat{g}_w^0(\mathbf{w}(x)) W(x) + \hat{g}_z^0(\mathbf{w}(x)) Z(x)) z(x)^2 dx < 0 \end{aligned}$$

$$CDCx_2 = \pi, W(\pi) > 0, Z(\pi) > 0 \text{ D } x_2 = \pi \text{ C } W'(\pi) > 0, Z'(\pi) > 0 \text{ DC } \psi'_p(\pi, \mathbf{w}(0), \varepsilon, \rho) \mathbf{e}_1 \\ \text{evfDl } \psi'_p(\pi, \mathbf{w}(0), \varepsilon, \rho) \mathbf{e}_2 \text{ evfC}$$

$$\psi'_p(\pi, \mathbf{w}(0), \varepsilon, \rho) \text{ vfd}$$

$$C\psi'_p(\pi, \mathbf{w}(0), \varepsilon, \rho) \text{ Ll } 0 \text{ CPD}$$

3.8 $E_1(\rho)$ の構造

$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(p, \rho)$ において, $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{w}}(x, p, \rho)$ のまわりで線形化した (3.8) の線形化作用素を

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{W}, p, \rho) = \hat{\varepsilon}(p, \rho) D \mathbf{W}'' + \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{w}}(x, p, \rho)) \mathbf{W}$$

とし, $\hat{\mathcal{L}}(\cdot, p, \rho)$ の固有値を $\lambda_j(p, \rho)$ ($j \in \mathbf{N}$) とする. 一般性を失うことなく, 各 j に対して $\text{Re } \lambda_j(p, \rho) \geq \text{Re } \lambda_{j+1}(p, \rho)$ がみたされるとしてよい. ここで,

$$\Psi(p, \rho) = \psi'_p(\pi, \hat{\mathbf{w}}(0, p, \rho), \hat{\varepsilon}(p, \rho), \rho)$$

とおくと, 明らかに, 各 $\rho \in \mathcal{N}_2$, $p \in \mathcal{P}(\rho)$ に対して, $\det \Psi(p, \rho) = 0$ であることと, $\lambda_j(p, \rho) = 0$ をみたす $j \in \mathbf{N}$ が存在することは同値である. 次は, $\det \Psi(p, \rho)$ に関する結果である ([3]).

すべての $\rho \in \hat{\mathcal{N}}_2 \equiv \{\rho \in \mathcal{N}_2 \mid n = 2, b = c, d_u = d_v\}$, $p \in \mathcal{P}(\rho) \setminus \{1\}$ に対して $\det \Psi(p, \rho) \neq 0$ がみたされる.

以下では, $E_1(\rho)$ の構造について調べるが, 概略しか述べていないので, その詳細については [4] を参照してほしい.

分岐方向の計算と陰関数定理より, 最大に拡張された集合

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\rho \in \mathcal{N}} (\varepsilon_-(\rho), 1) \times \{\rho\}$$

と $\mathcal{G}$ 上で定義された C^1 級の関数 $\hat{\mathbf{w}}_-(\cdot, \varepsilon, \rho) = {}^t(\hat{w}_-, \hat{z}_-)(\cdot, \varepsilon, \rho)$ が存在して, (i) すべての $(\varepsilon, \rho) \in \mathcal{G}$ に対して, $\hat{\mathbf{w}}_-(x, \varepsilon, \rho)$ は $\ell(\mathbf{w}) = 1$ のもとでの (3.8) の正値解であり, (ii) 各 $\nu < 0$, $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して $\hat{\mathbf{w}}_-(\cdot, \tilde{\varepsilon}(\nu, \rho), \rho) = \hat{\mathbf{w}}(\cdot, \nu, \rho)$ がみたされる. 各 $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して

$$\hat{w}_-(0, \tilde{\varepsilon}(\nu, \rho), \rho) = 1 + n(1 - \hat{w})\nu + o(|\nu|^2) < 1 \quad (\nu \rightarrow 0)$$

であることと、評価式 (3.2), (3.3) より,

$$\begin{aligned} \text{すべての } (\varepsilon, \rho) \in \mathcal{G} \text{ に対して} & \quad \hat{\mathbf{w}}_-(0, \varepsilon, \rho) \prec \mathbf{e} \prec \hat{\mathbf{w}}_-(\pi, \varepsilon, \rho), \\ \text{すべての } (x, \varepsilon, \rho) \in (0, \pi) \times \mathcal{G} \text{ に対して} & \quad \hat{\mathbf{w}}_-(x, \varepsilon, \rho) \in \mathcal{R}, \quad \hat{\mathbf{w}}'_-(x, \varepsilon, \rho) \succ \mathbf{0} \end{aligned}$$

が得られる.

$\rho \in \hat{\mathcal{N}}_2$ のとき $\varepsilon_-(\rho) > 0$ が成り立つと仮定する. 比較定理とアスコリ・アルツェラの定理より, ある $\hat{\mathbf{w}}_0(x)$ が存在し, $\hat{\mathbf{w}}_0(x)$ は $\varepsilon = \varepsilon_-(\rho)$ に対する (3.8) の解であり, 区間 $[0, \pi]$ 上で

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_-(\rho)} \hat{\mathbf{w}}_-(x, \varepsilon, \rho) = \hat{\mathbf{w}}_0(x) \in \mathcal{R}$$

をみたす.

$$\hat{\mathbf{w}}_0(x) = \hat{\mathbf{w}}(x, [\hat{\mathbf{w}}_0(0)]_1, \rho), \quad \varepsilon_-(\rho) = \hat{\varepsilon}([\hat{\mathbf{w}}_0(0)]_1, \rho)$$

であることと, 陰関数定理より, $(\varepsilon_-(\rho), \rho) \in \text{Int } \mathcal{G}$ となり, 矛盾である. ゆえに, $\rho \in \hat{\mathcal{N}}_2$ ならば $\varepsilon_-(\rho) = 0$ である. 上の議論を見直すと, 各 $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して, すべての $p \in (p_-(\rho), 1)$ に対して $\det \Psi(p, \rho) \neq 0$ が成り立てば, $\varepsilon_-(\rho) = 0$ がみたされることになる. ここで, $\varepsilon_-(\rho) = 0$ をみたす $\rho \in \mathcal{N}_2$ の集合を $\mathcal{O}$ とし, $\hat{\mathcal{N}}$ を含む $\mathcal{O}$ の最大に延長された連結集合を $\mathcal{O}_0$ とすると, $\hat{\mathcal{N}} \subset \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{N}_2$ である.

$\rho \in \mathcal{O}_0$ を任意にとる. すべての $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\hat{w}_-(0, \varepsilon, \rho) \in (p_-(\rho), 1), \quad \hat{\varepsilon}(\hat{w}_-(0, \varepsilon, \rho), \rho) = \varepsilon$$

が成り立つ. また, $u(0)$ に関する一意性より, $\hat{w}_-(0, \varepsilon, \rho)$ は ε に関して単射である. $\hat{\varepsilon}(p, \rho)$ はすべての $p \in \mathcal{P}(\rho)$ に対して正であり,

$$\lim_{p \rightarrow p_-(\rho)} \hat{\varepsilon}(p, \rho) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow 1} \hat{\varepsilon}(p, \rho) = 1$$

をみたすので,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{w}_-(0, \varepsilon, \rho) = p_-(\rho), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \hat{w}_-(0, \varepsilon, \rho) = 1$$

が得られる, つまり, $\hat{w}_-(0, \varepsilon, \rho) : (0, 1) \rightarrow (p_-(\rho), 1)$ は ε に関して全単射である. $\hat{\varepsilon}(p, \rho) : (p_-(\rho), 1) \rightarrow (0, 1)$ は p に関して連続な全単射であるから,

各 $\rho \in \mathcal{O}_0$ に対して, $\hat{\varepsilon}(p, \rho)$ は p に関して狭義の単調増加である.

$\partial \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{N}_2 \neq \emptyset$ と仮定し, $\rho_0 \in \partial \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{N}_2$ を任意にとる. $\hat{\varepsilon}(p, \rho_0) : (p_-(\rho_0), 1) \rightarrow (0, 1)$ は p に関して非減少であり, 分岐方向の計算から, $p = 1$ の近傍で狭義単調増加である. $\hat{\varepsilon}(p, \rho_0)$ は p に関して連続であるから,

$$\hat{\mathcal{P}}(\varepsilon) = \{p \in (p_-(\rho_0), 1) \mid \hat{\varepsilon}(p, \rho_0) = \varepsilon\}$$

は, すべての $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して区間 $(p_-(\rho_0), 1)$ の閉部分集合であり, $\varepsilon = 1$ の近傍で $\hat{\mathcal{P}}(\varepsilon)$ は唯一つの要素からなることがわかる. $\inf \hat{\mathcal{P}}(\varepsilon_3) < \sup \hat{\mathcal{P}}(\varepsilon_3)$ をみたす $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ が存在する場合を考えよう. $\Psi(p, \rho)$ のすべての要素が正であることと, $\psi(x, \mathbf{p}, \varepsilon, \rho)$ の解

析性より, $\hat{p}(\varepsilon_3) = (p_-(\rho_0), 1)$ となる. $\lim_{p \rightarrow 1} \hat{\varepsilon}(p, \rho_0) = 1$ より, $\varepsilon_3 = 1$ となり, 矛盾である. したがって, すべての $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して $\hat{p}(\varepsilon)$ は唯一つの要素からなるので,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{p}(\varepsilon) = p_-(\rho_0), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \hat{p}(\varepsilon) = 1$$

をみたす $\hat{\varepsilon}(p, \rho_0)$ の逆関数 $\hat{p}(\varepsilon) : (0, 1) \rightarrow (p_-(\rho_0), 1)$ が存在する. $\hat{\mathbf{v}}(x, \varepsilon) = \hat{\mathbf{w}}(x, \hat{p}(\varepsilon), \rho_0)$, $S = \{\varepsilon \in (0, 1) \mid \det \Psi(\hat{p}(\varepsilon), \rho_0) = 0\}$ とおく. Rabinowitz [7] の Theorem 1.3 と, すべての ε に対して $\Psi(\hat{p}(\varepsilon), \rho_0)$ の各要素が正であることから, $S \neq \emptyset$ であるならば, すべての $\varepsilon \in S$ に対して (3.8) の非定数正值解が $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{v}}(x, \varepsilon)$ から分岐することになり, これは, $u(0)$ に関する一意性に矛盾する. したがって, $S = \emptyset$ でなければならないので, $\varepsilon_-(\rho_0) = 0$ である. 以上の議論を見直すと, すべての $(\varepsilon, \rho) \in \mathcal{G}$ に対して $\det \Psi([\hat{\mathbf{w}}(0, \varepsilon, \rho)]_1, \rho) \neq 0$ である. 陰関数定理より, $\rho_0 \in \text{Int } \mathcal{O}_0$ となり, ρ_0 の取り方に矛盾する. ゆえに, $\mathcal{O}_0 = \mathcal{N}_2$ であり, $\mathcal{G} = (0, 1) \times \mathcal{N}_2$ が成り立つ.

$\hat{\mathbf{w}}_+(x, \varepsilon, \rho) = \hat{\mathbf{w}}_-(\pi - x, \varepsilon, \rho)$ とおくと, $\hat{\mathbf{w}}_+(x, \varepsilon, \rho)$ は $(\varepsilon, \rho) \in \mathcal{G}$ に対する (3.8) の正值解であり,

$$\begin{aligned} \text{すべての } (\varepsilon, \rho) \in \mathcal{G} \text{ に対して} & \quad \hat{\mathbf{w}}_+(0, \varepsilon, \rho) \succ \mathbf{e} \succ \hat{\mathbf{w}}_+(\pi, \varepsilon, \rho), \\ \text{すべての } (x, \varepsilon, \rho) \in (0, \pi) \times \mathcal{G} \text{ に対して} & \quad \hat{\mathbf{w}}'_+(x, \varepsilon, \rho) \prec 0 \end{aligned}$$

をみたす. 定義より, すべての $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して

$$\{(\varepsilon, \hat{\mathbf{w}}_{\pm}(\cdot, \varepsilon, \rho)) \mid \varepsilon \in (0, 1)\} \subset \hat{E}_1(\rho) \equiv \{(\varepsilon, \mathbf{w}(\cdot)) \mid (\varepsilon, T \mathbf{w}(\cdot)) \in E_1(\rho)\}$$

である. ここで, $T = \text{diag}(\hat{u}, \hat{v})$ である.

$\rho \in \mathcal{N}_2$ および $(\varepsilon_0, \mathbf{w}_0(\cdot)) \in \hat{E}_1(\rho)$ を任意にとる. 明らかに, $\mathbf{w}_0(x) = \hat{\mathbf{w}}(x, [\mathbf{w}_0(0)]_1, \rho)$, $\varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}([\mathbf{w}_0(0)]_1, \rho)$ であり, $[\mathbf{w}_0(0)]_1 \in (p_-(\rho), 1)$ または $[\mathbf{w}_0(\pi)]_1 \in (p_-(\rho), 1)$ がみたされる. 最初に, $[\mathbf{w}_0(0)]_1 \in (p_-(\rho), 1)$ の場合を考える. すべての $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して, 区間 $[0, \pi]$ 上で $\hat{\mathbf{w}}(x, (\hat{\varepsilon}(\cdot, \rho))^{-1}(\varepsilon), \rho) = \hat{\mathbf{w}}_-(x, \varepsilon, \rho)$ が成り立つので, $\mathbf{w}_0(\cdot) = \hat{\mathbf{w}}_-(\cdot, \varepsilon_0, \rho)$ である. ただし, $(\hat{\varepsilon}(\cdot, \rho))^{-1}(\varepsilon)$ は p に関する $\hat{\varepsilon}(p, \rho)$ の逆関数である. 次に, $[\mathbf{w}_0(\pi)]_1 \in (p_-(\rho), 1)$ の場合を考えよう. $\mathbf{w}_0(\pi - x)$ は $\ell(\mathbf{w}) = 1$ をみたす $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ に対する (3.8) の正值解であるから, すべての $x \in [0, \pi]$ に対して $\mathbf{w}_0(\pi - x) = \hat{\mathbf{w}}_-(x, \varepsilon_0, \rho)$ である. したがって,

$$\mathbf{w}_0(\cdot) = \begin{cases} \hat{\mathbf{w}}_-(\cdot, \varepsilon_0, \rho) & ([\mathbf{w}_0(0)]_1 < 1), \\ \hat{\mathbf{w}}_+(\cdot, \varepsilon_0, \rho) & ([\mathbf{w}_0(0)]_1 > 1) \end{cases}$$

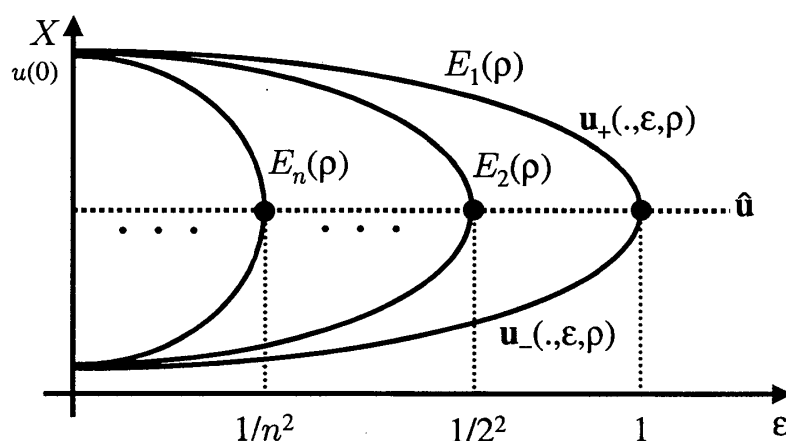
であり, $\hat{E}_1(\rho) = \{(\varepsilon, \hat{\mathbf{w}}_{\pm}(\cdot, \varepsilon, \rho)) \mid \varepsilon \in (0, 1)\}$ となる. したがって, 各 $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して,

$$E_1(\rho) = \{(\varepsilon, \mathbf{u}_{\pm}(\cdot, \varepsilon, \rho)) \mid \varepsilon \in (0, 1)\}$$

と表現される. ここで, $\mathbf{u}_{\pm}(\cdot, \varepsilon, \rho) = T \hat{\mathbf{w}}_{\pm}(\cdot, \varepsilon, \rho)$ である.

4 いくつかの課題

これまでの議論をまとめると, ε に関する (3.1) の正值解の大域的な分岐構造は, (2.1) の解のそれと類似していることがわかる (図 12). 各 $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対して (3.1) の正值解の

図 12: $\rho \in \mathcal{N}_2$ に対する大域的な分岐構造

二次分岐は起きないことを示したが, $\rho \in \mathcal{N}$ かつ $1 < n < 2$ の場合には, 図 9 に示されるように, 数値計算ではサドル・ノード型の二次分岐が起こっている. このような二次分岐がどのような場合に起こる可能性があるのかを理論的に特定する必要がある.

また, Kishimoto-Weinberger [5] の結果から, ここで得られた (3.1) のすべての非定数正値解は (1.1) の不安定な定常解であることがわかる. これまでの議論では, (1.1) の定常解に関する分岐構造を調べているだけであり, Hopf 分岐に関する情報は得られていない. このため, $t \rightarrow +\infty$ のとき (1.1) の解の時間大域的な漸近挙動については未解決の部分が多くある.

生物は 2 次元平面上または 3 次元空間内で生活を営んでいることを考えると, 生物の住処を 1 次元の区間 $(0, \pi)$ から高次元空間内の有界な領域へと一般化する必要がある. このような一般化に関して, 例えば, 領域を円盤とし, 軸対称性をもつ解に制限をした最も単純な場合でも, どのような種類の正値解が存在するのかがわかっていないので, 未解決問題として残されている.

定数解 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ から分岐する分岐解の分岐方向の決定が, 大域的な分岐構造を理解する上で重要である. ここでは, 分岐方向を決定するために, 数値的な検証方法を用いているが, 検証のために, 現在の標準的なパソコンで 1 日程度の時間が必要である. Shigesada-Kawasaki-Teramoto によって提案された競争系の解析が目標であるから, ここで用いた $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ よりもさらに複雑な非線形性を扱う必要があり, 分岐方向の検証に現在以上の計算時間が必要となることが予想される. このことから, 数値的な検証方法の開発・改善も今後の課題となる.

参考文献

- [1] N. Chafee and E. F. Infante, *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type*, *Applicable Anal.* 4 (1974/75), pp. 17–37.
- [2] J. K. Hale, "Asymptotic behavior of dissipative systems", American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

- [3] Y. Kan-on, *Global bifurcation structure of stationary solutions for a Lotka-Volterra competition model*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (2002), pp. 147–162.
- [4] Y. Kan-on, *Global bifurcation structure of positive stationary solutions for a classical Lotka-Volterra competition model with diffusion*, Japan J. Indust. Appl. Math. **20** (2003), pp. 285–310.
- [5] K. Kishimoto and H. F. Weinberger, *The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domain*, J. Differential Equations **58** (1985), pp. 15–21.
- [6] M. H. Protter and H. F. Weinberger, "Maximum principles in differential equations", Springer-Verlag, New York, 1984.
- [7] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analysis **7** (1971), pp. 487–513.
- [8] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Spatial segregation of interacting species*, J. Theoret. Biol. **79** (1979), pp. 83–99.

付録

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2^{(1,0)}(y, \hat{w}) = & -4(1 - \hat{w} - \hat{z} - 2\hat{w}\hat{z})\omega^3 y^6 + (12 - 24\hat{w} + 12\hat{w}^2 - 8\hat{z} - 43\hat{w}\hat{z} \\
 & + 51\hat{w}^2\hat{z} - 4\hat{z}^2 + 67\hat{w}\hat{z}^2)\omega^2 y^5 - (8 - 24\hat{w} + 24\hat{w}^2 - 8\hat{w}^3 + 6\hat{z} - 104\hat{w}\hat{z} \\
 & + 190\hat{w}^2\hat{z} - 92\hat{w}^3\hat{z} - 44\hat{z}^2 + 258\hat{w}\hat{z}^2 - 179\hat{w}^2\hat{z}^2 - 35\hat{w}^3\hat{z}^2 + 30\hat{z}^3 \\
 & - 130\hat{w}\hat{z}^3 - 35\hat{w}^2\hat{z}^3)\omega y^4 + \hat{z}(14 - 77\hat{w} + 112\hat{w}^2 - 49\hat{w}^3 - 31\hat{z} + 121\hat{w}\hat{z} \\
 & + 11\hat{w}^2\hat{z} - 101\hat{w}^3\hat{z} + 17\hat{z}^2 - 44\hat{w}\hat{z}^2 - 123\hat{w}^2\hat{z}^2)\omega y^3 - \hat{z}^2(8 - 44\hat{w} \\
 & + 133\hat{w}^2 - 166\hat{w}^3 + 69\hat{w}^4 - 16\hat{z} + 79\hat{w}\hat{z} - 229\hat{w}^2\hat{z} + 145\hat{w}^3\hat{z} + 21\hat{w}^4\hat{z} \\
 & + 8\hat{z}^2 - 35\hat{w}\hat{z}^2 + 96\hat{w}^2\hat{z}^2 + 21\hat{w}^3\hat{z}^2)y^2 - \hat{w}\hat{z}^3(4 - 10\hat{w} + 33\hat{w}^2 - 27\hat{w}^3 \\
 & - 4\hat{z} + 10\hat{w}\hat{z} - 33\hat{w}^2\hat{z})y - 3\hat{w}^4\hat{z}^4. \\
 \varepsilon_2^{(1,1)}(y, \hat{w}) = & -4(1 - \hat{w} - \hat{z} - 2\hat{w}\hat{z})\omega^3 y^6 + (14 - 28\hat{w} + 14\hat{w}^2 - 12\hat{z} - 37\hat{w}\hat{z} \\
 & + 49\hat{w}^2\hat{z} - 2\hat{z}^2 + 65\hat{w}\hat{z}^2)\omega^2 y^5 - (10 - 30\hat{w} + 30\hat{w}^2 - 10\hat{w}^3 - 4\hat{z} - 84\hat{w}\hat{z} \\
 & + 180\hat{w}^2\hat{z} - 92\hat{w}^3\hat{z} - 30\hat{z}^2 + 240\hat{w}\hat{z}^2 - 177\hat{w}^2\hat{z}^2 - 33\hat{w}^3\hat{z}^2 + 24\hat{z}^3 \\
 & - 126\hat{w}\hat{z}^3 - 33\hat{w}^2\hat{z}^3)\omega y^4 + \hat{z}(10 - 71\hat{w} + 112\hat{w}^2 - 51\hat{w}^3 - 21\hat{z} + 115\hat{w}\hat{z} \\
 & + 5\hat{w}^2\hat{z} - 99\hat{w}^3\hat{z} + 11\hat{z}^2 - 44\hat{w}\hat{z}^2 - 117\hat{w}^2\hat{z}^2)\omega y^3 - \hat{z}^2(10 - 44\hat{w} \\
 & + 127\hat{w}^2 - 162\hat{w}^3 + 69\hat{w}^4 - 20\hat{z} + 75\hat{w}\hat{z} - 217\hat{w}^2\hat{z} + 141\hat{w}^3\hat{z} + 21\hat{w}^4\hat{z} \\
 & + 10\hat{z}^2 - 31\hat{w}\hat{z}^2 + 90\hat{w}^2\hat{z}^2 + 21\hat{w}^3\hat{z}^2)y^2 - 3\hat{w}\hat{z}^3(2 - 4\hat{w} + 11\hat{w}^2 - 9\hat{w}^3 \\
 & - 2\hat{z} + 4\hat{w}\hat{z} - 11\hat{w}^2\hat{z})y - 3\hat{w}^4\hat{z}^4. \\
 \varepsilon_2^{(1,2)}(y, \hat{w}) = & -4\omega^4 y^6 + (11 - 11\hat{w} - 11\hat{z} - 10\hat{w}\hat{z})\omega^3 y^5 - (7 - 14\hat{w} + 7\hat{w}^2 \\
 & - 18\hat{z} - 10\hat{w}\hat{z} + 28\hat{w}^2\hat{z} + 11\hat{z}^2 + 24\hat{w}\hat{z}^2 + 10\hat{w}^2\hat{z}^2)\omega^2 y^4 - 2\hat{z}(2 + 5\hat{w} \\
 & - 16\hat{w}^2 + 9\hat{w}^3 - 7\hat{z} - 7\hat{w}\hat{z} - 2\hat{w}^2\hat{z} + 16\hat{w}^3\hat{z} + 5\hat{z}^2 + 2\hat{w}\hat{z}^2 + 18\hat{w}^2\hat{z}^2)\omega y^3 \\
 & - \hat{z}^2(7 - 20\hat{w} + 42\hat{w}^2 - 52\hat{w}^3 + 23\hat{w}^4 - 14\hat{z} + 31\hat{w}\hat{z} - 69\hat{w}^2\hat{z} + 45\hat{w}^3\hat{z} \\
 & + 7\hat{w}^4\hat{z} + 7\hat{z}^2 - 11\hat{w}\hat{z}^2 + 27\hat{w}^2\hat{z}^2 + 7\hat{w}^3\hat{z}^2)y^2 - \hat{w}\hat{z}^3(3 - 5\hat{w} + 11\hat{w}^2 \\
 & - 9\hat{w}^3 - 3\hat{z} + 5\hat{w}\hat{z} - 11\hat{w}^2\hat{z})y - \hat{w}^4\hat{z}^4.
 \end{aligned}$$