

金属 Al の超音波吸収

横田 万里夫, 串 部 宏 之 (京大理)

恒 藤 敏 彦 (阪大基工)

(7月22日受理)

§ 1 序 論

近年 electronics や低温技術物質の purification の技術などの進歩にともない、金属の電子構造がだんだんわかってきたが、特に Fermi Surface の型に対しては精度の高い実験と理論的研究があいまつて漸くその実相が理解されるようになった。¹⁾ 超音波吸収も電子と超音波の相互作用のありさまを知ることによつて電子構造をしらべる有力な手段であると考えられる。磁場の存在の下では、磁場の強さによつて生ずる吸収係数の変化を観測して、電子構造が調べられているが、²⁾ 磁場がなくても吸収係数が音波の進行方向あるいは polarization の方向等を変えることによつて、どう変化するかを調べれば、電子構造に対する有力な information が得られるものと思われる。

超音波吸収の理論は Pippard をはじめ多くの人々によつて又 band 構造をとり入れても定性的な議論にとどまっている。

又実験に関しては精密なものが多くあらわれてきたので電子構造の簡単なものに対しては半定量的議論も可能になつたように思われる。そこで我々は特に物質としては金属 Al を、現象としては充分 high frequency の transverse wave の吸収を問題にする。

金属 Al はその電子構造が Harrison,⁴⁾ Segall,⁵⁾ Heine,⁶⁾ Ashcroft⁷⁾ 等により定量的に理解されはじめた物質で、多価金属としては最もよくその電子構造が理解されている。

又 transverse wave の吸収に関しては David et al. の実験で⁸⁾ Superconducting transition temperature 近くの温度範囲で電磁氣的効果からくる吸収と他の効果からくる吸収とが分離されて観測されているため、最も実際の金属の電子構造を反映している電磁氣的なもの以外からくる効

果が定量的にわかる。

勿論電子構造が直接実験に反映するためには、超音波の波長が平均自由行程より充分短くなくてはならないが David et al. の実験はほぼこの条件をみたしているのでこの実験を解析することにする。又この条件の下では、理論的な取扱いも簡単になる。

取扱う問題点は実験によつて得られている吸収の大きさが理論的に期待できるかどうかと、超音波の進行方向と polarization の方向に対する吸収係数の変化である。Al はよく知られているように free electron model でその性質が理解されているが、free electron による transverse wave の energy の吸収は電磁氣的なもの以外には生じないから free electron とその様子が殆んど異らない second zone からは殆んどその寄与はなく、主として third zone が energy の吸収にその役割を演ずる。又 Al の Fermi Surface は zone boundary に近いのでそのことが電磁氣的効果以外の部分の寄与を大きくしていると考えられる。

§ 2 Transverse な超音波と電子の相互作用

超音波と電子との相互作用による超音波の energy の緩和現象を考える場合、電子の自由行程が超音波の波長より長ければ、この相互作用を摂動として超音波の緩和時間 τ を計算してよいから吸収係数 α は次の様に与えられる。⁽⁹⁾

$$\alpha = \frac{1}{v_s \tau} = \frac{2\pi C_{\vec{q}}}{\rho v_s \omega_q} \quad (1)$$

ここで v_s は音速, ρ は mass density, ω_q と $\vec{q}$ は超音波の振動数及び波数ベクトルで $C_{\vec{q}}$ は次の形で与えられる。

$$C_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} |\vec{L}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}} \cdot \vec{e}_{\vec{q}}|^2 [f(\vec{k}) - f(\vec{k}+\vec{q})] \delta(\vec{q} \cdot \nabla E_{\vec{k}} - \hbar \omega_q) \quad (2)$$

ここで $\vec{e}_{\vec{q}}$ は超音波の偏りの方向を $f(\vec{k})$ は Fermi 分布を $E_{\vec{k}}$ は electron の energy を示す。 $\vec{L}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}}$ なるベクトルは rigid ion の仮定とある場所のポテンシャルはすべてのイオンからくるポテンシャルの和であると考えたと

$$\vec{I}_{\vec{k}\vec{k}} = (\vec{k} | \nabla \omega | \vec{k}) N \quad (3)$$

であたえられる。ここで ω は一つのイオンの effective potential であり、その値の決定は理論的には O. P. W の方法によりなされるべきものである。¹⁰⁾ 又 wave function $|\vec{k}\rangle$ は Crystal momentum $\vec{k}$ をもつた periodic pseudo potential 中の Bloch function である。

$\vec{q}$ の大きさが Fermi 半径にくらべて充分小さいから展開して $C_{\vec{q}}$ は次のようになる。

$$C_{\vec{q}} = -v_s \sum_{\vec{k}} |\vec{I}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}} \vec{e}_{\vec{q}}|^2 \frac{\partial f}{\partial E_{\vec{k}}} \delta \left(\vec{n} \frac{\nabla_{\vec{k}} E}{\hbar} - v_s \right) \quad (4)$$

ここで $\vec{n}$ は超音波の進行方向の unit vector である。ここで変数を k_x, k_y, k_z から $E_{\vec{k}}, v_z$ と $\vec{k}$ と x 軸とのなす z 方向を極軸とした方位角 φ にかえると Appendix A によつて

$$C_{\vec{q}} = \frac{v_s}{8\pi^3 \hbar} \int d\varphi |\vec{I}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}} \vec{e}_{\vec{q}}|^2 \frac{k_x^2 + k_y^2}{v_x k_x + v_y k_y} \left(\frac{\partial v_z}{\partial k_z} \right)^{-1} \quad (5)$$

で積分は $v_z = 0$ の Fermi 面上で行なう。又 v_x 等は $\frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{\vec{k}}}{\partial k_x}$ で $\vec{k}$ の方向を z にとつた。

(5) よつて $C_{\vec{q}}$ を計算するために matrix element $\vec{I}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}}$ を求める。

今 $A\ell$ の Brillouin zone の W の近くの O. P. W wave function から求める pseudo potential に対する wave function を $\varphi_{\vec{k}}$ とすると¹⁰⁾ $\varphi_{\vec{k}}$ は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{k}} = & C_{\vec{k}, \vec{k}} \psi_{\vec{k}} + C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{200}} \psi_{\vec{k}-\vec{K}_{200}} \\ & + C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{111}} \psi_{\vec{k}-\vec{K}_{111}} + C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{1-1-1}} \psi_{\vec{k}-\vec{K}_{1-1-1}} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $\vec{K}_{111}$ は $\frac{\pi}{a}(1, 1, 1)^*$ で表はせる reciprocal lattice vector で a は lattice constant である。又 $\psi_{\vec{k}}$ は momentum $\vec{k}$ の free electron wave function である。以後 Ashcroft に従つて φ は常に最も強く couple

しあう 4 つの free な状態で eq (6) のように表しうるものとする。もし $\phi_{\vec{k}}$ が唯一つの free 状態で表し得るとすると $\vec{L}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}} \vec{a}_{\vec{q}}$ は transverse wave に対しては zero となる。

wave function (6) に pseudo potential の Hamiltonian を operate し free の wave function を左からかけて積分すると次の式をうる。

$$\begin{aligned}
 (T_{\vec{k}} - \lambda) C_{\vec{k}, \vec{k}} + V_2 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{200}} + V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{111}} + V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{1-1}} &= 0 \\
 V_2 C_{\vec{k}, \vec{k}} + (T_{\vec{k}-\vec{K}_{200}} - \lambda) C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{200}} + V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{111}} + V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{1+1}} &= 0 \\
 V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}} + V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{200}} + (T_{\vec{k}-\vec{K}_{111}} - \lambda) C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{111}} + V_2 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{1-1}} &= 0 \\
 V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}} + V_1 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{200}} + V_2 C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{111}} + (T_{\vec{k}-\vec{K}_{1-1}} - \lambda) C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{1-1}} &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

ここで $T_{\vec{k}}$ は momentum $\hbar \vec{k}$ の free electron の運動エネルギーを示し V_2, V_1 は potential $w(\mathbf{r})$ のフーリエ成分で $V_2 = V(\mathbf{K}_{200})$, $V_1 = V(\mathbf{K}_{111})$ をあたえる。 λ は固有 energy で次の secular equation の解である。

$$F \equiv \begin{vmatrix} T_{\vec{k}} - \lambda & V_2 & V_1 & V_1 \\ V_2 & T_{\vec{k}-\vec{K}_{200}} - \lambda & V_1 & V_1 \\ V_1 & V_1 & T_{\vec{k}-\vec{K}_{111}} - \lambda & V_2 \\ V_1 & V_1 & V_2 & T_{\vec{k}-\vec{K}_{1-1}} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

又 $\phi_{\vec{k}}$ の normalization の条件から次の関係をうる。

$$1 + \epsilon = C_{\vec{k}, \vec{k}}^2 [1 + f_{200}^2 + f_{111}^2 + f_{1-1}^2] \tag{9}$$

但し

* (前頁) (111) 等は今後すべての結晶に固定して ξ, η, ζ 軸に対するものである。

$$f_{200} \equiv \frac{C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{200}}}{C_{\vec{k}, \vec{k}}} = \frac{T_{\vec{k}} - \lambda - V_2}{T_{\vec{k}-\vec{K}_{200}} - \lambda - V_2} \quad (10)$$

$$f_{1\pm 11} \equiv \frac{C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{K}_{1\pm 11}}}{C_{\vec{k}, \vec{k}}} = \frac{(T_{\vec{k}-\vec{K}_{1\pm 11}} - \lambda - V_2) \{ (T_{\vec{k}} - \lambda) (T_{\vec{k}-\vec{K}_{200}} - \lambda) - V_2^2 \}}{V_1 (T_{\vec{k}-\vec{K}_{111}} + T_{\vec{k}-\vec{K}_{1-1}} - 2V_2 - 2\lambda) (T_{\vec{k}-\vec{K}_{200}} - \lambda - V_2)} \quad (11)$$

ここで ϵ は $\varphi_{\vec{k}}$ が 1 には normalize されないためにあらわれたもので一般に 0.1 より小さく $A\ell$ の場合は 0.076 程度の値である。

$\varphi_{\vec{k}}$ を用いて $\vec{I}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}}$ を求めると $\vec{q}$ の大きさが小さいとして展開し、次の結果を得る。(Appendix B)

$$\begin{aligned} \vec{I}_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}} = & i C_{\vec{k}, \vec{k}}^2 \left[\vec{q} \cdot \frac{\partial f_{200}}{\partial \vec{k}} V_2 \vec{K}_{200} + \vec{q} \cdot \frac{\partial f_{111}}{\partial \vec{k}} V_1 \vec{K}_{111} + \vec{q} \cdot \frac{\partial f_{1-11}}{\partial \vec{k}} V_1 \vec{K}_{1-11} \right. \\ & + \vec{q} \cdot \left(\frac{\partial f_{111}}{\partial \vec{k}} f_{200} - \frac{\partial f_{200}}{\partial \vec{k}} f_{111} \right) V_1 \vec{K}_{-111} - \vec{q} \cdot \left(\frac{\partial f_{1-11}}{\partial \vec{k}} f_{200} - \frac{\partial f_{200}}{\partial \vec{k}} f_{1-11} \right) V_1 \vec{K}_{11-1} \\ & \left. - \vec{q} \cdot \left(\frac{\partial f_{1-11}}{\partial \vec{k}} f_{111} - \frac{\partial f_{111}}{\partial \vec{k}} f_{1-11} \right) V_2 \vec{K}_{020} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

もし λ, V_1, V_2 がわかれば $C_{\vec{k}, \vec{k}}^2, f_{200}, \frac{\partial f_{200}}{\partial \vec{k}}$ 等は (9), (10), (11) から求められる。ここでは λ は Ashcroft によつて $0.85605 R_y$ をとり V_1, V_2 も Ashcroft の値 $0.0179 R_y, 0.0562 R_y$ をとる。 V_1, V_2 は理論的な計算や実験からの解析でいろいろな値がえられているが、それは Table 1 のようになる。

	Ashcroft ⁷⁾	Harrison ⁴⁾	Heine ⁶⁾	Segall ⁵⁾
V_{111}	0.0179	0.026	0.030(W)	0.026(W)
V_{200}	0.0562	0.071	0.055(W)	0.048(W)

Table 1. 単位は R_y (W) は W の近くでの値であることを示す。

Table 1 に与えられた値はほぼ同じ値をしめしこれらの値が充分信頼性があることを示す。ここでは Ashcroft の値を用いるが V_{111} に対しては少しその値が小さすぎるように思われる。

次に eq (5) の中の v_x は secular eq. (8) を k_x で微分して $\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_x}$ からただちに求まる。又 $(\frac{\partial v_z}{\partial k_z})$ は $v_z = 0$ のところで微分であることを考慮して

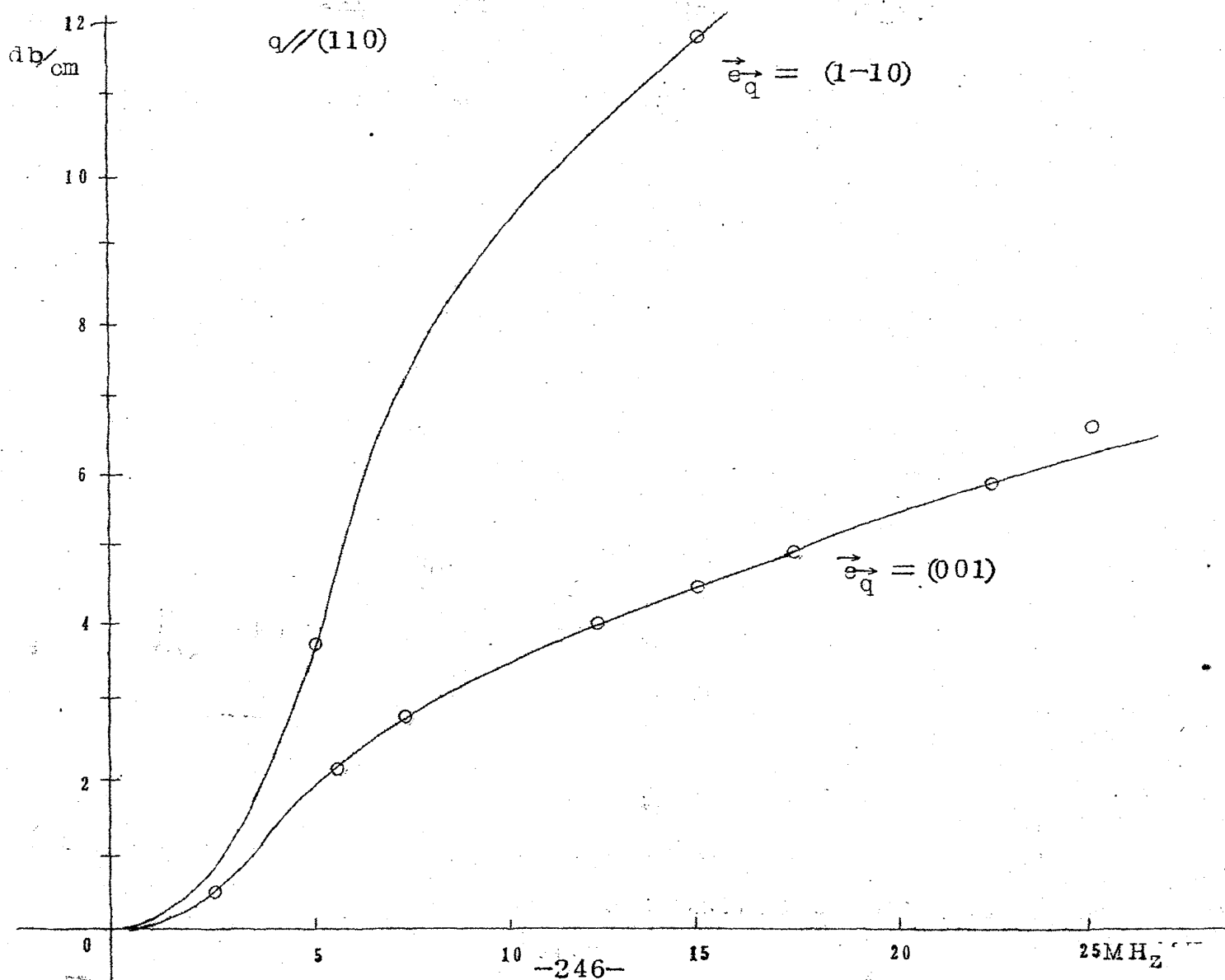
(Appendix C)

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_z^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial k_z^2}}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}} \quad (13)$$

から求めうる。以上の値を $E_k = \text{Fermi energy } v_z = 0$ の条件で求めこれを eq.(5) に入れば α の値が得られる。

§ 3 結果と考察

我々の計算値と比較すべき実験は R. David et al. のものの α_1 と表され



たもので音波の進む方向が (110) の場合を再表現したのが Fig. 1 である。我々の計算は $q\ell$ (ℓ ; mean free path) が大きい極限であるから吸収係数の絶対値ではなく、 q が大きいところでの q に或は振動数に比例する比例定数を求めたことになる。Fig. 1 では $\vec{e}_q \parallel (001)$ の場合は frequency の大きいところは frequency に linear に比例して大きくなっているからそのかたむきを我々の計算と比較できるが $\vec{e}_q \parallel (1-10)$ の場合は吸収係数がほぼ $\vec{e}_q = (001)$ のときに比例しているとして大きさを類推するより data の数が少ないので方法がない。Fig. 1 から $\vec{e}_q = (001)$ のときは吸収係数の frequency に対する gradient は $\sim 0.167 \text{ db/cm MHz}$ で $\vec{e}_q \parallel (1-10)$ に対しては $0.4 \sim 0.5 \text{ db/cm MHz}$ である。以上の実験事実の特色はまず free electron で生じえない電磁場的なもの以外からくる効果が電磁場なものと同じ程度に観測されているということと進行方向が (110) の場合 polarization の方向によつて大きく吸収変ることである。これらのことを説明する前に我々の理論によつて定性的にわかることをのべよう。

(以下の考察には Fig. 2 を参照されたし!)

まず eq. (12) から $\frac{\partial f_{200}}{\partial \vec{k}}$ 等は Z component をもたなければ interaction に寄与しないが $\vec{q} \parallel (110)$ 又 $\vec{q} \parallel (100)$ の場合 Second zone 上で $v_z = 0$ のところは Z 軸の垂直二等分面上にあり、対称性から $\frac{\partial f_{200}}{\partial \vec{k}}$ は Z component を持ちえないので Second zone は超音波吸収に寄与ない。 $q \parallel (111)$ のときは Z 軸に垂直二等分面は存在しないから原理的には second zone の寄与もありうるが second zone が殆ど free electron に近いことからこの contribution は小さいと考えられる。

third zone に関しては一般に超音波吸収に大きな contribution をしめすが $\vec{q} \parallel (100)$ の場合 x 軸に垂直な x をふくむ平面内で $v_x = v_y = 0$ になるが上に述べた考察と同じ事状で対称性から超音波吸収に contribute しない。

次に third zone のどの様な部分が大きな contribution を示すかを考えると z 軸にかたむいた Brillouin zone boundary が近くにあるときである。 z 軸に平行な boundary では $\frac{\partial f}{\partial k_z}$ が boundary にそつての微分となり f は大きな変化を示さないから $\frac{\partial f}{\partial k_z}$ は小さくなる。又 boundary が z 軸に垂直ならば (12) より polarization vector と内積をつくる reciprocal

vector $\vec{K}$ が $\vec{e}_q$ と垂直になり、contribution は zero となる。

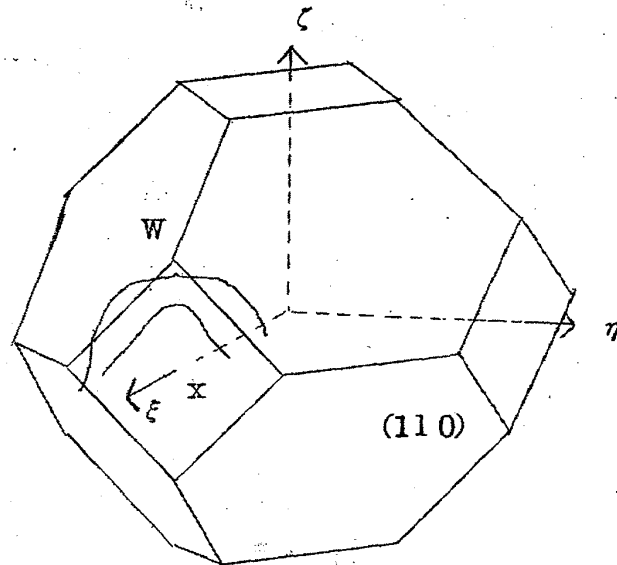


Fig. 2 Brillouin zone と $A\ell$ の 3rd zone

以上の考察から $\vec{q} \parallel (110)$ の場合 $\vec{e}_q$ の方向によつて吸収係数が何故変わるかは次の様に考えればただちにわかる。まず $v_1 \ll v_2$ であることは理論的にも table 1 からよくわかつていいることである。今 $\vec{e}_q \parallel (0, 0, 1)$ にとると (12) からわかるように $\vec{K}_{200}, \vec{K}_{020}$ 等をふくむ項は $\vec{K}$ が $\vec{e}_q$ と垂直であるからいかなる contribution もせず $\vec{K}_{002}$ だけが $\vec{e}_q$ と内積をつくつて値をもつ。しかし $\vec{K}_{002}$ に関する x をふくむ四角な zone boundary が $\vec{q}$ に垂直であるからその contribution は小さい。次に $\vec{e}_q \parallel (1\bar{1}0)$ ならば $\vec{K}_{200}, \vec{K}_{020}$ 等が $\vec{e}_q$ と内積をつくつて値をもち $\vec{K}_{200}, \vec{K}_{020}$ に関する x を含む四角な zone boundary が $\vec{q}$ に対して適当にかたむいていいるので v_2 からくる大きな interaction を生じ吸収係数が大きくなる。

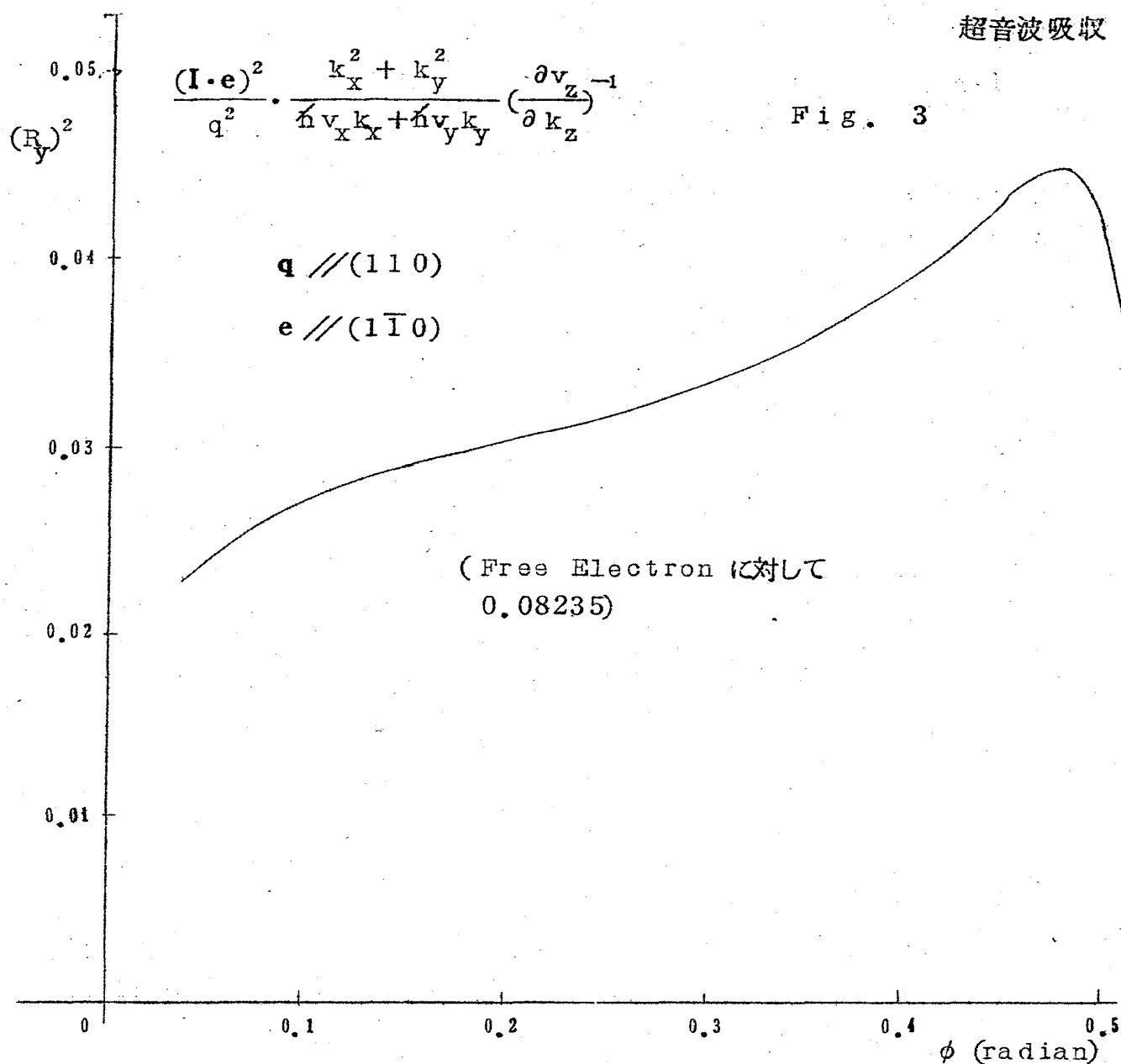
以上の考察を更に定量的にするために eq (5) の被積分函数

$$\frac{|\vec{I}_{k, k+q} \vec{e}_q|^2}{q^2} \frac{k_x^2 + k_y^2}{\hbar v_x k_x + \hbar v_y k_y} \left(\frac{\partial v_2}{\partial k_2} \right)^{-1} \text{ を } (110) \text{ を軸として、} \zeta = 0 \text{ からはかつ}$$

た角度 φ の函数として $\vec{e}_q \parallel (1\bar{1}0)$ 及び $\vec{e}_q \parallel (001)$ の場合に求めたが、Fig. 3 及び Fig. 4 である。Fermi surface 全体では同等な部分が 8 つある。

Fig. 2 でわかるように third zone は細いひも状をなしているのと同じ φ に対して二ヶ所 $v_2 = 0$ なるところがある。 $\vec{e}_q \parallel (1\bar{1}0)$ の場合は $k_\xi = \frac{2\pi}{a}$ な

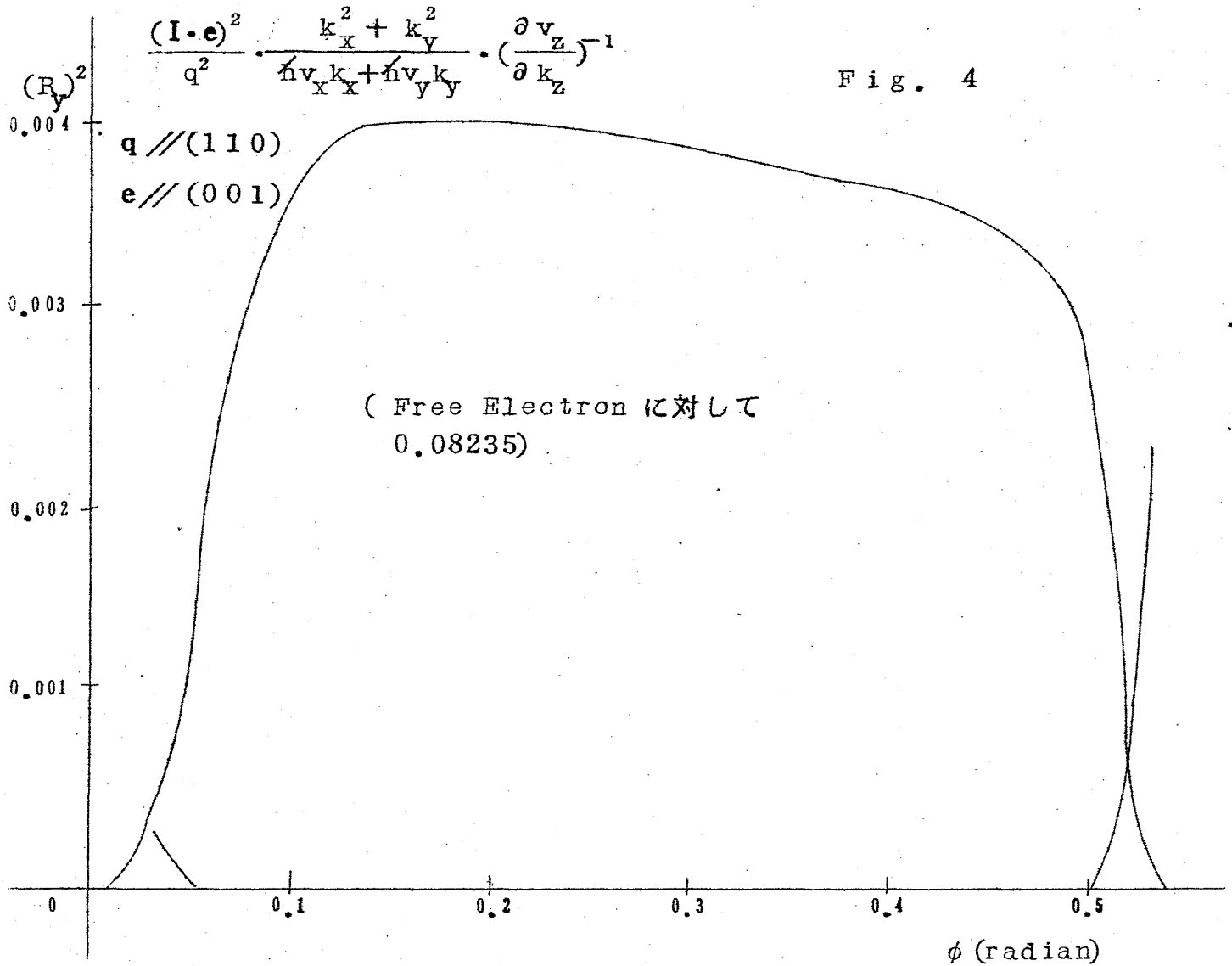
Fig. 3



る面より内側にある $v_z = 0$ のところが大きな contribution をしめし $\vec{e}_q \parallel (001)$ の場合は外側の $v_z = 0$ のところが大きな値を示す。Fig. 4 で両端に表われているのが内側からの contribution である。Fig. 3, 4 の結果と Appendix D の free electron に対する縦波の値から α を求めると Table 2 のようになる。

Table 2 $q \parallel (110)$

	Theoretical $\frac{db}{cm}$	MHz experimental
$e \parallel (1\bar{1}0)$	0.437	0.4 ~ 0.5
$e \parallel (001)$	0.0423	0.167



この結果をみてすぐわかることは $\vec{e}_q // (001)$ の場合 Theoretical な値が、
 小さすぎることである。これは Table 1 からわかるように $V_1 = 0.0179 R_y$ に
 なる値が小さすぎたためであろう。以上同様な計算を $q // (100)$ の場合に行うと
 x を含む 4 角な面がすべて q に対して垂直か又平行になるため V_2 の Contri-
 bution は殆どなく $q // (110)$ の場合の $\vec{e}_q // (001)$ と同様に小さすぎる値が得ら
 れた。又この場合 $\vec{e}_q$ の方向によつて吸収係数が殆どかわらないのは $\vec{e}_q$ の二
 乗に比例してしかも cubic な対称性をもっていることから当然である。最後
 に計算を助て下さつた秋元氏に感謝の意を表します。

Appendix A

Jacobian $\frac{\partial(k_x k_y k_z)}{\partial(E_k v_z \varphi)}$ を求めるには

$$\frac{\partial(k_x k_y k_z)}{\partial(E_k v_z \varphi)} = \left\{ \frac{\partial(E_k v_z \varphi)}{\partial(k_x k_y k_z)} \right\}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

より $\frac{\partial(E_k v_z \varphi)}{\partial(k_x k_y k_z)}$ をもとめればよい。

我々は $v_z = 0$ のところだけを問題にするのだから

$$\begin{aligned} \frac{\partial(E_k v_z \varphi)}{\partial(k_x k_y k_z)_{v_z=0}} &= \begin{vmatrix} \hbar v_x & \hbar v_y & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial k_x} & \frac{\partial v_z}{\partial k_y} & \frac{\partial v_z}{\partial k_z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial k_x} & \frac{\partial \varphi}{\partial k_y} & \frac{\partial \varphi}{\partial k_z} \end{vmatrix} \\ &= \hbar v_x \begin{vmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial k_y} & \frac{\partial v_z}{\partial k_z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial k_y} & \frac{\partial \varphi}{\partial k_z} \end{vmatrix} - \hbar v_y \begin{vmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial k_x} & \frac{\partial v_z}{\partial k_z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial k_x} & \frac{\partial \varphi}{\partial k_z} \end{vmatrix} \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi = \frac{k_y}{k_x} \text{ より } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial k_x} &= -\frac{\partial \text{of}}{k_x^2 + k_y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial k_y} &= \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial k_z} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ここからただちに次の結果をうる。

$$\frac{\partial(E_k v_z \varphi)}{\partial(k_x k_y k_z)_{v_z=0}} = -\frac{\hbar \frac{\partial v_z}{\partial k_z}}{k_x^2 + k_y^2} (v_x k_x + v_y k_y) \quad (\text{A.4})$$

Appendix B

$$\begin{aligned}
 I_{kk'} &= \int \varphi_{k'}^* \nabla w \varphi_k d\tau \\
 &= C_{\vec{k}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{k}_{200}} \int \psi_{\vec{k}}^* \nabla w \psi_{\vec{k}-\vec{k}_{200}} d\tau \\
 &+ C_{\vec{k}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{k}_{200}} \int \psi_{\vec{k}-\vec{k}_{200}}^* \nabla w \psi_{\vec{k}} d\tau \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &+ C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} C_{\vec{k}k-\vec{k}_{111}} \int \psi_{\vec{k}-\vec{k}_{200}}^* \nabla w \psi_{\vec{k}-\vec{k}_{111}} d\tau \\
 &+ C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} C_{\vec{k}'\vec{k}'-\vec{k}_{111}} \int \psi_{\vec{k}-\vec{k}_{111}}^* \nabla w \psi_{\vec{k}-\vec{k}_{200}} d\tau \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &= i\vec{k}_{200} V_2 (C_{\vec{k}, \vec{k}} C_{\vec{k}k-\vec{k}_{200}} - C_{\vec{k}, \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}}) + \\
 &+ i(\vec{k}_{111} - \vec{k}_{200}) V_1 (C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{111}} - C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{111}}) \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &= i\vec{k}_{200} V_2 (\vec{k}' - \vec{k}) (C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} \frac{\partial C_{\vec{k}, \vec{k}}}{\partial \vec{k}} - C_{\vec{k}, \vec{k}} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}}) \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &+ i\vec{k}_{111} V_1 (\vec{k}' - \vec{k}) (C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{111}} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} - C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{111}}) \\
 &+ \dots\dots\dots \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

上式の () の中を f_{200} 等をつかつて書きあらためると

$$C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}} - C_{\vec{k}, \vec{k}} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} = -C_{kk}^2 \frac{\partial f_{200}}{\partial \vec{k}} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
 &C_{\vec{k}k-\vec{k}_{111}} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} - C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{200}} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} C_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{k}_{111}} \\
 &= C_{kk}^2 (f_{111} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} f_{200} - f_{200} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} f_{111}) \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

からただちに eq (12) をうる

Appendix C

$$F \equiv \{(T_k - \lambda)(T_{k-K_{200}} - \lambda) - V_2^2\} \{(T_{k-K_{111}} - \lambda)(T_{k-K_{1-11}} - \lambda) - V_2^2\} \\ - V_1^2 (T_k + T_{k-K_{200}} - 2V_2 - 2\lambda)(T_{k-K_{111}} + T_{k-K_{1-11}} - 2V_2 - 2\lambda) \quad (C.1)$$

に於て、 λ は $F=0$ からきまる $\vec{k}$ の函数であるから

$$\frac{\partial F}{\partial k_z} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k_z} = 0. \quad (C.2)$$

我々は $\lambda_{V_z} = \frac{\partial \lambda}{\partial k_z} = 0$ のところを考えているのだから、(C.2) のもう一度 k_z で微分して $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_z^2} = 0$ とおくと

$$\frac{\partial^2 F}{\partial k_z^2} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_z^2} = 0. \quad (C.3)$$

これより

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_z^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial k_z^2}}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}} \quad (C.4)$$

をうる。

Appendix D

Free electron に対して

$$|\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}|^2 = q^2 \cdot \left(\frac{2}{3} E_F\right)^2 \quad (D.1)$$

とおくと、Eq. (5) から

$$C_q = \frac{v_s m^2 E_F^2 q^2}{9 \pi^2 \hbar^3} \quad (D.2)$$

を得る。従つて E_q (1) から吸収係数は

$$\alpha = \frac{2m^2 E_F^2 \omega_q}{9 \pi \hbar^3 \rho v_s^2} = \frac{\pi^2 N m v_F \nu}{3 \rho C_1^2} \quad (D.3)$$

横田・串部・恒藤

いま、 $\nu = 15 \text{ MHz}$ のときの吸収係数をこの式から計算すると

$$\alpha = 6.58 \text{ db/cm}$$

を得る。

REFERENCES

- 1) W.A. Harrison and M.B. Webb ed., The Fermi Surface (1960). (John Willey)
- 2) G.N. Kamm and H.V. Bohm, Phys. Rev. 131, 111 (1963)
- 3) A.B. Pippard, Proc. Roy. Soc. A257, 165 (1960); Reports on Progress in Physics, 23, 176 (1960).
M.H. Cohen, M.J. Harrison and W.A. Harrison, Phys. Rev. 117, 937 (1960).
- 4) W.A. Harrison, Phys. Rev. 116, 555 (1959); 118, 1182 (1960); 131, 2433 (1963).
- 5) B. Segall, Phys. Rev. 124, 1797 (1961).
- 6) V. Heine, Proc. Roy. Soc (Lond) A240, 340, 354 and 361 (1957)
- 7) N.W. Ashcroft, Phil. mag. 8, 2055 (1963).
- 8) R. David, H.R. Van Der Laan and N.J. Poulis, Physica 29, 357 (1963).
- 9) G. Kittel, Quantum Theory of Solids (1963).
- 10) J.C. Phillips and L. Kleinman, Phys. Rev. 116, 287 and 880 (1959)
W.A. Harrison, Phys. Rev. 129, 2503 (1963).