

Lattice graph の特徴づけ

東大 理 複 本 彦 衛

この講演では、有限でループがなく、向きのないグラフだけを考えることにします。グラフの頂点 x に対し、 x と隣接する頂点の全体を $\Delta(x)$ と書き、2 頂点 x, y の間に自然に定義される距離を $d(x, y)$ で表わすことにします。

まず、 $I = \{1, 2, \dots, t\}$ とおいて、次のようなグラフ T_r^t を考えます。

$$T_r^t = \{ J \subset I \mid |J| = r \},$$

$$J \in T_r^t \text{ に対して、 } \Delta(J) = \{ K \in T_r^t \mid |J \cap K| = r-1 \}.$$

このグラフは局所構造だけで特徴づけられています。

定理 1 (Dowling [3]). グラフ (Ω, Δ) が次の条件を満たすとする。

$$(1) \text{ すべての } x \in \Omega \text{ に対し、 } |\Delta(x)| = r(t-r).$$

$$(2) \text{ } y \in \Delta(x) \text{ ならば、 } |\Delta(x) \cap \Delta(y)| = t-2.$$

(3) $d(x, y) = 2$ なさば, $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| \leq 4$.

この時, $t > 2r(r-1) + 4$ なさば, (Ω, Δ) は T_r^t と同型になる.

この定理 1 を使うことにより, 次の定理 2 が容易に証明できます.

定理 2 (Enomoto [4]). (G, Ω) は rank $r+1$ の原始置換群で, subdegrees が $\binom{r}{i} (t-r)^i$, $0 \leq i \leq r$, とする. この時, $r \geq 6$, $t > 2r(r-1) + 4$ なさば, 長さ $r(t-r)$ の orbital を使って定義される Ω のグラフ構造は T_r^t と同型になり, G は $\text{Aut } T_r^t = \sum_t$ (t 次対称群) の $2r$ 重可移部分群になる.

この講演では, r 次元 Lattice graph L_r^t の特徴づけについて考えることにします. このグラフは,

$$I = \{1, 2, \dots, t\}.$$

$$L_r^t = I \times \dots \times I \quad (r \text{ 個の直積}).$$

$x = (x_1, \dots, x_r) \in L_r^t$ に対し, $\Delta(x) = \{(y_1, \dots, y_r) \in L_r^t \mid x_i = y_i \text{ と } r-1 \text{ 個がある}\}$,
として定義されます.

$r = 2, 3, 4$ の時には次のような特徴づけが得られています。(Aigner [1], Dowling [2], Laskar [6, 7], Shrikhande [8])

定理 3. グラフ (Ω, Δ) が次の条件を満たすとする.

- (1) $|\Omega| = t^r$.
- (2) すべての $x \in \Omega$ に対し, $|\Delta(x)| = r(t-1)$.
- (3) $y \in \Delta(x)$ ならば, $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = t-2$.
- (4) $d(x, y) = 2$ ならば, $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = 2$.

この時, t が大きければ, (Ω, Δ) は L_r^t と同型になる.

($r=2$ の時は $t > 4$, $r=3$ の時は $t > 7$, $r=4$ の時には $t > 11$).

一般に t が r に比べて十分大きければ, 定理 3 が成り立つはずだと思っていますが, 今の所証明できる見込みはありません. ここではもう少し条件を強くして, 任意の次元の *lattice graph* を特徴づけることにします.

定理 4 (Enomoto [5]). グラフ (Ω, Δ) が次の条件を満たすとする.

- (1) $|\Omega| = t^r$.

(2) すべての $x \in \Omega$ に対し、 $|\Delta(x)| = r(t-1)$.

(3) $y \in \Delta(x)$ ならば、 $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = t-2$.

(4) $d(x, y) = 2$ ならば、 $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = 2$.

(5) $d(x, y) = 2$ ならば、 $\Delta(x) \cap \Delta(y)$ の 2 頂点は隣接してゐる。

(6) 五角形が存在しない。

この時、 $t > 2$ ならば、 (Ω, Δ) は L_r^t と同型になる。

この定理を使うと、置換群に関する次の定理 5 が証明できます。

定理 5 (Enomoto [5]). (G, Ω) は rank $r+1$ の原始置換群で、subdegrees が $\binom{r}{i}(t-1)^i$, $0 \leq i \leq r$, とする。この時、 $t > 2$ ならば、長さ $r(t-1)$ の orbital を使って定義される Ω のグラフ構造は L_r^t と同型になり、 G は $\text{Aut } L_r^t = \Sigma_t \wr \Sigma_r$ (Σ_t と Σ_r の wreath 積) の部分群になる。

定理 4 において、条件 (1) 以外は局所構造に関する条件ですが、 L_r^t というグラフは定理 1 のようにその局所構造だけで特徴づけることはできません。

例えば、 H を位数 t の有限群とし、 $M_r(H)$ というグラフ

を次のように定義します。

$M_r(H) = H \times \cdots \times H / \sim$ (H の r 個の直積の、同値関係 $\sim$ による類別集合、ただし $\sim$ は

$$(a_1, \dots, a_r) \sim (b_1, \dots, b_r)$$

$\iff$ すべての i, j について $a_i^{-1}b_i = a_j^{-1}b_j$ が成り立つと定義します。)

つまり、 $(a_1, \dots, a_r)$ と $(a_1x, \dots, a_rx)$ ($x \in H$) とを同一視するわけです。 $(a_1, \dots, a_r)$ の属す class を $[a_1, \dots, a_r]$ と書くことにします。次にグラフ構造を

$$\Delta([a_1, \dots, a_r]) = \{[b_1, \dots, b_r] \in \Sigma \mid a_i^{-1}b_i, \\ 1 \leq i \leq r \text{ のうち、 } r-1 \text{ 個が一致する}\}$$

により定義します。(つまり適当な代表元をとると、 $r-1$ 個の座標が一致するとき、隣接しているわけです。)

このように定義すると、任意の頂点から半径 $\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1$ 以内のグラフ構造は L_r^t でも $M_r(H)$ でも同型になることがすぐわかります。

文 献

[1] Aigner: The uniqueness of the cubic lattice graph,
J. Combinatorial Theory 6 (1969)

[2] Dowling: Note on "A characterization of cubic lattice
graphs", J. Combinatorial Theory 5 (1968)

- [3] Dowling, A characterization of the T_m graph,
J. Combinatorial Theory 6(1969)
- [4] Enomoto, Characterization of families of finite
permutation groups by the subdegrees. I, J. Fac.
Sci. Univ. Tokyo, Sec IA 19(1972)
- [5] Enomoto, Characterization of families of finite
permutation groups by the subdegrees. II, to appear
- [6] Laskar, A characterization of cubic lattice graphs,
J. Combinatorial Theory 3(1969)
- [7] Laskar, On 4-lattice graphs, Notices of AMS
19(1972)
- [8] Shrikhande, The uniqueness of the L_2 association
scheme, Ann. Math. Statist. 30(1959)