

GL_n の ZELEVINSKI INVOLUTION について

平賀 郁

1. INTRODUCTION

G を p -進体 F 上定義された連結な簡約可能代数群とし、 $G = G(F)$ とおく。 $R(G)$ を G の有限生成な許容表現のなす圏の Grothendieck 群とし、 $\Pi(G)$ を G の既約許容表現の同値類全体のなす集合とする。いま、 G の minimal parabolic 部分群 P_0 とその Levi 部分群 M_0 を固定し、 $\mathcal{L}^G$ を G の standard Levi 部分群全体のなす集合とする。 $M \in \mathcal{L}^G$ に対し、

$$i_M^G : R(M) \longrightarrow R(G)$$

$$r_M^G : R(G) \longrightarrow R(M)$$

を、誘導表現と Jacquet functor から定義される写像とし、 $r(M)$ を M の semisimple split F -rank とする。ここでは、[2] [5] に従い、Zelevinski involution を

$$D_G = \sum_{M \in \mathcal{L}^G} (-1)^{r(M)} i_M^G \circ r_M^G$$

と定義する。このとき

$$(1.1) \quad D_G \circ D_G = id$$

$$(1.2) \quad D_G \circ i_M^G = i_M^G \circ D_M$$

となることが知られている。 $\{M\}$ を $M \in \mathcal{L}^G$ の associate Levi 部分群全体のなす集合とし、 $\pi \in \Pi(G)$ とする。 $r_M^G(\pi)$ が supercuspidal 表現の 0 でない和となっているとき、 π は type $\{M\}$ であるという。このとき、 $r(\pi) = r(M)$ とおく。 $R(G)_r \subset R(G)$ を $r(\pi) = r$ をみたす既約表現 π 全体から生成される部分群とする。 $R(G) = \bigoplus_r R(G)_r$ である。また、各 $R(G)_r$ 上の involution d_G を

$$d_G = (-1)^r D_G : R(G)_r \longrightarrow R(G)_r$$

と定める。 D_G と同様に

$$(1.3) \quad d_G \circ d_G = id$$

$$(1.4) \quad d_G \circ i_M^G = i_M^G \circ d_M$$

が成り立つ。A. M. Aubert [2] [3] により次のことが証明されている。

定理 1.1. $\pi \in \Pi(G)$ ならば、 $d_G(\pi) \in \Pi(G)$ 。また、 $G = GL_n$ ならば d_G は [8] の定義と一致する。

W_F を F の Weil 群とし、 ${}^L G$ を G の L -群とする。 $L_F = W_F \times SU_2(\mathbb{C})$ とおき、

$$\psi : L_F \times SL_2(\mathbb{C}) = W_F \times SU_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$$

を Arthur parameter とする ([1] 参照)。 SU_2 と SL_2 は $\mathbb{C}$ 上同型であるが、 L_F の因子と Arthur parameter を定義する因子を区別する為に、ここでは使い分けることにする。J. Arthur [1] に従い、 $\Pi_\psi(G)$ を conjectural な A -packet とする。我々は、 $d(\psi)$ を

$$d(\psi)(w \times t \times u) = \psi(w \times u \times t), \quad w \in W_F, t, u \in SL_2(\mathbb{C}) = SU_2(\mathbb{C})$$

により定める。 $d(\psi)$ も Arthur parameter である。このとき、次のことが予想される。

予想 1.2.

$$\Pi_{d(\psi)}(G) = d_G(\Pi_\psi(G))。$$

$G = GL_n$ のときは、この予想は実質的に C. Moeglin と J.-L. Waldspurger [6] により証明されている。以下では、[6] と、予想 1.2 について解説する。

2. MULTISEGMENT

この節では multisegment について復習する。 $X = \mathbb{Z}$ とおく。

$$\Delta = \{b, b+1, \dots, e-1, e\} \subset X$$

を segment とし、

$$b(\Delta) = b$$

$$e(\Delta) = e$$

とする。また、 S を segment 全体のなす集合とする。いま、 S を集合とすると、 S の有限な multiset とは、写像

$$a : S \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

で support が有限なもののことである。このとき、 $a(s)$ を $s \in S$ の重複度とよび、集合のときと同様に

$$|a| = \sum_{s \in S} a(s)$$

とする。また、写像

$$\lambda : \{1, 2, \dots, |a|\} \longrightarrow S$$

で $|\lambda^{-1}(s)| = a(s)$ をみたすものを a の順序と呼ぶ。 S の有限な multiset a を multisegment と呼ぶ。順序 λ を考えるときは、 $\Delta_i = \lambda(i)$ において、

$$a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_{|a|}\}$$

と書くことにする。また、 X の multiset $s(a)$ (a の support) を

$$s(a)(x) = \sum_{\substack{\Delta \in S \\ x \in \Delta}} a(\Delta)$$

により定める。 $\mathcal{M}$ を multisegment 全体のなす集合とする。

$\Delta_1, \Delta_2 \in S$ を segment とする。このとき、 Δ_1 が Δ_2 に先行する (precede) とは、 Δ_1 と Δ_2 が条件

$$b(\Delta_1) + 1 \leq b(\Delta_2) \leq e(\Delta_1) + 1 \leq e(\Delta_2)$$

をみたすことである。($\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ と書く。) $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ か $\Delta_2 \rightarrow \Delta_1$ が成り立っているとき、 Δ_1 と Δ_2 は連結している (linked) という。 $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$ とし、 $\Delta_i, \Delta_j \in a$ が連結しているとする。このとき、 a のなかの Δ_i, Δ_j を $\Delta_i \cup \Delta_j, \Delta_i \cap \Delta_j$ でとりかえる操作、つまり a から、

$$a' = (a \setminus \{\Delta_i, \Delta_j\}) \cup \{\Delta_i \cup \Delta_j, \Delta_i \cap \Delta_j\}$$

をつくる操作を elementary operation と呼ぶ。(但し、 $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ のときは、 $\Delta_i \cup \Delta_j$ のみを付け加えることにする。)

我々は、[6] に従い、 $\Delta_1, \Delta_2 \in S$ が「 $b(\Delta_1) > b(\Delta_2)$ 」または、「 $b(\Delta_1) = b(\Delta_2)$ かつ $e(\Delta_1) \geq e(\Delta_2)$ 」をみたすとき、

$$\Delta_1 \geq \Delta_2$$

と書き、これにより S に順序をいれておく。以後 $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$ の順序は $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \geq \Delta_t$ が成り立つようにいれておくことにする。また、 $\mathcal{M}$ に辞書式に順序をいれておく。つまり $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\}$ と $b = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'}\}$ が $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_{i-1} = \Delta'_{i-1}, \Delta_i > \Delta'_i$ をみたせば、 $a > b$ である。($\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_{t'} = \Delta'_{t'}, t > t'$ の場合も $a > b$ とする。) いま、 $a' \in \mathcal{M}$ が $a \in \mathcal{M}$ から elementary operation を繰り返して得られるものとする、 $a \geq a'$ がわかる。よってこの順序は [8, 7.1] の順序の拡張である。

$a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$ とする。 $\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r} \in a$ が次の条件 (1) (6) をみたすとき、 $\{\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r}\}$ は条件 (★) をみたしているという。

- (1) $d = e(\Delta_{i_0})$ は $\Delta_1, \dots, \Delta_t$ にあらわれる数のうち最大のもの。
- (2) Δ_{i_0} は $e(\Delta) = d$ をみたす a の segment Δ のうちで最大のもの。
- (3) $e(\Delta_{i_p}) = d - p$, $p = 1, \dots, r$ 。
- (4) $\Delta_{i_p} \rightarrow \Delta_{i_{p-1}}$, $p = 1, \dots, r$ 。
- (5) 各 Δ_p ($p = 1, \dots, r$) は (3), (4) の条件をみたすもののうち最大のものの。

(6) $e(\Delta) = d - r - 1$ かつ $\Delta \rightarrow \Delta_{i_r}$ をみたす a の segment Δ は存在しない。

a が空でなければ、条件 (★) をみたす segment の集合 $\{\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r}\}$ で空でないものが存在する (segment の集合として一意的)。 $\Delta = \{b, \dots, e\} \in S$ とするとき、

$$\Delta^- = \{b, \dots, e - 1\}$$

とおく。 $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$ とするとき、[6] に従い、 $a^\sharp \in \mathcal{M}$ を次のように定める。まず、条件 (★) をみたす $\{\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r}\}$ をとる。ここで、multisegment $a' = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_t\}$ を

$$\Delta'_i = \begin{cases} \Delta_i^-, & i \in \{i_0, \dots, i_r\} \\ \Delta_i, & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定める。(但し、 $i \in \{i_0, \dots, i_r\}$ が $b(\Delta_i) = e(\Delta_i)$ をみたしているときは、 $\Delta_i^- = \emptyset$ は a' から取り除くことにする。) また、 $d = e(\Delta_{i_0})$ とし、 $\Delta_1^\sharp = \{d - r, \dots, d\}$ とおく。 a' が空でなければ、同様に条件 (★) をみたすものを a' からとり、 $\Delta_2^\sharp$ と a'' を定めることができる。以下、同じ操作を $a''' \dots$ が空になるまで繰り返していくことにより、

$$a^\sharp = \{\Delta_1^\sharp, \dots, \Delta_{t'}^\sharp\}$$

を定めることができる。

例 2.1. $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\}$,

$$\Delta_1 = \{t - 1, \dots, s - 1 + t - 1\}$$

$$\Delta_2 = \{t - 2, \dots, s - 1 + t - 2\}$$

$\vdots$

$$\Delta_t = \{0, \dots, s - 1\}$$

とする。このとき、 $a^\sharp = \{\Delta_1^\sharp, \dots, \Delta_s^\sharp\}$,

$$\Delta_1^\sharp = \{s - 1, \dots, t - 1 + s - 1\}$$

$$\Delta_2^\sharp = \{s - 2, \dots, t - 1 + s - 2\}$$

$\vdots$

$$\Delta_s^\sharp = \{0, \dots, t - 1\}$$

である。

3. GL_n の表現

GL_n の minimal parabolic 部分群 P_0 とその Levi 部分群 M_0 を

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

とおく。いま π_i ($i = 1, \dots, s$) を $GL_{r_i}(F)$ の有限生成な許容表現とすると、

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_s = \text{Ind}_P^{GL_n}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_s)$$

により GL_n の表現を定める。但し、 $n = r_1 + \cdots + r_s$ で、 $GL_{r_1} \times \cdots \times GL_{r_s}$ を

$$(g_1, \dots, g_s) \in GL_{r_1} \times \cdots \times GL_{r_s} \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_s \end{pmatrix} \in GL_n$$

により、 GL_n の standard Levi 部分群 M とみなし、対応する standard parabolic 部分群を P としている。 $GL_r(F)$ の quasi-character ν を

$$\nu(g) = |\det(g)|_F, \quad g \in GL_r(F)$$

により定める。 $\Delta = \{b, \dots, e\} \in \mathcal{S}$ を segment とし、 ρ を $GL_r(F)$ の supercuspidal 表現とすると、 $\langle \Delta \rangle_\rho$ を $\rho\nu^b \times \cdots \times \rho\nu^e$ の unique な既約部分表現とする。ここでは Langlands 分類を扱うので、 $\rho\nu^b \times \cdots \times \rho\nu^e$ の unique な既約商表現を $[\Delta]_\rho$ と書くことにする。これは $\rho\nu^e \times \cdots \times \rho\nu^b$ の unique な既約部分表現でもある。

例 3.1. $\Delta = \{0, 1\}$ を segment、 $\rho = \nu^{-\frac{1}{2}}$ を $GL_1(F)$ の quasi-character とするとき、 $\langle \Delta \rangle_\rho$ は $GL_2(F)$ の trivial 表現で、 $[\Delta]_\rho$ は $GL_2(F)$ の Steinberg 表現となっている。

次の命題は、I. N. Bernstein の定理 [8, Theorem 9.3] である (下の (3.1) 参照)。

命題 3.2. $GL_n(F)$ の既約許容表現 π が離散系列である為の必要十分条件は π がある $[\Delta]_\rho$ と同値になることである。

$a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$ を multisegment とするとき、

$$\pi\langle a \rangle_\rho = \langle \Delta_1 \rangle_\rho \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle_\rho$$

$$\pi[a]_\rho = [\Delta_1]_\rho \times \cdots \times [\Delta_t]_\rho$$

と書くことにする。また、 $\langle a \rangle_\rho$ を $\pi\langle a \rangle_\rho$ の unique な既約部分表現とする。我々は、Langlands 分類を扱うので、 $\mathcal{S}$ の順序として、 $b(\Delta_1) + e(\Delta_1) > b(\Delta_2) + e(\Delta_2)$ ならば $\Delta_1 > \Delta_2$ となるものを取り、 $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \geq \Delta_t$ と並べる方が良いが、[8, Proposition 6.4 (2)] と同様にして、この順序で並べた場合の誘導表現と $\pi[a]_\rho$ は同値な表現となることがわかる。このことから、 $\pi[a]_\rho$ は unique な既約商表現 $[a]_\rho$ をもち、multisegment a と既約表現 $[a]_\rho$ との対応は Langlands 分類と一致することが分かる。

いま、 $a = \{\Delta\}$ とするとき、

$$(3.1) \quad d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho = \langle a^\sharp \rangle_\rho$$

となることは難しくないが ([2] [8] 参照)、一般の multisegment $a \in \mathcal{M}$ に対しても C. Moeglin と J.-L. Waldspurger [6] により次の定理が証明されている。

定理 3.3.

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = \langle a^\sharp \rangle_\rho.$$

以下で、我々は、

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho$$

を示すが ([8, Conjecture 10.3] 参照)、そこで、[6] で証明に使われた Oesterlé による議論を真似る。証明には直接使わないが、まず最初に Oesterlé の結果 [6, Proposition 12] を解説する。次の命題は、[8, Proposition 9.13] から分かる。

命題 3.4. $\Delta = \{b, \dots, e\} \in \mathcal{S}$ とする。いま、

$$a_\Delta = \{\Delta\}^\sharp = \{\{e\}, \{e-1\}, \dots, \{b\}\} \in \mathcal{M}$$

とおくと、

$$\langle a_\Delta \rangle_\rho = \sum (-1)^{|a_\Delta| - |b|} \pi\langle b \rangle_\rho$$

が成り立つ。但し、和は a_Δ から elementary operation を繰り返して得られる $b \in \mathcal{M}$ をはしる。

命題 3.5 (Oesterlé). ある supercuspidal 表現 ρ に対し、

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = \langle a^\sharp \rangle_\rho, \quad \forall a \in \mathcal{M}$$

が成り立つならば、すべての ρ に対して同じ式が成り立つ。特に、 ρ を $GL_1(F)$ の trivial 表現として、上の式が成り立てば、すべての $GL_r(F)$ ($r \geq 1$) の supercuspidal 表現 ρ に対しても、上の式が成り立つ。

d_G の定義をみると、 $\pi\langle a \rangle_\rho$ における既約表現の重複度についての結果が必要に思われるが、以下の証明ではそこを回避する議論をする。 s を X の有限な multiset とし、 $R(s)_\rho$ を $\{\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$ から生成される $R(G)$ の部分群とする。 $d_G(R(s)_\rho) = R(s)_\rho$ であることはすぐに分

かる。いま、 T_1 を $R(s)_\rho$ の基底 $\{\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$ に対する d_G の行列表示とし、 T_2 を基底 $\{\pi\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$ に対する d_G の行列表示とする。また、 P をこの二つの基底の間の変換行列とする。Multisegment の順序を使い基底の元を並べると、[8, Theorem 7.1] により、 P は対角成分が全て 1 の上半三角行列になることが分かる。

補題 3.6. T_2 は ρ によらない。

証明. $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\}$ とすると、(1.4) と (3.1) により、

$$\begin{aligned} d_G(\pi\langle a \rangle_\rho) &= d_G(\langle \Delta_1 \rangle_\rho \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle_\rho) \\ &= \langle a_{\Delta_1} \rangle_\rho \times \cdots \times \langle a_{\Delta_t} \rangle_\rho \end{aligned}$$

となるが、ここで、命題 3.4 より

$$\langle a_\Delta \rangle_\rho = \sum (-1)^{|a_\Delta| - |b|} \pi\langle b \rangle_\rho$$

なので、 T_2 は ρ によらず決まっている。 $\square$

いま、 $T_2 = P^{-1}T_1P$ だが、 d_G が既約表現の間の置換をひきおこすので T_1 は置換行列となり、これは T_2 の Bruhat 分解を与えている。よって、 T_1 は T_2 から一意的に決まるので、補題 3.6 より、 T_1 が ρ によらないことが分かる。(行列 P 自身が ρ によっているかどうかは証明に必要ない。) $\square$

以下、同様の議論により、 $d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho$ を示していく。まず、(1.4) と (3.1) により、次の補題が示される。

補題 3.7.

$$d_G(\pi\langle a \rangle_\rho) = \pi[a]_\rho.$$

また、(3.1) と同様に

$$[a_\Delta]_\rho = \langle \Delta \rangle_\rho = d_G(\langle a_\Delta \rangle_\rho)$$

がいえる。よって、命題 3.4 を次のように言い換えることができる。

命題 3.8.

$$[a_\Delta]_\rho = \sum (-1)^{|a_\Delta| - |b|} \pi[b]_\rho.$$

但し、和は a_Δ から elementary operation を繰り返して得られる $b \in \mathcal{M}$ をはしる。

命題 3.9.

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho.$$

証明. s を X の multiset とし、 $R(s)_\rho$ の基底として、 $\{\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$ 、 $\{[a]_\rho \mid s(a) = s\}$ 、 $\{\pi\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$ 、 $\{\pi[a]_\rho \mid s(a) = s\}$ をとる。命題 3.5 の証明と同様に $\mathcal{M}$ の順序を使い基底の元を並べておく。いま、 P_1 を基底 $\{\langle a \rangle_\rho\}$ と基底 $\{\pi\langle a \rangle_\rho\}$ の間の変換行列とし、 P_2 を基底 $\{[a]_\rho\}$

と基底 $\{\pi[a]_\rho\}$ の間の変換行列とする。命題 3.5 の証明と同様に P_1 は対角成分が 1 の上半三角行列となるが、Langlands 分類により、 P_2 も対角成分が 1 の上半三角行列となることが分かる。ここで、 d_G を基底 $\{[a]_\rho\}$ をもつ空間 $R(s)_\rho$ から基底 $\{[a]_\rho\}$ をもつ空間 $R(s)_\rho$ への写像とみたときの行列表示を T_1 とし、 d_G を基底 $\{\pi[a]_\rho\}$ をもつ空間 $R(s)_\rho$ から基底 $\{\pi[a]_\rho\}$ をもつ空間 $R(s)_\rho$ への写像とみたときの行列表示を T_2 とする。このとき、補題 3.7 により T_2 は単位行列であることがわかる。ここで、 $T_1 = P_2 T_2 P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$ で T_1 は置換行列なので、 T_1 が単位行列であることがいえる。□

命題 3.9 により、定理 3.3 を次のように言い換えることができる。

系 3.10.

$$d_G([a]_\rho) = [a^\sharp]_\rho.$$

4. GL_n の A-PACKET

いま d_G と i_M^G は可換なので、Arthur parameter ψ が elliptic のときのみを考えればよい。よって、Arthur parameter

$$\psi = \tau \times \rho_s \times \rho_t : W_F \times SU_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

が $W_F \times SU_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ の既約表現であると仮定する。ここで、 τ は W_F の r 次元の既約表現で、 ρ_s は s 次元の $SU_2(\mathbb{C})$ の既約表現、 ρ_t は t 次元の $SL_2(\mathbb{C})$ の既約表現とする。既約表現 τ に対応する $GL_r(F)$ の supercuspidal 表現を σ とし、

$$\rho = \sigma \nu^{\frac{-s-t+2}{2}}$$

$$n = rst$$

とおく。このとき、 $a \in \mathcal{M}$ を例 2.1 のようにとると、

$$\Pi_\psi(GL_n) = \{[a]_\rho\}$$

$$\Pi_{d(\psi)}(GL_n) = \{[a^\sharp]_\rho\}$$

であることが分かる。いま、系 3.10 により、

$$d_G([a]_\rho) = [a^\sharp]_\rho$$

なので、次の定理がいえる。

定理 4.1. $G = GL_n$ のとき、予想 1.2 は正しい。

REFERENCES

- [1] Arthur, J. Unipotent automorphic representations: conjectures. Orbits unipotentes et représentations, II. Astérisque 171-172 (1989), 13-71.
- [2] Aubert, A.-M. Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p -adique. Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), no. 6, 2179-2189.

- [3] Aubert, A.-M. Erratum: "Duality in the Grothendieck group of the category of finite-length smooth representations of a p -adic reductive group" Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 11, 4687–4690.
- [4] Bernstein, I. N.; Zelevinsky, A. V. Induced representations of reductive p -adic groups. I. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 4, 441–472.
- [5] Kato, S. Duality for representations of a Hecke algebra. Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), no. 3, 941–946.
- [6] Mœglin, C.; Waldspurger, J.-L. Sur l'involution de Zelevinski. J. Reine Angew. Math. 372 (1986), 136–177.
- [7] Zelevinski, A. V. The p -adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 15 (1981), no. 2, 9–21, 96.
- [8] Zelevinsky, A. V. Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 2, 165–210.

E-mail address: hiraga@kum.kyoto-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY,
KYOTO 606-8502, JAPAN