

Knots in the stable 4-space

大阪市大・理 河内明夫 (Akio Kawauchi)

なめらかな有向連結 $(n+2)$ 次元多様体 W に対し, その内部になめらかに埋め込まれた null-homotopic 有向 n 次元球面を W 内の knot という. null-homotopic という条件をつけない時, W 内の 一般 knot という. 互いに交わらない有限個の W 内の knots の和を W 内の link (一般 knots の和の場合, 一般 link) という. 2つの W 内の一般 links L_1, L_2 に対し, W 上の向き保存微分同相写像で, L_1 を L_2 に向きを保存して移すようなものが存在する時, L_1 と L_2 は 同値である といい, その同値類を 型 という. ^(いわゆる) knot 理論 とは, この型の分類の研究を士している. 4次元トラスと $S^2 \times S^2$ の connected sum の普遍被覆空間に微分同相な4次元多様体を 安定4次元空間 (stable 4-space) といい, SR^4 で表わす. この空間は R^4 に可算無限の $S^2 \times S^2$ を connected sum することにより得られる. この報告では, SR^4 内の link の性質のうち, R^4 (又は S^4) 内の link について知られていないあるいは存在

しないような性質を中心に研究する。目次は以下の通りであるが、安定4次元空間の性質については、[Ka]で述べたので、§1は省略することにした。

[目次]

- §1. 安定4次元空間 (省略),
- §2. link の群,
- §3. torsion pairing invariant,
- §4. 有限個 Seifert 多様体 を持たない knots とその supporting degree,
- §5. Cobordism,
- §6. Arithmetic.

§2. link の群.

なめらか有向連結 $(n+2)$ 次元多様体 W 内の一般 link L に対し, W 内になめらかに埋め込まれた次のような $(n+1)$ 次元コンパクト有向多様体 V を L の (1つの) Seifert 多様体 という: $\partial V = L$ かつ V は 閉多様体を成分に含まない. 一般 link が必ずしも Seifert 多様体を持たないことは明らかであ

るが, link は必ず Seifert 多様体を持つことがわかる. n 個の $(n+1)$ 次元球の直和にそれぞれ同相な Seifert 多様体をもつ link $L \subset W$ は trivial であるという.

SR^4 内の一般 link について考える.

定義 SR^4 内の link L に対して, その Seifert 多様体として $\# S^1 \times S^2 - \mathring{B}^3$ にそれぞれ同相なものがとれる時, その link $L \subset SR^4$ を $\mathbb{Q}$ -ribbon link という.

定義 L を含むような, SR^4 内のなめらかコンパクト 4次元部分多様体 W で $\partial W \cong S^3$ となるものを, 一般 link $L \subset SR^4$ の support という. また, ∂W に B^4 をはりつけたもの: $W^+ = W \cup B^4$ を 一般 link $L \subset SR^4$ の 閉 support という.

各一般 link $L \subset SR^4$ に対して, support W が存在することは明らかである. $\partial W \cong S^3$ だから, van Kampen 定理によって, W は単連結となることがわかる. 各 link $L \subset SR^4$ に対し, LCW (又は W^+) は link となる. もとの一般 link $L \subset SR^4$ は一般 link $L \subset W$ (又は W^+) から stabilization により得られたということもある. その理由は, $SR^4 - \mathring{W}$ は必ず $SR^4 - \mathring{B}^4$ にそれぞれ同相になり (cf. [Ka1]), 従って, 一般 link $L \subset SR^4$ は, $\mathring{W}$ に可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum して LCW

から得られたと解せるからである。 SR^4 内の一般 link L に対し、 $G(L) = \pi(SR^4 - L)$ をその群という。ある群 G の元 $x_1, \dots, x_s$ に対し、 $(x_1, \dots, x_s)^G$ によって、元 $x_1, \dots, x_s$ の G で "normal closure" を表わすことにする。

定理 2.1 r 成分の link $L \subset SR^4$ の群 $G(L)$ は、その meridians $m_1, m_2, \dots, m_r$ に対して $(m_1, m_2, \dots, m_r)^{G(L)} = G(L)$ かつ $H_1(G(L)) \cong \bigoplus_r \mathbb{Z}$ となるような有限表示群である。さらに、 $(m_1, m_2, \dots, m_r)^G = G$ かつ $H_1(G) \cong \bigoplus_r \mathbb{Z}$ となる任意の有限表示群 G と元 $m_1, m_2, \dots, m_r$ に対し、 G をその群としかつ $m_1, m_2, \dots, m_r$ を meridians とするような r 成分の G -ribbon link $L \subset SR^4$ が存在する。

次は任意の有限表示群は SR^4 内の一般 link の群として実現できることを示している：

定理 2.1' r 成分の一般 link $L \subset SR^4$ の群 $G(L)$ は、その meridians $m_1, m_2, \dots, m_r$ に対して $(m_1, m_2, \dots, m_r)^{G(L)} = G(L)$ となるような有限表示群である。さらに、任意の有限表示群

G と $(m_1, m_2, \dots, m_r)^G = G$ となる元 $m_1, m_2, \dots, m_r$ に対して, G をその群とし, かつ $m_1, m_2, \dots, m_r$ を meridians とする r 成分の一般 link $L \subset SR^4$ が存在する.

G -ribbon link $L \subset SR^4$ は trivial 法バンドルを持つ一般 link $L^* \subset SR^4$ から次の操作で得られる link といえることができる: collar $L^* \times [0, 1] \subset SR^4$ の境界である一般 link $\partial(L^* \times [0, 1]) \subset SR^4$ に fusion (つまり 1-handles に関する surgery) を行う ... 操作(A) という.

定義 $SR^4 = R^4 \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2$ と表わした場合に, R^4 内の trivial link といくつかの $S^2 \times S^2$ の factors の和である一般 link に同値な L^* から操作(A)で得られる link $L \subset \Sigma$ を Q-ribbon link という. ($p \times S^2_{x \neq y} \times S^2 \times p$ ($p \in S^2$) を $S^2 \times S^2$ の factor という.)

定理 2.2 Q-ribbon link の群の class は R^4 内のに埋め込みに埋め込まれた有向閉曲面の群の class と一致する. さらに, Q-ribbon link の群でない (G -ribbon) link の群が多数存在する.

trivial link である L^* から操作 (A) で得られる link $L \subset SR^4$ を ribbon link という。これは R^4 内の通常の ribbon link の SR^4 への stabilization と考えられる。特に、 R^4 及び SR^4 内の ribbon links の群の classes は一致する。

link $K_1 \cup \dots \cup K_r \subset S^3$ に対し、積 $S^1 \times (S^3, K_1 \cup \dots \cup K_r)$ を考える。 S^3 内の互いに交わらない 3-球 $B_1, \dots, B_r$ で $B_i \cap K_i, i=1, 2, \dots, r$, が B_i で unknotted arc となるものとする。 $S^1 \times B_i$ を $D^2 \times \partial B_i$ でおまかせる surgery により $S^1 \times K_1 \cup \dots \cup S^1 \times K_r \subset S^1 \times S^3$ から r 成分 link $L' \subset \#_{r=1}^r S^2 \times S^2$ を得る。

(定義) $\#_{r=1}^r S^2 \times S^2$ の SR^4 への stabilization により L' から得られる link $L \subset SR^4$ を link $K_1 \cup \dots \cup K_r \subset S^3$ の surgery-spun link という。

(定理 2.3) surgery-spun link $L \subset SR^4$ が link $K_1 \cup \dots \cup K_r \subset S^3$ から得られているとする。その時次が成り立つ。

(0) link $L \subset SR^4$ の型は link $K_1 \cup \dots \cup K_r \subset S^3$ の型により一意に決まる,

(1) 自然な meridian 保存同型 $\pi_1(S^3 - K_1 \cup \dots \cup K_r) \cong G(L)$ が存在する,

- (2) $LC SR^4$ は $\mathbb{Q}$ -ribbon link である,
 (3) L の各成分は SR^4 内の ある 4-球内に, 対応する成分 K_i の spun knot として, 入ることが出来る.

定義 次の性質をもつ link $LC SR^4$ を flexible とする:
 任意の写像 $f: S^2 \rightarrow SR^4$ が $f(S^2) \cap L = \emptyset$ となる写像 c
 $f': S^2 \rightarrow SR^4$ に homotopic になる.

補題 2.4 link $LC SR^4$ が flexible となる 必要十分条件は
 $H_2(G(L)) = 0$ ^(と仮定) である.

系 link $K_1 \cup \dots \cup K_r \subset S^3$ の surgery-spun link $LC SR^4$ に対して
 次の同値:

- (1) $LC SR^4$ は flexible,
- (2) $LC SR^4$ は SR^4 内の ある 4-球内に入る,
- (3) $K_1 \cup \dots \cup K_r \subset S^3$ は completely splittable.

定理 2.2 と 例 2.3 は Litherland [Lit] の結果により, 次の
 おかる:

系 各 $r \geq 1$ に対し, r 成分の flexible でない $\mathbb{Q}$ -ribbon links
 が 多数存在する.

定理 2.1 と Keruaire の結果 [Ke1] により 次がわかる:

(系) flexible links の群の class は S^{n+2} ($n \geq 3$) 内の links の群の class と一致する.

この系と Yajima [Y1], [Y2] の結果により 次がわかる:

(系) flexible link の群は $\mathbb{Q}$ -ribbon link の群である.

§3 で述べる ^{部分} SR^4 の link の torsion pairing invariant によって、次がわかる: G -ribbon でない (従って $\mathbb{Q}$ -ribbon でない) flexible links が 多数存在する.

§3. torsion pairing invariant.

H を無限巡回群 $\langle t \rangle$ の整数環 $\Lambda = \mathbb{Z}\langle t \rangle$ 上の有限生成加群とする. DH によって, H の最大の有限 Λ -部分加群を表わす (cf. [Ka2]). TH を H の Λ -torsion 部分とし, $BH = H/TH$ とおく. $\text{Ext}_{\Lambda}^1(H, \Lambda)$ を E^1H と書く. link $L \subset SR^4$ に対し, $E(L) = SR^4 - L$ とおく. L の各 meridian を t に写す epimorphism $\pi_1(E(L)) \rightarrow \langle t \rangle$ に

付随した被覆を $\tilde{E}(L)$ と書く時, $H_1(\tilde{E}(L))$ は有限生成 Λ -加群である (cf. 定理 2.1). 次の定理は [Ka2] の第2双対定理の帰結である:

定理 3.1 各 link $L \subset S^4$ に対し, 次の (1) と (2) を満たすような t -isometric, symmetric, non-singular pairing $\ell: D(L) \times D(L) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が存在する:

(1) $(D(L), \ell)$ は link の型の invariant である,

(2) link の型で不変な t -反 epimorphism

$$\theta: DH_1(\tilde{E}(L)) \rightarrow E^1(BH_2(\tilde{E}(L)))$$

が存在し, $D(L)$ はその kernel に等しい.

注意 S^4 内の knot K の SR^4 への stabilization を $\bar{K} \subset SR^4$ と表わす時, この pairing $\ell: D(\bar{K}) \times D(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は knot $K \subset S^4$ の Farber / Levine pairing (Farber [F], Levine [Lev]) と一致する.

注意 $L \subset SR^4$ が G -ribbon link ならば, $D(L) = 0$ となる.

S^4 内の knot について Levine [Lev] が呼んでいたように

$(D(W), \ell)$ を link $LC SR^4$ の torsion pairing と呼ぶことにする。上の注意により、 ℓ がわかる。

系 各 $r \geq 1$ に対し、 G -ribbon でない r 成分の flexible 及び non-flexible links が 多量に存在する。

knot $K \subset SR^4$ に対して、 $t^{-1}: H_1(\tilde{E}(K)) \cong H_1(E(K))$, 従って $t^{-1}: D(K) \cong D(K)$ となるので、 ℓ は SR^4 内の knots の torsion pairings を特徴づける。

定理 3.2 $t^{-1}: D \cong D$ と任意の有限 Λ -加群 D とその上の任意の t -isometric, symmetric non-singular pairing $\ell_D: D \times D \rightarrow \mathbb{Q}/2$ に対し、 Λ -同型 $(D, \ell_D) \cong (H_1(\tilde{E}(K)), \ell)$ をもつ knot $K \subset SR^4$ が存在する。

注意 多くの (D, ℓ_D) は S^4 内の knot により実現できる (cf. Zeeman [Z]) が、すべての (D, ℓ_D) が S^4 内の knot で実現できるかどうか知られていない (cf. Levine [Lev])。

§4. 極小 Seifert 多様体をもてない knots とその supporting degree.

なめらかな有向連結 $(n+2)$ -次元多様体 W 内の一般 link L が Seifert 多様体 V を持っていたと仮定する.

定義 V の各連結成分 V_j に対して, $\pi(\dot{V}_j) \rightarrow \pi(W-L)$ が 1:1 になる時, Seifert 多様体 V は 極小 であるという.

$n=1$ のとき, W 内の Seifert 曲面をもつ一般 link は必ず 極小 Seifert 曲面をもつ. これは loop 定理からよく知られていることである.

命題 4.1 $n \geq 3$ で W が 3-連結の場合, Seifert 多様体をもつ W 内の一般 link は必ず 極小 Seifert 多様体をもつ.

Lemma 1

この証明は Gutiérrez [G] と同様にしてできる. SR^4 内の link L が 極小 Seifert 多様体を持つのは, L のある support W の中で 極小 Seifert 多様体をもつ

時であり, しかもその時に限る.

命題 4.2 S^3 内の任意の link の surgery-spun link CSR^4 は 相対的に Seifert 多様体をもつ.

定義 $\#_m S^2 \times S^2$ に微分同相な一般 link $LCSR^4$ の閉 supports のうち, 最小の m を, 一般 link $LCSR^4$ の supporting degree といい, $sd(L)$ で表わす, ただし $\#_0 S^2 \times S^2 = S^4$ とする.

定理 4.3 任意の自然数 n に対し, S^4 内の fibered knot の stabilization でできた knot K_0CSR^4 および knots K_iCSR^4 , $i=1, 2, \dots, n$, の組で, 次の条件を満たすものが多数存在する:

- (1) $G(K_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, はすべて meridians を保存して同型である,
- (2) $H_2(\tilde{E}(K_i))$, $i=0, 1, \dots, n$, のどの 2 つも Λ -同型でない,
- (3) $sd(K_i) = i$, $i=0, 1, \dots, n$,
- (4) $i \neq 0$ となる K_i は 相対的に Seifert 多様体をもたない.

[注意] 定理4.3の証明には使えないが、次の命題は
 極小 Seifert 4-様体を持たない SR^4 内の knot の 簡単
比較的 な構成法を与える。

[命題4.4] knot $K \subset SR^4$ が極小 Seifert 4-様体をもち、かつ commutator 部分群 $[G(K), G(K)]$ が有限生成
 $G(K)$
 ならば、 $[G(K), G(K)]$ は 3次元有向連結閉4-様体の基本群に同型になる。

この命題は Neuwirth [N, Theorem 4.5.1] と同様の方法で示すことができる。 S^3 内の non-trivial fibered knot の 0-surgery ができる 3次元4-様体の基本群を G とする。 G は SR^4 内の (実際、 $S^2 \times S^2$ 内の) ある knot の群になる。 G をその群としてもつような任意の SR^4 内の knot は極小 Seifert 4-様体を持つことができない。何故ならば $[G, G]$ は genus が正の有向閉曲面の基本群に同型であり、従ってそれは 3次元有向連結閉4-様体の基本群に同型になれないからである。定理4.3は $[G(K), G(K)]$ が 3次元有向連結閉4-様体の基本群に同型であっても極小 Seifert 4-様体を持たない knot $K \subset SR^4$ の例を与えている。 S^4 内の knot で極小 Seifert

4次元様体を持つでない例は知られていない。

[注意] S^4 内の knots K に対して, 定理 4.3 の (1), (2) を同時に満たすようなものは存在しない. これは π -反同型 $H_2(\tilde{E}(K)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\tilde{E}(K)), \mathbb{Q}(\pi)/\pi)$, $E(K) = S^4 - K$, がいつも成りたち (例えば, Levine [Lev] を見よ), 従って π -加群 $H_2(\tilde{E}(K))$ は π の群 $G(K) = \pi_1(E(K))$ で決定されるからである.

しかしながら, S^4 内の knot K に対して $G(K)$ とその meridian $\mu(K)$ は, 一般には, $E(K)$ の homotopy 型を決定しないことが知られている (cf. Plotnick / Suciu [PS]).

[注意] Lee [Lee] は $S^3 \times S^2$ 内の knot K で, その群 $G(K) = \pi_1(S^3 \times S^2 - K)$ が $H_2(G(K)) \neq 0$ となるものの存在を示すことにより, $S^3 \times S^2$ 内の knots で 4-球に入れない例を与えた. 定理 4.3 は その群が S^4 内の knots の群と同型であっても 4-球に入れない $S^3 \times S^2$ 内の knots の例を与えている. Tamura [T] は類似の問題をもっと高い次元において考えていた.

§5. Cobordism.

R^3 内の linking number が "0" な n link $L_1, \dots, L_n$ に対し, その成分 L_i は 互いに交わらないコンパクト有向曲面を $R_+^4 = R^3 \times [0, +\infty)$ において bound することはない. 一斉, SR^4 内の link については, このようなことは決して起らない.

命題 5.1 SR^4 内の各 link に対し, その成分は, $SR^4 \times [0, +\infty)$ において, なめらかに埋め込まれた, 互いに交わらない, コンパクト有向 3 次元多様体を bound する.

これは, ある意味で, SR^4 内の link に対し, linking number に対応する不変量が存在しないことを意味する.

定義 2つの links $L, L' \subset SR^4$ が I-equivalent であるというのは, $SR^4 \times [0, 1]$ に位相的に埋め込まれた, $L \times [0, 1]$ に同相な 多様体 A で, $(\partial A) \cap SR^4 \times 0 = (-L) \times 0$, $(\partial A) \cap SR^4 \times 1 = L' \times 1$ かつ $(\partial A) \cap SR^4 \times (0, 1) = \emptyset$ となるものが存在する時をいう. さらに, A がなめらかに $SR^4 \times [0, 1]$ に埋め込まれている場合, $L, L' \subset SR^4$ は

cobordant であるという。

すべての成分が、互いに交わらないような Seifert 多様体を持つような link $L \subset SR^4$ を boundary link といふ。また、非連結 Seifert 多様体をもつような link $L \subset SR^4$ を weakly split link といふ。次は Kervaire [Ke2] と同じ手法で示される:

命題 5.2 SR^4 のすべての boundary links は trivial links に cobordant である。特に, SR^4 のすべての knots は trivial knot に cobordant である。

S^4 のすべての links (もっと一般に, SR^4 内のすべての flexible links) は trivial links に cobordant かどうかは知られていない (cf. Cochran [C]) が, SR^4 内の non-flexible links に対しては, I -equivalent にならないものか 多々数 存在する。実際, 次が示される:

定理 5.3 各整数 $r \geq 2$ に対し, 次のような r 成分の links $L \subset SR^4$ が (I -equivalence を無視して) 多々数 存在する: L に I -equivalent な任意の link

L' は $sd(L') \geq r-1$ をみたし, flexible でなく, また weakly split でない.

我々は, また, 次の示すことができた:

定理 5.4 各整数 $r \geq 2$ に対し, $G(L)$ と $G(L')$ が meridians を保存して同型であるが, cobordant でない r 成分の links $L, L' \subset SR^4$ の対が (I-equivalences を無視して) 多数存在する.

§6. Arithmetic.

任意の link $L \subset SR^4$ と L 上の点 p に対し, SR^4 になめらかにかつ proper に埋め込まれた半開区間 α で, $\partial\alpha = p$ かつ $\alpha \cap L = \emptyset$ となるものを, 点 p を始点として link L から出発する half-open line と呼ぶ.

補題 6.1 同じ点を始点として link L から出発する 2本の half-open lines α_1, α_2 に対し, α_1 を α_2 に移し かつ L を固定するような SR^4 の 向き保存同相写像が存在する.

SR^4 内の knots $K_i, i=1,2$, から出発する half-open lines α_i の tube 近傍 $T(\alpha_i)$ で, $(T(\alpha_i), T(\alpha_i) \cap K_i) \cong (D^3 \times [0, +\infty), D^3 \times 1)$ となるものをとる, ここで $D^2 \subset D^3$ は標準的な disk pair とする.

今, 2つの pairs $(SR^4 - \overset{\circ}{T}(\alpha_i), K_i - \overset{\circ}{T}(\alpha_i) \cap K_i), i=1,2$, をこれらの boundaries によって, 向き逆転微分同相^{写像}により, はり合わせることによって, SR^4 内の新しい knot K' ができる. 補題 6.1 から この knot K' の型は, half-open lines の取り方によらず K_1 と K_2 の型だけで決まることかわかる. この knot K' を K_1 と K_2 の sum といひ $K_1 \# K_2$ で表わす.

定義 $K = K_1 \# K_2$ と表わした時, 必ず K_1 又は K_2 が trivial knot となるような knot $K \subset SR^4$ を prime といふ.

定理 6.2 任意の knot $K \subset S^3$ は有限個の prime knots の sum になる.

この結果は少し後で述べる Maeda の定理 [Maed] と次の, 本質的には Matsumoto [Mat] による, Triviality 定理の直接の結果である:

定理 6.3 (Triviality 定理) link $L \subset S^3$ が trivial である必要十分条件は, $G(L)$ が meridians を基底にもつ自由群となることである. 特に, knot $K \subset S^3$ が trivial である必要十分条件は, $G(K) \cong \mathbb{Z}$ となることである.

Maeda の定理を述べるために, $(m)^G = G$ か $\supset H_1(G) \cong \mathbb{Z}$ となる有限表示群 G とその元 m の pair (G, m) を考える. そのような 2 つの pairs (G_i, m_i) , $i=1, 2$, について, pair $(G_1 *_{m_1=m_2} G_2, m_1 (=m_2))$ をこれらの sum と呼び, $(G_1, m_1) * (G_2, m_2)$ と表わす. $(G, m) = (G_1, m_1) * (G_2, m_2)$ と表わす時, 必ず G_1 又は $G_2 \cong \mathbb{Z}$ となるような (G, m) を prime といい. $K = K_1 \# K_2$ に対して, $(G(K), m) = (G(K_1), m_1) * (G(K_2), m_2)$ (m_i, m_i は K_i の meridians) となる. 従って $(G(K), m)$ が prime ならば, Triviality 定理によって, K は prime となる.

Maedaの定理 (G, m) は必ず有限個の prime pairs (G_i, m_i) の sum になる。しかも、その sum は(順番を除けば)ただ一通りである。

定理 6.2 で述べた SR^4 内の knot の prime 分解が一意的かどうかはわからない。=K に SR^4 内の knot の unknotting number について考える。 SR^4 にのみならず埋め込まれた solid torus の境界曲面は SR^4 の ambient isotopy を無視してただ1つしかない。これは [HK] と同様な手法で示せる。この曲面を unknotted 曲面 とする。

SR^4 内の knot K は, Seifert 多様体をもつのである, [HK] と同様にして, 有限個の 1-handles による surgery により, K は unknotted 曲面に変換できる。従って, Hosokawa/Maeda/Suzuki [HMS] と同様にして, SR^4 内の knot K に unknotting number を定義できる。

定義 surgery によって, unknotted 曲面に変換するのに必要な, knot K にとった 1-handles の個数のうち, 最小のものを knot K 在 SR^4 の unknotting number と呼び, $u(K)$ で表わす。

knot $K \subset SR^4$ に対し, $SR^4 - K$ の中のなめらかな null-homologous 単純閉曲線 C を考える. C の tube 近傍 $T(C) \cong S^1 \times D^3$ にとった spin surgery $SR^4 - T(C) \cup D^2 \times \partial D^3$ は $SR^4 \# S^2 \times S^2 \cong SR^4$ に微分同相である. これにより, knot $K \subset SR^4$ は新しい knot $K' \subset SR^4$ に変わる. C は homotopic な loop で表される $G(K)$ の元を $x(C)$ と書く時, $G(K')$ は $G(K)$ に関係 $x(C)=1$ をつけ加えたものである. $G(K)$ は有限生成だから, このような変換の有限回で, K をその群が $\mathbb{Z}$ となる knot, つまり Triviality 定理において trivial knot, に変換できる.

定義 この変換の最少回数を knot $K \subset SR^4$ の unknotting number in the weak sense といい, $u_w(K)$ で表す.

$b(K), w(K), e(K)$ によって, $G(K)$ の meridian generators の最少数, $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)^{G(K)} = [G(K), G(K)]$ となる元 $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in [G(K), G(K)]$ の最少の数 s , $H_1(E(K))$ の Λ -generators の最少数をそれぞれ表す. このとき, 次の成り立つ:

定理 6.3 $e(K) \leq w(K) = u_w(K) \leq u(K) \leq b(K) - 1$.

参考文献

- [C] T. Cochran, Slice links in S^4 , *Trans. Amer. Math. Soc.* 285 (1984), 389-401.
- [F] M. Š. Farber, Duality in an infinite cyclic covering and even-dimensional knots, *Math. USSR Izvestija* 11(1977), 749-781.
- [G] M. A. Gutiérrez, An exact sequence calculation for the second homotopy of a knot, *Proc. Amer. Math. Soc.* 32(1972) 571-577.
- [HK] F. Hosokawa / A. Kawauchi, Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, *Osaka J. Math.* 16(1979), 233-248.
- [HMS] F. Hosokawa / T. Maeda / S. Suzuki, Numerical invariants of surfaces in 4-space, *Math. Sem. Notes* 7(1979), 409-420.
- [Ka1] 河内, Stabilization of exotic 4-spaces, 数理解析講究金録「多様体のトポロジー」の中.
- [Ka2] A. Kawauchi, Three dualities on the integral homology of infinite cyclic coverings of manifolds, *Osaka J. Math.* (to appear).
- [Ka3] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space: An introduction (to appear).
- [Ka4] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space, I: The stable 4-space, II: The groups of links, III: The torsion pairing invariant, IV: Knots with no minimal Seifert manifolds and the supporting degree, V: Cobordism, VI: Arithmetic. (現在準備中)

- [Ke1] M.A. Kervaire, On higher dimensional knots, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, 1965, 105-119.
- [Ke2] M.A. Kervaire, Les noeuds de dimensions supérieures, *Bull. Soc. Math. France* 93 (1965), 225-271.
- [Lee] Y.W. Lee, Contractibly embedded 2-spheres in $S^3 \times S^2$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 85 (1982), 280-282.
- [Lev] J. Levine, Knot modules. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* 229 (1977), 1-50.
- [Lit] R.A. Litherland, The second homology of the group of a knotted surface, *Quant. J. Math.* 32 (1981), 425-434.
- [Mae] T. Maeda, Star decompositions of groups splitting along cyclic groups.
- [Mat] T. Matsumoto, On a weakly unknotted 2-sphere in a simply-connected 4-manifold, *Osaka J. Math.* 21 (1984), 489-492.
- [N] L.P. Neuwirth, *Knot Groups*, Ann. Math. Studies 56, Princeton Univ. Press, 1965.
- [P/S] S.P. Plotnick / A.I. Suciu, $\mathbb{R}$ -Invariants of knotted 2-spheres, *Comment. Math. Helv.* 60 (1985), 54-84.
- [T] I. Tamura, Fundamental theorems in global knot theory (preprint).
- [Y1] T. Yajima, On a characterization of knot groups of some spheres in R_4 , *Osaka J. Math.* 6 (1969), 435-446.
- [Y2] T. Yajima, Wirtinger presentations of knot groups, *Proc. Japan Acad.* 46 (1970), 997-1000.
- [Z] E.C. Zeeman, Twisting spun knots, *Trans. Amer. Math. Soc.* 115 (1965), 471-495.