

代数函数と bifurcation diagram

東大 教養 斎藤恭司

$\mathbb{C}^n$ 内の複素超曲面 H を調べるのに、Zariski や Lefschetz 等、 H を $\mathbb{C}^{n-1}$ に射影して $\mathbb{C}^{n-1}$ の有限被覆として実現し、その分岐点の集合 D (ramification discriminant) $\subset \mathbb{C}^{n-1}$ にそって H がどう変化するか (equi-singularity, vanishing cycles) 調べるのが普通であるが、ここでは新たに、bifurcation diagram E なる概念を導入してみる。

§ 0.

$h(x_1, \dots, x_n)$ を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された正則函数で、

$$h(x_1, \dots, x_n) = x_n^d + a_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{d-1} + \dots + a_d(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$a_i(0, \dots, 0) = 0$, $\deg a_i \geq i$ なる Weierstrass 標準型としよう。

この時 $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid h(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ は $\mathbb{C}^n$ の原点近くの

hypersurface を定める。一方、与えられた $(x_1, \dots, x_{n-1})$ に対し、

$h(x_1, \dots, x_n) = 0$ は x_n について d 次方程式だから、 d 個の根

$\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \varphi_2(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_{n-1})$ を持つ。

x_n の多項式として、 h と $\frac{\partial h}{\partial x_n}$ の終結式を $\omega(x_1, \dots, x_{n-1})$ とおけば、

$$\omega(x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{const} \prod_{i \neq j} (\varphi_i(x_1, \dots, x_{n-1}) - \varphi_j(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

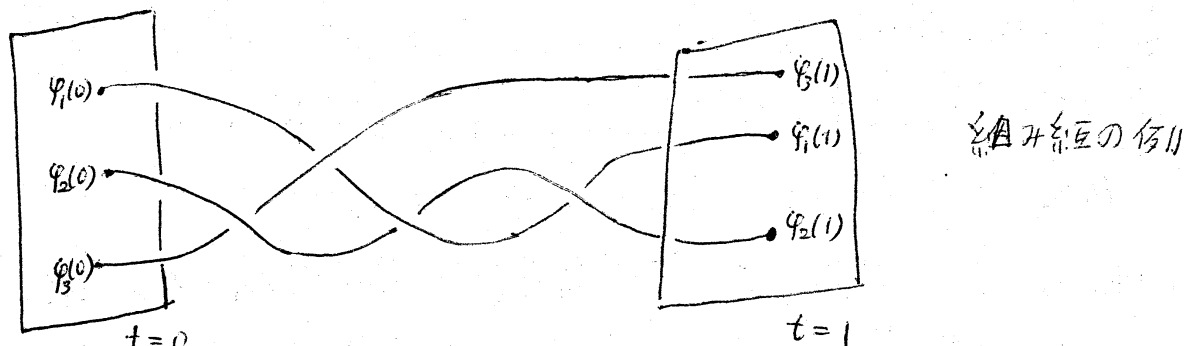
だから

$$D = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : \omega(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0\}$$

を *discriminant* と呼ぶ事にすると、 $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ は $(\mathbb{C}^{n-1} - D, 0)$ で正則多価函数とする事ができ、これが、 h の定める代数函数である。

さて、この代数函数 $\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_{n-1})$ の“多価性”を立ち入って調べると次の組み紐の概念が出てくる。

複素平面に d 個の相異なる点 $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ があるとし、それが一定の時間、平面内を互いにぶつかわぬ様に動きまわり、 $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t), 0 \leq t \leq 1, \varphi_i(t) \neq \varphi_j(t) \text{ for } i \neq j)$ 最後にもとの点集合にもどる ($\text{i.e. } \{\varphi_1(0), \dots, \varphi_d(0)\} = \{\varphi_1(1), \dots, \varphi_d(1)\}$) とする。



この様なものは、組みひもと呼ばれている。二つの組みひもが与えられた時、両者を自然に接続した組みひもを積とする事により、組みひも全体に群構造が入り、それを B_d と書く。

又、与えられた組みひもに対し、その始点と終点の対応を考える事により点集合 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ の置換が定まる。この対応

は B_d から対称群 S_d の上への準同型をひきおこす。

さて、代数函数 $\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_{n-1})$ にもどろう。
 $x_1, \dots, x_{n-1}$ が、 $\mathbb{C}^{n-1} - D$ の閉じた道によって動くと、対応して
 $\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_{n-1})$ は $\mathbb{C}$ 内を互にぶつかるぬ様に動くのだから、或る組みひもが定まる。この対応は更に、原点の近くでの局所基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1} - D)_0$ から組みひも群 B_d への表現をひき起す。表現の合成 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1} - D)_0 \rightarrow B_d \rightarrow S_d$ が、いわゆる代数函数のモノドロミー表現である。

この「組みひも表現」 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1} - D)_0 \rightarrow B_d$ とモノドロミー表現の持つ情報の質の違いは、標語的に言って、homotopical な情報と homological な情報の違いともいえる。例へば $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍から超曲面 H をぬいた残りの、局所基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^n - H)_0$ の生成系の基本関係式を組みひも表現 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1} - D)_0 \rightarrow B_d$ から、完全に代数的に決める事ができる。(Zariski, Van-Kampen)

次に組みひも表現をどの様に求めるか考えてみよう。まず discriminant D の原点における重複度 (= D の定義式の Taylor 展開最少次数) が m なる、 $\mathbb{C}^n$ の原点の近くを通る適当な複素直線を L とすると、 L と D は丁度 m ヶ所で transversal に交る。そこで $y_1, \dots, y_m$ をその交点とし、 L 内に y_i ($i \geq 1$) のいずれとも異なる点 y_0 を基点と選び、 y_0 を発し、 y_i を時計方向に1周し、 y_0 にもどる道を f_i とする。更に各 f_i が、 y_0 以外で交点を持たないとする

と、 $f_1, \dots, f_m$ を $\mathbb{C}^{n-1}-D$ 内の道とみなせば、それ等は、局所基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1}-D)_0$ の生成系になっている事が分るので (Lefschetz) 各 f_i に対し、対応する組ひもを求めればよい事となる。

ところが筆者の知る限り、この組ひもの求め方は、実際に $(x_1, \dots, x_{n-1})$ のパラメータ値に対して代数方程式を解いて解の動きを追跡するという超越的 (transcendental) な過程で、 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1}-H)_0$ の計算の他の部分 (例へば、discriminant の計算) が“代数化”されている事実と著しい対称をなしている。例へば、コンピュータによって、与えられた代数函数の組ひもを計算するプログラムをつくる事が原理的に可能であろうか。かつて Mumford も似た問を提出していたが、筆者には不明である。

そこで、以下の節に bifurcation diagram なる概念を導入しようと思う。それが、braid の計算の代数化の方向に向うかに役立つのかと期待するが、未だ決定的な結果が得られているわけでもない。

§1.

記号 $(h(x_1, \dots, x_n))$, 代数函数 $\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_{n-1})$, discriminant D 等々) を §0 と同じとする。

定義 $E := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \exists i, \exists j, \exists k \leq d \text{ s.t. } i \neq j, j \neq k, k \neq i.$

$\varphi_i(x_1, \dots, x_{n-1}), \varphi_j(x_1, \dots, x_{n-1}), \varphi_k(x_1, \dots, x_{n-1})$
は複素平面内のある実直線上に並ぶ }
(colinear)

$$F := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid 1 \leq i, j, k, \ell \leq d \text{ s.t. } \begin{array}{l} \text{i) } i, j, k, \ell \text{ は互に相異なる,} \\ \text{ii) } \varphi_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \varphi_j(x_1, \dots, x_{n+1}), \varphi_k(x_1, \dots, x_{n+1}), \varphi_\ell(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ \text{は複素平面内の或る円周上に並ぶ} \end{array} \right\}$$

とおき、 E を代数函数 φ の bifurcation diagram と呼ぶ事にしよう。

簡単な事実として、 E 及び F は、 $\mathbb{C}^n$ の (原点の近傍) 部分集合として、 $\mathbb{C}^{n+1}$ 全体に一致しないならば (generic な φ に対してはそうなるが) $\mathbb{C}^n$ の中の real codimension 1 の subvariety である。従って E は $\mathbb{C}^n$ をいくつかの成分に分割し、 F はその分割にある "構造" を与えていると考えられるのであるが、本稿では当面 E に限って、もう少し調べてみる。

命題 i) E は ($\mathbb{C}^n$ と一致しない限り) $\mathbb{C}^{n+1} - D$ 内の non-compact real hypersurfaces E_μ の合併 $E = \bigcup E_\mu$ となり、 $\partial E_\mu \subset D$ 。

ii) discriminant D 上の 1 点 $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ をとってくる。この点で x_n の多項式 h が $\prod_{i=1}^{\ell} (x_n - a_i)^{d_i}$ ($a_i \neq a_j$ for $i \neq j$) と分解し対応して、 X' の近傍で $h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{\ell} h_i(x_1, \dots, x_n)$ (ここで h_i は x_n について d_i 次多項式で $h_i(X', x_n) = (x_n - a_i)^{d_i}$) と分解しているとする。更に h_i の discriminant の点 X' における multiplicity を m_i とする。(勿論この時 discriminant D の点 X' における重複度 $= \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ となる。)

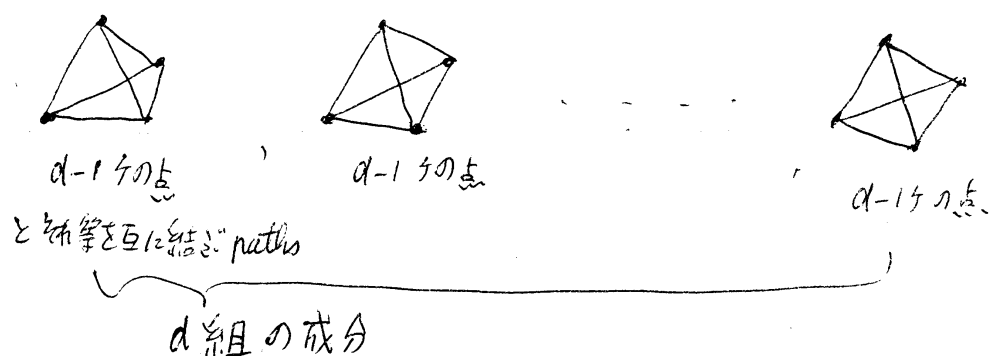
この時 $\partial E_\mu \ni X'$ (つまり X' を境界点に持つ) となる E_μ の個数は $\sum_{i=1}^{\ell} m_i (d - d_i)$ より大きき $(d-2) \times$ 点 X' における D の multiplicity

を越えない。

iii) R が特に $x_1, \dots, x_n$ について d 次 homogeneous 多項式ならば
bifurcation diagram E の成分の個数は $\frac{d(d-1)(d-2)}{2}$ 個を越えない。

iv) S^0 と同様 L を $\mathbb{C}^{n-1}$ 内原点近くを通る複素直線とする

$\{y_1, \dots, y_m\} = L \cap D$, $E' = L \cap E$ とおくと、 E' は discriminant の点 y_i 間を結ぶ path の集合である。ii) で述べた様に例へば y_i の multiplicity が 1 ならば y_i を ~~結ぶ~~^{通す} path は $(d-2)$ -本である。特に R が d 次 homogeneous 多項式でもっとも "generic" なものとする $m = d(d-1)$ である E' bifurcation diagram E' は symbolical に次の様になる。



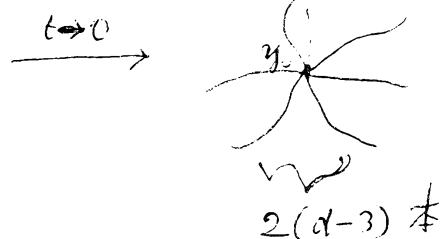
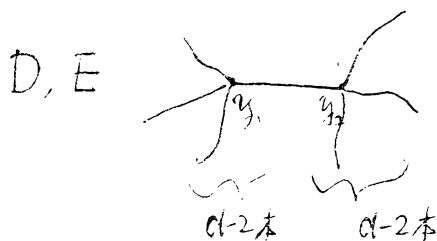
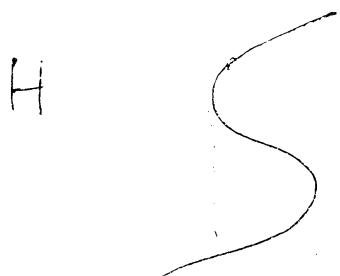
vi)

又 ii) で述べた事実の "解釈" は次の様になる。

例へば y_1, y_2 が multiplicity 1 の点とすればそれぞれから $d-2$ -本の path が出ている。今 R を deform とて y_1 と y_2 を 1 点 y_0 に付け重ねるとその点 y_0 の重複度は 2 となる。しかし実際には 2 つの場合が考えられる。1) y_1, y_2 が両者を結ぶ或る E' の path にあって近ずいた場合、2) y_1, y_2 が両者を結ぶ E' の path (もし

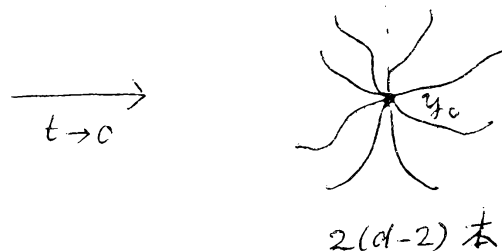
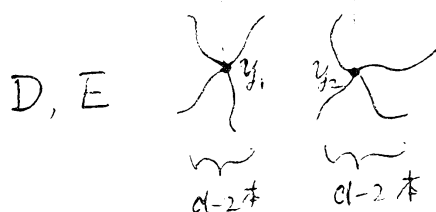
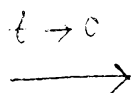
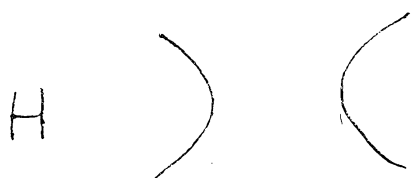
とれがあるとしても)に問わずに、近付く場合

$$1) f_t = x^3 - xt - y \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_0 = x^3 - y$$



$$2) f_t = x^2 - y^2 + t$$

$$f_0 = x^2 - y^2$$



証明 以上の事実を示すのに、curve を用いて、local に示す方法と、Weyl 群を用いて、discriminant E 及び bifurcation diagram E の universal object を構成する方法の 2通り考えられる。