

局所コンパクト群の指標の理論と
リー群の指標の積分表示について

京大 理 平井 武

この稿の目的は、主として、リー群の指標の積分表示に関する結果をまとめ、その方法の将来性と限界とを検討しようということにある。一般には、半単純リー群の場合と異なり可解リー群に対してさえ、その既約ユニタリ表現に指標が定義できるものとできないものがある。その辺の事情を明らかにしておいた方がよいと思われるので、 C^* 代数の理論から局所コンパクト群の指標についての一般論を必要最小限抜き出しまとめてみた。それが序論のうち §1 である。主として J. Dixmier [3(c)] に依っている。§2 では半単純リー群の指標について、今迄得られている結果と使われた方法について概括した。§§3-10 は本論であり、連結リー群を取扱う。§3 ではいわゆる "method of orbits" とくに指標の積分表示とは何かを述べる。一言でいえば、これは G のリー環を $\mathfrak{g}$ の双対空間を $\mathfrak{g}'$ とするとき

coadjoint 表現 (随伴表現の双対) による $\mathfrak{g}'$ の G -軌道を種々利用することである。ついで §4 では 中零群 §5 では Exponential Lie group (可解群の一種), §6 では 可解群を取扱う、A.A. Kirillov, L. Pukanszky による指標の計算 (または積分表示といってもよい) を述べるのであるが、そのためには 既述のユニタリ表現の構成法に触れざるを得ないので、できるだけ簡潔にそれをまとめおいた。§7 では コンパクト半単純群を取扱う §8 では 複素半単純リー群 (E.A. Gutkin), §9 では 実半単純リー群 (M. Duflo) の連続主系列の表現の指標の積分表示について述べた。§10 では Kirillov が一般のリー群の指標を積分表示しようとして作ったプログラムのうち、 G の表現 T を適当な部分群 P の表現 S を誘導して作り、 S の指標が積分表示できれば T でもできるという "reduction theorems" について述べる。彼は一方の極端として 半単純群と中零群をとり、その他の群はそれら極端な場合に関するものとするというのである。

さて、筆者は 命題を述べるに当たっては 条件と結果は厳密に述べた、そして 出所を明らかにして 読者が自ら検索できるようにし、この小文が いささかでも役に立つようにと願った、しかし 殆ど証明は述べられず、また その

信用度についても 私自身検討済みのも ばかりではない
 ことを お断り しておかねば ならない。最後に、§1.6 の
 問題 1.1 や §5-6 の 結果の 拡張 など 一考 の 価値
 がある と思 われる。 (1972)

目次

序論 指標について.

§1. 局所コンパクト群の指標 (一般論)

§2. 半単純リー群の指標 (現状)

本論. リー群の指標の積分表示

§3. Method of Orbits とくに 指標の積分表示について

§4. 中零リー群の表現の構成と指標

§5. Exponential Lie groups の表現の構成と指標

§6. 可解リー群の表現の構成と指標

§7. コンパクト半単純リー群の指標の積分表示.

§8. 複素半単純リー群の連続主系列の表現
 の指標の積分表示

§9. 実半単純リー群の連続主系列の表現の
 指標の積分表示

§10. Kirillov の "Reduction Theorems" について

引用文献表

序論、指標について

§1. 局所コンパクト群の指標 (一般論) [3(1)]

1.1. 記号と定義

今後用いる記号をまとめて表にしておく、今 G を局所コンパクト群とする、

$\hat{G}$: G の既約ユニタリ表現 (IUR) の同値類全体,
位相を考へるときは hull-kernel topology を入れる、

$dg = drg$: G の右不変 Haar 測度、

$\Delta(g) = \Delta_r(g)$: $d(g \cdot g) = \Delta(g) dg$ なる G の modular 函数、

$L^1(G)$: dg に関する L^1 , ノルムは $\|\cdot\|_1$ とかく、

$f \in L^1(G)$; $f^*(g) = \Delta(g)^{-1} \overline{f(g^{-1})}$, $\hat{f}(g) = \overline{\hat{f}(g^{-1})}$.

$f_1, f_2 \in L^1(G)$; $f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(gh^{-1}) f_2(h) dh$.

T : G のヒルベルト空間 H 上のユニタリ表現 ($g \rightarrow T(g)$ 強く連続).

$$T(f) = \int_G T(g) f(g) dg \quad (f \in L^1(G)).$$

$T_1 \simeq T_2$: 2つのユニタリ表現 (UR) T_1, T_2 がユニタリ同値、

とくに G がリ-群とき、

$$\mathfrak{A}(G) = C^*(G)$$

$\mathfrak{U}$ は G のリ-環, $\mathfrak{U}'$ は $\mathfrak{U}$ の双対空間

$$\sigma(X) = \text{ad } X \quad (X \in \mathfrak{U}), \quad \sigma(g) = \text{Ad } g \quad (g \in G)$$

これらの反値表現として $\mathfrak{U}'$ 上に

$$\rho(X) = \text{ad}' X \quad (X \in \mathfrak{g}), \quad \rho(g) = \text{Ad}' g \quad (g \in G).$$

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{H}$ 上の有界, 完全連続, Hilbert-Schmidt 型 (H-S 型), trace class の線型作用素全体をそれぞれ $\mathcal{O}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S$, $\mathcal{M} = \mathcal{J}\mathcal{C}$ と書く.

$$\mathcal{O} \supset \mathcal{C} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{M}.$$

我々は C^* 代数における次の定義を採用する.

定義 1.1. $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 S が trace class であるとは H-S 型作用素 $B_1, B_2, \dots, B_r, C_1, C_2, \dots, C_r$ があって $S = B_1 C_1 + B_2 C_2 + \dots + B_r C_r$ と書けることである. また, $\mathcal{C}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}$ の両側イデアルであり, $\mathcal{H}$ の元の積から生成される部分空間を $\mathcal{H}^2$ とかくと 定義により $\mathcal{M} = \mathcal{H}^2$, また $\mathcal{H}$ が可分ならば $\mathcal{O}$ の両側イデアルは $\{0\}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{O}$ のみである.

命題 1.1.

- (i) $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}$ の operator norm に関する関数 $\|\cdot\|$ はともに $\mathcal{C}$.
- (ii) $\mathcal{O}^+$ を正定値な $\mathcal{O}$ の元全体, $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}^+$ とすると $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ - \mathcal{M}^+$.
- (iii) $\mathcal{M} \ni S$ となる必要十分条件は $\mathcal{H}$ の一つの完全正規直交基底 $\{e_1, e_2, \dots\}$ に対し次式が成立すること.

$$\sum_{i,j} |(S e_i, e_j)| < +\infty.$$

- (iv) $\mathcal{O}^+$, $\mathcal{M}$ の元に対しては trace が自然に定義でき

るが, $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap \mathcal{B}^+ = \{S \in \mathcal{B}^+; \text{tr}(S) < +\infty\}$ である.

1.2. $C^*(G)$ の定義

$f_1, f_2 \in L^1(G)$ に対し

$$\|f_1 * f_2\|_1 \leq \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1, \quad \|f_1^*\|_1 = \|f_1\|_1,$$

であるから $L^1(G)$ は involutive Banach algebra であるから
これから次のように C^* 代数 $C^*(G)$ を作る.

$$f \in L^1(G), \quad \|f\| = \sup_T \|T(f)\| \leq \|f\|_1$$

(T は G の IUR 全体を動かす) により新しいノルムを定義する. $\|f\| = 0$ ならば $f = 0$ である. $\|\cdot\|$ に際する $L^1(G)$ の完備化を $C^*(G)$ と書けば, これは C^* 代数である. そして G の UR, $g \rightarrow T(g)$ が, $L^1(G)$ の非退化な $*$ -表現 $f \rightarrow T(f)$ ($T(f^*) = T(f)^*$) と 1-1 に対応するのと同様に $C^*(G)$ の非退化な $*$ -表現とも 1-1 に対応する.

しばらく $A = C^*(G)$ とかく. $A^+ = \{yy^*; y \in A\}$ とおけば, $\forall x = x^* \in A$ に対し $\exists x^+, x^- \in A^+$ 2

$$x = x^+ - x^-, \quad x^+ x^- = x^- x^+ = 0, \quad \|x^\pm\| \leq \|x\|, \quad \|x^+ + x^-\| = \|x\|$$

となる.

1.3. 既約表現の指標

いま G の IUR, T をとり これを $A = C^*(G)$ の表現と思って C^* 代数の一般論を適用する [3(1)].

$$\text{Ker}_A(T) = \{x \in A ; T(x) = 0\} \text{ とおく,}$$

命題 1.2.

(i) $T(A) \cap \mathcal{C} \neq \{0\}$ ならば $T(A) \supset \mathcal{C}$.

(ii) $T(A) \supset \mathcal{C}$ とする. 別の IUR, T' が

$$\text{Ker}_A(T) = \text{Ker}_A(T') \text{ を満たせば } T \simeq T'.$$

(iii) $T(A) \cap \mathcal{C} = \{0\}$ とすると, $\text{Ker}_A(T) = \text{Ker}_A(T')$ を満たす互に互等値でない IUR, T' が連続濃度存在する.

定義 1.2. IUR, T が $T(A) \subset \mathcal{C}$, 従って, $T(A) = \mathcal{C}$ を満たすとき T を CCR (completely continuous represen.) という. T が $T(A) \supset \mathcal{C}$ を満たすとき T は 指標 (character) を持つという. G の全ての IUR が CCR のとき, G を CCR という. また G の全ての IUR が指標を持つとき, G を GCR という.

いま, $T(A) \supset \mathcal{C}$ とする. A の両側イデアル $\mathcal{W}_T, \mathcal{W}_T$ を

$$\mathcal{W}_T = \{x \in A ; T(x) \in \mathcal{X} = \mathcal{H}\mathcal{H}\},$$

$$\mathcal{W}_T = \{x \in A ; T(x) \in \mathcal{M} = \mathcal{J}\mathcal{C}\},$$

とおくと, $\mathcal{W}_T = \mathcal{W}_T^2$ で $\mathcal{W}_T$ と $\mathcal{W}_T$ の関係は同じである.

定義 1.3. T の 指標 π_T とは $\mathcal{W}_T$ CA 上の次の函数である.

$$\pi_T(x) = \text{tr}(T(x)) \quad (x \in \mathcal{W}_T).$$

また, T の hitrate S_T とは $\mathcal{W}_T \times \mathcal{W}_T$ 上の次の函数である,

$$S_T(x, y) = \text{tr}(T(y)^* T(x)) \quad (x, y \in \mathcal{W}_T).$$

一方, $T(A^+) \subset \mathcal{O}_3^+$ であるから, A^+ 上で $\pi_T(x) = \text{tr}(T(x))$ が定義できるが, $\mathcal{W}_T^+ = \mathcal{W}_T \cap A^+$ とおけば

$$\mathcal{W}_T^+ = \{x \in A^+ ; \pi_T(x) < +\infty\},$$

$$\mathcal{W}_T = \mathcal{W}_T^+ - \mathcal{W}_T^+ + \sqrt{-1}(\mathcal{W}_T^+ - \mathcal{W}_T^+),$$

であるから, π_T を A^+ 上で考えるのも $\mathcal{W}_T$ 上で考えるのと同じことである.

命題 1.3. T を G の指標を持つ IUR とする. 他の IUR T' が $T' \simeq T$ となる必要十分条件は T' も指標を持ち $\pi_{T'} = \pi_T$ となることである. (以上)

簡単に分るように, T が CCR である必要十分条件は $T(L(G)) \subset \mathcal{C}$. また, T が指標を持つとは $\overline{T(L(G))} \supset \mathcal{C}$ (左辺は operator norm に関する閉包).

また, 次のことが知られている.

(1) 連結半単純リー群 (Harish-Chandra), 連結中絶リー群 (Dixmier [36]), $\mathbb{R}$ 上の線型代数群 (Dixmier) は CCR である.

(2) $G \subset \mathbb{R}$ でない可解リー群が存在する (Mautner).

(3) 局所コンパクト群 G が可分ならば,

$$G \text{ が } GCR \iff G \text{ が type I (Glimm)}.$$

しかし、一般には $GCR \implies \text{type I}$.

(4) 局所コンパクト群 G に対し,

IUR, π が $CCR \iff \hat{G}$ の一員 $[\pi] = \pi$ の同値類, が関.

例 1.1. 実直線の変換群: $x \mapsto ax + b$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

は GCR であるが CCR でない. 無限次元の IUR が 2 個あるが, それらはいずれも CCR でない.

1.4. 既約表現の指標と hitrace の性質

一般の C^* 代数 A に対し, A^+ 上のある種の正値関数として trace が定義され, また下の定義 1.4 のように hitrace も定義される. この 2 つの概念はかなりうまく対応している. 我々が上で定義した $A = C^*(G)$ の既約表現の指標 (character) は trace の特殊なものである. しかも $\mathcal{W}_T = \mathcal{W}_T^2$ であるから $\text{character } \pi_T$ と $\text{hitrace } S_T$ とは互に他を決定する. 我々は既約表現しか扱わないので trace , hitrace の一般論には立ち入らず その範囲で必要な事実を述べる. G の IUR, π の指標 π_T の性質を直接述べるには種々の用語を準備しなければならないが, それを対応する $\text{hitrace } S_T$ を用いて部分的

になら述べる事ができる,

定義 1.4. A を任意の C^* 代数とする, A の litrace S とは, 次の条件 (S1) ~ (S5) を満たす 函数 $S: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ である, ここに, $\mathcal{W}$ は A の 1 元とは限らぬ 両側イデアルで $\mathcal{W} = \mathcal{W}^*$ なるものであり, S の 定義イデアル と呼ばれる,

$$(S1) \quad S(x, y) \text{ は } x \text{ に関し線形型,} \\ S(y, x) = \overline{S(x, y)}, \quad S(x, x) \geq 0.$$

$$(S2) \quad S(y, x) = S(x^*, y^*) \quad (x, y \in \mathcal{W}).$$

$$(S3) \quad S(zx, y) = S(x, z^*y) \quad (x, y \in \mathcal{W}, z \in A).$$

$$(S4) \quad \forall z \in A: \frac{1}{\lambda} + \nu, \mathcal{W} \ni x \mapsto zx \in \mathcal{W} \text{ は, } \mathcal{W} \text{ の} \\ S \text{ から決まる pré-Hilbert 空間の構造に関し連続.}$$

$$(S5) \quad \text{集合 } \{xy; x, y \in \mathcal{W}\} \text{ は上の構造に関し,} \\ \mathcal{W} \text{ に到る処稠密である.}$$

また litrace S が 極大 であるとは S の本当の拡張が存在しないことである,

さて, $A = C^*(G)$ とするとき, G の IUR, T の litrace S_T の 定義イデアル は $\mathcal{W}_T$ であるとする,

命題 1.4.

G の IUR, T の litrace S_T は $A = C^*(G)$ の 極大 な litrace である,

1.5, 指標としての測度, 超函数 (distribution)

次の補題が重要である.

補題 1.5. A を C^* 代数とし, A' を部分代数とし $(A')^* = A'$, かつ A に至る処稠密なものをとする. $A' \times A'$ 上の複素函数 $S' \neq 0$ が次の条件 (S'1) ~ (S'5) を満たせば, S' は A の極大な Litha に一意的に拡張される.

(S'1) $S'(x, y)$ ($x, y \in A'$) は (広義の) 正定値 hermitian form である.

(S'2) $S'(y, x) = S'(x^*, y^*)$ ($x, y \in A'$).

(S'3) $S'(zx, y) = S'(x, z^*y)$ ($x, y, z \in A'$).

(S'4) $S'(zx, zx) \leq \|z\|_A^2 \cdot S'(x, x)$ ($x, z \in A'$).

(S'5) 集合 $\{xy : x, y \in A'\}$ は S' から定まる pré-Hilbert 空間の構造に際し, A' に至る処稠密である.

さて, 我々は $A = C^*(G)$ に代り, $A' = C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ とするのである. 11, G の IUR, T が $A' \subset \mathcal{U}_T$ であり,

$T(x)$ H-S 型 ($\forall x \in A'$) を満たすとする. すると T は CCR となり 従って 指標を持つ T が $S' = S_T|_{A' \times A'}$:

$$S'(x, y) = \text{tr}(T(y)^* T(x)) \quad (x, y \in A')$$

は (S'1) ~ (S'5) を満たす. 上の補題によれば S_T は S' から一意に定まる Litha で $A' = C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ に代り S' が求まれば 一応 指標 S_T が求まったと言えるのである. 表現論では

普通 $(S'(G))$ などは考えないから S_T よりむしろ S' の方が馴染深い。実際には $(S'4)$ と $(S'5)$ が満たれることを示そう。 T の表現空間 H の正規直交基底 $\{e_i\}_{i \geq 1}$ をとると,

$$\begin{aligned} S'(zx, zx) &= \sum_{i \geq 1} \|T(z)T(x)e_i\|^2 \\ &\leq \|T(z)\|^2 \cdot \sum_i \|T(x)e_i\|^2 \leq \|z\|_A^2 \cdot S'(x, x). \end{aligned}$$

また, $x_v (v \rightarrow e)$ を A' の approximate identity とすると,

$$\forall y \in A', \quad T(x_v y) \rightarrow T(y) \quad (v \rightarrow e) \text{ (強収束)},$$

従って, $v \rightarrow e$ とき

$$S'(x_v y - y, x_v y - y) = \sum_i \|(T(x_v y) - T(y))e_i\|^2 \rightarrow 0.$$

すなわち, 内積 S' に関し $x_v y \rightarrow y (v \rightarrow e)$.

以下この節では, μ によって, 局所コンパクト群 G 上の (複素数値 Radon) 測度, または 1 -群 G 上の超函数を表わす. 前者の場合 $A' = C_0(G)$, 後者の場合 $A' = \mathcal{D}(G)$ とおく.

定義 1.5. G 上の Radon 測度 または 超函数 μ が 不変 であるとは

$$\mu(f g_0) = \mu(f) \quad (\forall g_0 \in G, f \in A')$$

を満たすことあり, μ が 正定値 であるとは,

$$(*) \quad \mu(\tilde{f} * f) = (\Delta^{\frac{1}{2}} \mu)((\Delta^{-\frac{1}{2}} f)^* * (\Delta^{-\frac{1}{2}} f)) \geq 0 \quad (\forall f \in A')$$

を満たすことある. ここに,

$$f^{g_0}(g) = \Delta(g_0) f(g_0 g g_0^{-1}), \quad \tilde{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}, \quad f^*(g) = \Delta(g^{-1}) \overline{f(g^{-1})}.$$

また, $\tilde{f} * f = \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot (\Delta^{-\frac{1}{2}} f)^* * (\Delta^{-\frac{1}{2}} f)$ であるから, $(*)$ は

$$(**) \quad (\Delta^{\frac{1}{2}} \mu)(f^* * f) \geq 0 \quad (\forall f \in A'),$$

と同値である. G 上の函数 $\varphi(g)$ と測度 $\varphi(g)dg$ を同一視する. 連続函数 φ が 正定値 であるとは, 以下の如く,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varphi(g_i g_j^{-1}) z_i \bar{z}_j \geq 0 \quad (z_i \in \mathbb{C})$$

ということとする. これは測度 $\varphi(g) \Delta^{\frac{1}{2}}(g) dg$ が正定値であると同値である. すなわち, $\int_G (f^* * f)(g) \varphi(g) dg \geq 0 \quad (\forall f \in A')$. さらに, φ が内部自己同型で不変であれば $\varphi(g) \Delta^{\frac{1}{2}}(g) dg$ は不変である.

注意 1.1. 右不変測度 dg を drg , 左不変測度 $\Delta(g^{-1})dg$ を $d\ell g$ と書き, $dr(g_0 g) = \Delta_r(g_0) drg$, $d\ell(g g_0) = \Delta_\ell(g_0) d\ell g$ とおくと $\Delta_r(g_0) = \Delta_\ell(g_0)^{-1} = \Delta(g_0)$. 上の定義によれば,

$$\Delta_r^{-\frac{1}{2}}(g) drg = \Delta_\ell^{-\frac{1}{2}}(g) d\ell g (= \Delta^{\frac{1}{2}}(g) dg)$$

は正定値であるが, drg , $d\ell g$ は正定値ではない. 我々は G 上の測度 $\Delta^{\frac{1}{2}}(g) dg$ を左右に偏向していないという意味で標準にとろうという訳である.

命題 1.6. $A = C^*(G)$ とし, μ を G 上の測度または超函数, 対応して $A' = C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ とする.

$$\begin{aligned} S^\mu(f_1, f_2) &\stackrel{\text{def}}{=} (\Delta^{\frac{1}{2}} \mu)(f_2^* * f_1) \\ &= \mu((\Delta^{\frac{1}{2}} f_2)^* * (\Delta^{\frac{1}{2}} f_1)) \quad (f_1, f_2 \in A') \end{aligned}$$

が補題 1.5 の条件 (S'1) ~ (S'5) を満たすための必要十分条件は μ が不変正定値であることである.

従って μ が不変正定値の時, $A' \times A'$ 上の S^μ は A の

極大な hitnae に一意的に拡張される言式"が, それを S^M と書く.

定義 1.6. G の IUR, T の指標が測度または超函数 μ であるとは, T が指標をもち, かつ, $S_T = S^M$ となっていることである.

命題 1.7. G の IUR, T の指標が測度 (または超函数) μ であるための必要十分条件は

$$1) \quad \forall f \in C_0(G) \text{ (または } \mathcal{D}(G)), \quad T(f) \text{ は H-S 型.}$$

$$\text{すなわち} \quad C_0(G) \text{ (または } \mathcal{D}(G)) \subset \mathcal{W}_T.$$

$$2) \quad \begin{aligned} \pi_T(f_2^* * f_1) &= \text{tr}(T(f_2^* * f_1)) = \text{tr}(T(f_2)^* T(f_1)) \\ &= (\Delta^{\frac{1}{2}} \mu)(f_2^* * f_1) \quad (f_1, f_2 \in C_0(G) \text{ または } \mathcal{D}(G)). \end{aligned}$$

注意 1.2. 上の 2) からわかるように, 我々は標準的測度として $\Delta^{\frac{1}{2}}(g) dg$ をとっている言式である. また, T の指標が測度または超函数であれば, 1) からわかるように $T(L^1(G)) \subset \mathcal{C}$ となり T は CCR ではないからではない.

注意 1.3. T の指標が μ であるとは, $C_0(G)$ または $\mathcal{D}(G)$ が $\mathcal{W}_T$ (i.e. $T(f)$ H-S 型) にはあるが, $\mathcal{W}_T$ (i.e. $T(f)$ trace class) には要求していないのである. しかし, 連結な単純または巾零リー群 G に対しては $\forall$ IUR, T の指標は, 上の意味で超函数 μ であるのみならず, さらに, $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{W}_T$, かつ, $\pi_T(f) = \text{tr } T(f) = \mu(f) \quad (\forall f \in \mathcal{D}(G))$,

ともなっている ($\Delta \equiv 1$). 一方, Putnamsky の結果を見れば "Exponential Lie group に対しては, $\mathcal{Q}(G) \subset \mathcal{W}_T$ とは限らず", 定義 1.6, 命題 1.7 による hitra を経て指標 π_T と超函数 μ とをつなぐということは本質をつかんでいいる如く思われる.

1.6. 指標と reduced dual

局所コンパクト群 G に対し, その (右) 正則表現 $\mathbb{R}$ の $\hat{G}$ での台を G の reduced dual といい $\hat{G}_r$ と書く. すなわち, G の IIR, T の同値類を $[T]$ と書けば,

$$\hat{G}_r = \{ [T] \in \hat{G} ; T \text{ is weakly contained in } \mathbb{R} \}.$$

G を可分 $\mathcal{U}$ -モジュラー (i.e., $\Delta \equiv 1$) とすると, $\mathbb{R}$ を factor 表現に分解して, いわゆる Plancherel の公式が成立する (F.I. Mautner, I.E. Segal). とくに G が I^∞ ならば, Plancherel 測度 μ_0 は $\hat{G}_r$ 上に乗っていて, $\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G)$,

$$\int_G |H(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}_r} \text{tr}(T(f)^* T(f)) d\mu_0([T]) = \int_{\hat{G}_r} \pi_T(f^* f) d\mu_0([T]).$$

この公式は次の命題を踏まえている.

命題 1.8. G を I^∞ 可分 $\mathcal{U}$ -モジュラー群とすると, μ_0 に属する $\forall$ $[T] \in \hat{G}_r$ に対し,

$$L^1(G) \cap L^2(G) \subset \mathcal{W}_T \quad (\text{すなわち, } T(f) \text{ H-S 型}).$$

かかる T に対しては, 前述のように, hitra S_T のかわりに,

$S' = S_T | C_0(G) \times C_0(G)$, を考えれば十分である.

一方, 最近 辰馬 氏 は Plancherel の公式を可分非ユニモジュラー G に拡張した [13]. それを I 型の場合に制限すると次のことが分る (*). $H = \{g \in G; \Delta(g) = 1\}$ とおく, まず, "殆ど" 全ての $[T] \in \hat{G}_r$ は, H の IUR (L, H^L) の誘導表現として $T = \text{Ind}_{H \uparrow G} L$ と表わされる. §§4-6 で必要な誘導表現の作り方をここで述べる. $H \backslash G$ 上の quasi-invariant な測度 ν を一つ固定し, $d\nu(yg_0) = m(y, g_0) d\nu(y)$ ($y \in H \backslash G$) とおく. T の表現空間 H^L は G 上の可測 H^L -値関数 φ で

$$\begin{aligned} \varphi(hg) &= L_h \varphi(g) \quad (\forall h \in H, \text{ a.e. } g \in G), \\ \int_{H \backslash G} \|\varphi(g)\|_{H^L}^2 d\nu(\tilde{g}) &< +\infty \quad (\tilde{g} = Hg). \end{aligned}$$

を満たすものの全体である. そして,

$$T(g_0) \varphi(y) = m^{\frac{1}{2}}(y, g_0) \varphi(yg_0).$$

さて, H^L 上の 非有界作用素 $T_{\Delta^{\frac{1}{2}}}$ を

$$(T_{\Delta^{\frac{1}{2}}} \varphi)(g) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{\frac{1}{2}}(g) \varphi(g)$$

とおくと, Plancherel の公式は次のようになる.

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}_r} \text{tr}[(T_{\Delta^{\frac{1}{2}}} T(f))^* (T_{\Delta^{\frac{1}{2}}} T(f))] d\mu_0([T]) \quad (\forall f \in C_0(G)).$$

そして, この公式は次の命題を導きだしている.

命題 1.9 [13]. G を I 型, 可分, 非ユニモジュラーとする. 殆ど全ての $[T] \in \hat{G}_r$ は $H = \{g \in G; \Delta(g) = 1\}$ からの誘導表

(*) G は自然に $\hat{H}_r$ に属すが, その G -軌道の空間が, G. W. Mackey の意味で countably separated であることが仮定されている. けれどこの仮定は不要であろうと辰馬氏は言っている.

現として得られ, また,

$$T_{\Delta/2} T(f) \text{ H.-S. 型 } (\forall f \in \mathcal{O}(G)).$$

いま, G を上の命題と同じとする. G は GCR になるので, 全ての $[T] \in \hat{G}$ は指標を持つ. しかし, $\mathbb{C}$ には必然的に $\mathcal{C}^*(G)$ を持ち出すなくてはならない. 何故なら, $\mathcal{O}(G) \subset \mathcal{U}_T$ とは限らないので, $\text{hitnae } S_T$ から $S' = S_T|_{\mathcal{O}(G) \times \mathcal{O}(G)}$ に移る言及に出来ないからである. しかし, 上の履馬付の結果によれば, 少なくとも, $\mathbb{C}$ と全ての $[T] \in \hat{G}_r$ に文付して,

$$S'(f_1, f_2) = \text{tr}[(T_{\Delta/2} T(f_2))^* (T_{\Delta/2} T(f_1))] \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{O}(G))$$

が定義できる.

問題1.1. S' を特徴付ける性質は何か? また S_T は S' から一意的に決まるのであろうか?

なお, $\hat{G}_r$ に関し次のことが知られている.

命題1.10.

(i) G を局所コンパクト群とする.

$$\hat{G} = \hat{G}_r \iff \hat{G}_r \ni 1 \text{ (1は trivial 表現).}$$

(ii) G を連結実リー群とする. R を G の radical としとき,

$$G/R \text{ コンパクト} \implies \hat{G} = \hat{G}_r$$

例えば, 連結中零リー群に文付しては, $\hat{G} = \hat{G}_r$ である.

§2. 半単純リー群の指標 (現状)

G を連結実半単純リー群とする. G の IUR, T はつねに

$\mathfrak{g}(G) \subset \mathcal{M}_T$ とするばかりでなく, $\mathfrak{g}(G) \ni f \mapsto \pi_T(f) = \text{tr}(T(f))$ は超函数である. さらに, $\mathfrak{g}$ となりてないう立相対的既約表現 $(T, \mathcal{H})$ が quasi-simple ならば同じことが成立する. いま, Z_G を G の中心, $\mathfrak{z}$ を G のラプラス作用素全体のなす環とする. $\mathcal{H}^0$ を $T(f)v$ ($f \in \mathfrak{g}(G)$, $v \in \mathcal{H}$) で張られる部分空間 (Garding subspace) とする.

定義 2.1. G の立相対的既約表現 $(T, \mathcal{H})$ が quasi-simple である (記号: QSIR) とは, Z_G から $\mathbb{C}^\times$ への準同型 χ , $\mathfrak{z}$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型 λ があって

$T(z) = \chi(z) 1_{\mathcal{H}}$ ($z \in Z_G$), $T(Z)|_{\mathcal{H}^0} = \lambda(Z) 1_{\mathcal{H}^0}$ ($Z \in \mathfrak{z}$),
を満たすものである. (χ, λ を T の central, infinitesimal character という.)

T を QSIR とすれば, $\pi_T \in \mathfrak{g}'(G)$ は内部自己同型で不変で

$$\sum \pi_T = \lambda(Z) \pi_T \quad (\forall Z \in \mathfrak{z})$$

を満たす. すなわち, π_T は G 上の不変固有超函数である. さらに, π_T は G の正則元全体 G' 上で実解析的な局所可積分函数と一致する (Harish-Chandra).

さて, $G = KAN$ を岩沢分解とする. K の有限次元既約表現の同値類を δ で表わし, $\mathcal{H}(\delta)$ を $T|_K$ の下で δ に従って

変換されるベクトルの全体とする. 任意の $\mathcal{QSIR}, T$ に対し,

$$\dim \mathcal{H}(\delta) \leq N(\dim \delta)^2 \quad (\forall \delta, \exists N \text{ は定数})$$

となる. 一方, 新屋 G の結果 [12] によれば, 位相的既約表現 $(T, \mathcal{H})$ に対し, G が忠実な有限次元表現を持つとき,

$$(\exists \delta_0) \quad 0 < \dim \mathcal{H}(\delta_0) < +\infty \implies (\forall \delta) \quad \dim \mathcal{H}(\delta) \leq (\dim \delta)^2$$

となる. これから次のことが証明される.

命題 2.1. 位相的既約表現 $(T, \mathcal{H})$ に対し (G が上の条件を満たすとき),

$$T \text{ が quasi-simple} \iff (\exists \delta_0) \quad 0 < \dim \mathcal{H}(\delta_0) < +\infty.$$

G の $\mathcal{QSIR}, T$ の指標について詳しくは論説 [7(e)] を見ていただくことにして, ここでは, 現在まで指標を求めるのにどういう方法が用いられて来たかについて簡単に述べる.

第一の方法. G のある関部分群 P をとり, その既約表現 $\mathcal{L}$ を誘導して G の既約表現 T を作る. そして T の指標 π_T を $\mathcal{L}$ の指標 $\pi_{\mathcal{L}}$ を用いて書き表わす. この方法での問題は次の3つである. (i) $\text{Ind}_{P \uparrow G} \mathcal{L} = T$ の既約性の証明, (ii) π_T を $\pi_{\mathcal{L}}$ で書き表わす公式を作ること ([7(c)], [10] 参照). (i) で述べた沢山の T を誘導表現の形で実現すること.

第二の方法. $G = KAN$ と岩沢分解し, M を A の K_1 における中心化群, $B = MAN$ とおく. B の有限次元既約表現 $\mathcal{L}$ を G に誘導した表現 $T^{\mathcal{L}}$ を elementary representation (記号: ER) という. $T^{\mathcal{L}}$ は殆ど必ずしも既約でないが, 可約でも,

高々有限個の既約成分しか持たず、それら既約成分は全て共通の central, infinitesimal character (χ, λ) を有する QSIR である。また (χ, λ) を一組とすれば、それを有する QSIR は (infinitesimal equivalence を除いて) 有限個 $T_1, T_2, \dots, T_r$ しかない。指標は上の同値性による同値類に属してあるのである。そこで $\pi_i = \pi_{T_i}$ とし、 $T^\mathbb{L}$ の既約成分として T_i の表れる重複度 $m_i = [T^\mathbb{L} : T_i]$ が決定できたとすれば、次の等式を得る。

$$(2.1) \quad m_1 \pi_1 + m_2 \pi_2 + \dots + m_r \pi_r = \pi_{T^\mathbb{L}}.$$

同じ (χ, λ) を有する $T^\mathbb{L}$ は有限個あるから、(2.1) により、 $\pi_1, \dots, \pi_r$ の連立一次方程式系を得る。

この方程式系は一般には過小決定系である。とくに G が複素半単純ならば完全決定系であることが Zelobenko の “minimal representations” に関する結果から分る ([74] 参照)。また $SO_0(n, 1)$, $SU(n, 1)$ に属しては、離散系列の表現 (= 乗可積分な IUR) の指標を別個に求め、さらに有限次元表現の Weyl の指標公式を用いることにより連立方程式 (2.1) が解ける。かくて、 $SO_0(n, 1)$ の全 2 の、 $SU(n, 1)$ の 3 台と全 2 の QSIR の指標が得られる [7(a), (b)]。

G がある条件を充てば (とくに G が忠実な表現を持つば) 任意の QSIR はある ER, $T^\mathbb{L}$ の既約成分に infinitesimally equivalent である。これは連立方程式 (2.1) の有交条件を意味する。

この方法の重要な段階は、

(イ) (χ, λ) を与えたとき, $T_1, \dots, T_r$ を同定し, 重複度 $m_i = [T_i: T_i]$ を求めること.

(ロ) 得られた連立方程式 (2.1) が過小決定系であるとき, 他の情報も求めること (離散系列の表現の指標など).

第三の方法. $QSIR$, T の指標を特別な不変固有超関数として特徴付け, それを具体的に計算する. 以下には, 離散系列の表現の指標は, Harish-Chandra により, G 上の緩増大不変固有超関数であって, G のコンパクト Cartan 部分群上である特定の形を持つものとして特徴付けられた. この超関数は局所可積分な関数であるが, G の他の Cartan 部分群上での具体的な形を求める方法は [7(e)] に与えられている. $Sp(2, \mathbb{R})$ (rank 2) に対して計算した結果 [7(e)] を見ても分かるように, その形は Weyl の指標公式の如く簡明ではない. また, この方法と第一の方法とを組合せると, G の中心 Z_G が有限なとき, G の主系列の IUR (すなわち, $\hat{G}_r$ に属する表現) の殆ど全ての指標を計算することが出来る筈である.

その他の方法(1). Atiyah-Bott は elliptic complex に対する Lefschetz fixed point formula をコンパクト半単純群の表現に應用して, Weyl の指標公式を得た [1]. この方法は見掛け上 $\chi =$ の方法に似ている. すなわち, 問題の

IUR, T_1 を何個かの無限次元表現の中に埋め込み, (2.1) と類似の連立一次方程式を得る. Hopf の跡定理を用いて, $\pi_2, \dots, \pi_r$ を消去することができると T_1 の指標 π_1 が求まる. さて, これをコンパクトでない半単純リー群 G の拡張しようとするとき直ちに直面する困難は次の点である. G の IUR, T を部分群 P の表現 χ を “誘導” して作ったとすると “fixed points” として知られるのは gPg^{-1} ($g \in G$) の合併集合 E の元であろう. ところが T の指標 π_T は E の外にも乗っており, ここでは “Lefschetz fixed point formula” からだけでは π_T は計算できないのではなかろうか?

その他の方法(2). A.A. Kirillov, E.A. Gutkin, M. Duflo 等によるいわゆる指標の積分表示 (§§3, 8, 9 参照). これは特殊な目的で特殊な IUR を取扱うには有効であろうが, 一般には §9 で述べるように方法としてある限界を内包しているのではないかと. これはまた指標を函数として求めるという方向とは別のものであり, 特に長所があるかどうか検証すべき問題である. Hyperfunction の理論がここに応用できるのではないかとする意見もある.

本論 リー群の指標の積分表示

§3. "Method of Orbits", とくに指標の積分表示について.

3.1. G を連結リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー環, $\mathfrak{g}'$ を $\mathfrak{g}$ の双対空間とする. 随伴表現とその反像をそれぞれ σ, ρ と書く. $\rho(G)$ による $\mathfrak{g}'$ の軌道全体の空間を $\mathfrak{g}'/\rho(G)$ とかく. $f \in \mathfrak{g}'$ を通る軌道を $O_f = \rho(G)f$ とかく. J. Dixmier や A.A. Kirillov による連結可解リー群 G の表現論には軌道や軌道空間 $\mathfrak{g}'/\rho(G)$ が重要な役割を果たしている. 要約すれば G の IUR と軌道とは次の3つの側面に関連している [8(a)].

(A) 既約表現の構成に軌道が用いられる. それにより $\mathfrak{g}'/\rho(G)$ の全単射がえられる.

(B) 既約表現の指標を対応する軌道上の不変測度の Fourier 変換を用いて表示できる (指標の積分表示).

(C) 殆ど全ての既約表現 (次元が最大の軌道に対応するもの) はその infinitesimal character で特徴づけられるが またこの inf. character は対応する軌道をも特徴づける ([8(a), §2, Prop. 1] 参照).

さてこの小文では主として (B) 項の結果を概観する. それに必要な範囲で (A) 項についても触れる. この (A) 項に関しては一般論として Kostant [9(a), (b)], I 型可解群に対する実現

として Auslander-Kostant [2] を参照せたい。

3.2. 指標の積分表示とは何かを述べよう、軌道 $O \subset \mathfrak{g}'$ と O 上の G -不変測度 dv をとり、 dv を $\mathfrak{g}'$ 上の超函数とみなして、その Fourier 変換

$$(3.1) \quad \mathcal{F}(dv) = \int_0 e^{i(x, f)} dv(f)$$

を考える。すなわち、 $\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に対し、

$$(3.2) \quad \hat{\phi}(f) = \int_{\mathfrak{g}} e^{i(x, f)} \phi(x) dx \quad (f \in \mathfrak{g}')$$

(dx は $\mathfrak{g}$ 上のルベ-グ測度) とおくと、

$$(3.3) \quad \langle \mathcal{F}(dv), \phi \rangle = \langle dv, \hat{\phi} \rangle.$$

いま $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ をとり、

$$(3.4) \quad \varphi'(x) = \varphi(\exp x) \quad (x \in \mathfrak{g}),$$

により $\varphi' \in C^\infty(\mathfrak{g})$ をうるが、 $\text{supp } \varphi, \text{supp } \varphi'$ は条件を付けることにより $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ とする。 φ と φ' が 1-1 対応を成すとき φ と φ' を同一視して $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ とおき、 $[T] \in \hat{G}$ に対し、 $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ のある族 $\mathfrak{D}$ があって、

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \pi_T(\varphi) &= \text{tr}(\pi(\varphi)) = \langle \mathcal{F}(dv), \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp x) p(x) \varphi(x) \rangle \\ &= \langle dv, (\Delta^{\frac{1}{2}} p \cdot \varphi)^\wedge \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathfrak{D}), \end{aligned}$$

となるとき、

$$(3.6) \quad \Delta^{\frac{1}{2}} p \cdot \mathcal{F}(dv) = \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp x) p(x) \int_0 e^{i(x, f)} dv(f)$$

を族 $\mathfrak{D}$ に対する指標 π_T の積分表示という。こゝに Δ は G

の modular 函数, $p(x) \in C^{\infty}(U)$ で $p(0)=1$ と規格化しておく.
注意 3.1. 上で $\Delta^{1/2}(\exp X)$ を 作り出したのは 命題 1.6, 1.7 を考慮にのちである. また $\mathfrak{O} \cap \{\varphi^* \varphi; \varphi \in \mathcal{O}(G)\}$ ならば, 補題 1.5 ($A' = \mathfrak{O}(G)$) により 積分表示 (3.6) は 指標 π_T を完全に決定している. 従って 指標 π_T が 決まったと言える.

3.3. 今後 いつも表わす $\mathcal{O}$ 上の 標準的 G -不変測度について述べる. $f \in \mathcal{O}$ に対し 表現 ρ の下での f の 固定群を G_f , その $\mathbb{R}$ -環を $\mathcal{O}_f$ と書く.

$$(3.7) \quad B_f(x, y) = ([x, y], f) \quad (x, y \in \mathfrak{U})$$

により $\mathfrak{U}$ 上の 2 次交代形式を得る. 一方,

$$(3.8) \quad \alpha_f(g) = \rho(g)f \quad (g \in G)$$

は写像 $\alpha_f: G \rightarrow \mathcal{O}$ を与え, これから $d\alpha_f: \mathfrak{U} \rightarrow T_f(\mathcal{O})$ (核 $\mathcal{O}_f$) を得る. そして,

$$(3.9) \quad d\alpha_f(\omega_f) = B_f$$

を満たす $T_f(\mathcal{O})$ 上の 2 次交代形式 ω_f が一意に決まる. 実は ω_f は 確かに 非縮退である [9(a)]. 従って $\dim \mathcal{O} = 2$ は 確かに 偶数である. こうして得られた $\mathcal{O}$ 上の G -不変 2 次微分形式 ω の 左側外積 $\wedge^k \omega \neq 0$ は $\mathcal{O}$ 上の G -不変 最高次微分形式を与える. これは $\mathcal{O}$ 上の G -不変測度を与え, 他の G -不変測度は これの 正定数倍である.

G 上の右不変測度 dg の $\mathfrak{g}$ 上の測度 dX には Radon-Nykodim の微分係数は

$$\frac{d(\exp X)}{dX} = \text{const.} \left| \det \left(\frac{e^{\text{ad} X} - 1}{\text{ad} X} \right) \right|.$$

次のような標準的な $d\nu$ がしばしば表れる ($2k = \dim \mathfrak{O}$).

$$(3.10) \quad d\nu = \left(\frac{d(\exp X)}{dX} \right)_{X=0} \cdot \frac{1}{k! (4\pi)^k} \cdot \wedge^k \omega$$

この式は L. Pukanszky の論文 [11] (c), (d), (e) に表れる. また A.A. Kirillov [8] (b), (c), (d)], E.A. Gutkin [5], M. Dufló [4] では上と $2k$ だけ異なる次の

$$(3.11) \quad d\nu = \left(\frac{d(\exp X)}{dX} \right)_{X=0} \cdot \frac{1}{k! (2\pi)^k} \cdot \wedge^k \omega$$

が表れる. 中零群, Exponential Lie group (ELG) 等では両者は矛盾しているが, この小文では証明のある Pukanszky に依る. なお [8] (b), (c)] はかぎりの言葉を含むのに注意を要する. 従って, この分の証明のはっきりせぬ主張は割愛した.

§4. 中零リー群の表現の構成と指標

この節では, G を連結, 単連結中零リー群とする. このとき $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ は $\mathfrak{g}$ と G の解析的同型を与え, この同型により急減少の函数の空間 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ に対応する $\mathcal{S}(G)$ を定義する.

(A) 既約表現の構成 (Dixmier, Kirillov [8(a)]). $f \in \mathfrak{g}'$ の固定群を G_f , 中零リー環を $\mathfrak{g}_f$, $\mathcal{O}_f = \rho(G)f$ とおく. $\mathfrak{g}$ の部分

環 $\mathcal{O}$ が f に 従属 している (記号: $\mathcal{O} < f$) とは $f([\mathcal{O}, \mathcal{O}]) = 0$ (記号: $f \perp [\mathcal{O}, \mathcal{O}]$) ということである. H を $\mathcal{O}$ に対応する G の解析的部分群とする. $H = \exp \mathcal{O}$, かつ, かつである. H のユニタリ指標 χ_f を

$$(4.1) \quad \chi_f(\exp X) = e^{i(X, f)} \quad (X \in \mathcal{O})$$

により定義する. χ_f を H から G へ §1.6 の如く誘導した G の表現を $\text{ind}(f, \mathcal{O})$ とかく. すなわち,

$$(4.2) \quad \text{ind}(f, \mathcal{O}) = \text{Ind}_{H \uparrow G} \chi_f.$$

命題 4.1 (Kirillov [8(a)]).

- (i) $\text{ind}(f, \mathcal{O})$ が既約 $\iff \mathcal{O}$ が $\mathcal{O} < f$ なる極大部分環.
- (ii) $\forall f \in \mathcal{O}'$ にに対し $\mathcal{O} < f$ なる極大部分代数がある.
- (iii) $\text{ind}(f_1, \mathcal{O}_1), \text{ind}(f_2, \mathcal{O}_2)$ をともに既約とする.

$$\text{ind}(f_1, \mathcal{O}_1) \simeq \text{ind}(f_2, \mathcal{O}_2) \text{ (ユニタリ同値)} \iff \mathcal{O}_{f_1} = \mathcal{O}_{f_2}.$$

- (iv) G の任意の IUR にユニタリ同値な $\text{ind}(f, \mathcal{O})$ がある.
- (v) $\mathcal{O}_f \mapsto \text{ind}(f, \mathcal{O})$ により定義される全単射

$$(4.3) \quad \hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}' / \rho(G) \rightarrow \hat{G}$$

は $\hat{\mathcal{O}}$ の商位相と $\hat{G}$ の hull-kernel topology に對し連続.
また, 次のことが知られている

命題 4.2,

- (i) $\forall f \in \mathcal{O}'$ にに対し, G_f 連結, $\mathcal{O}_f$ 単連結かつ 1 次 (さらに Zannisky 1 次) である).

(ii) $\forall IUR, T$ は CCR , 従って G は CCR .

注意 4.1. $\varphi < f$ が極大 ということと 次式が同値である.

$$\dim \varphi = \dim \psi - \frac{1}{2} \dim O_f = \frac{1}{2} (\dim \psi + \dim O_f).$$

(B) 指標の積分表示 (Kirillov [8(a)], Pukanszky [11(e)]).

T を G の $\mathcal{H}$ 上の IUR とする. 上の意味で $[T] \in \hat{G}$ に対応する軌道 $O \subset \mathcal{H}$ をとる.

命題 4.3.

(i) $\mathcal{M}_T \supset \mathcal{S}(G)$, すなわち, $(\forall \varphi \in \mathcal{S}(G))$ $T(\varphi)$ trace class.

且, $\lambda(G) \ni \varphi \mapsto \pi_T(\varphi) = \text{tr}(T(\varphi))$ は緩増大超函数 [3(e)].

(ii) O 上の G -不変測度 $d\nu$ は緩増大 (tempered) である,

$$(4.5) \quad \pi_T(\varphi) = \text{tr}(T(\varphi)) = \int_O \hat{\varphi}(f) d\nu(f) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(G)).$$

ここで右辺の積分は絶対収束であり, $\varphi(\exp X)$ を $\varphi(X)$ とおけば

$$(4.6) \quad \hat{\varphi}(f) = \int_{\mathcal{H}} \varphi(X) e^{i\langle X, f \rangle} dX.$$

記号で書くと $\pi_T = \mathcal{F}(d\nu) \in \mathcal{S}'(G)$. ([8(a)], Th. 7.4.)

(iii) 測度 $d\nu$ は (3.10) で与えられる [11(e)].

(Kirillov は (3.11) で与えられるという [8(e)].)

§5. Exponential Lie group (ELG) の表現の構成と指標

$\mathcal{L}$ -群 G が exponential であるとは, $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ が微分同型を与えることである. G が ELG であるための必要

十分条件は次の1) 2) である.

$$(5.1) \quad \begin{cases} 1) G \text{ が単連結.} \\ 2) \operatorname{ad}(X) \ (\forall X \in \mathfrak{g}) \text{ が純虚数固有値を持たない.} \end{cases}$$

このとき G は可解である.

一般に可解リー環 $\mathfrak{g}$ の root とは $\mathfrak{g}$ の随伴表現の既約成分として表れる $\mathfrak{g}'$ の元のことである. $\mathfrak{g}$ が可零ならば root は 0 だけである. 条件 (5.1) は次のようにも書ける.

$$(5.2) \quad \begin{cases} 1) G \text{ は可解単連結.} \\ 2) \mathfrak{g} \text{ の } \forall \text{ root は } (1 + \sqrt{-1}a)\gamma \ (\exists a \in \mathbb{R}, \exists \gamma \in \mathfrak{g}')$$

(A) 既約表現の構成 (P. Bernat, L. Pukanszky [11(c)]).

$f \in \mathfrak{g}'$ をとり. $\mathfrak{g} < f$ なる部分環に対応する解析的部分群 H は 1) で $H = \exp \mathfrak{g}_f$. H の指標 χ_f , その G への誘導表現 $\operatorname{ind}(f, \mathfrak{g})$ を (4.1), (4.2) で定義する. $\rho(G)f = 0_f$, $\mathfrak{g}_f^\perp = \{f_1 \in \mathfrak{g}' ; f_1(\mathfrak{g}) = 0\}$ とおく.

命題 5.1 (Pukanszky [11(c)]).

$$(i) \quad \operatorname{ind}(f, \mathfrak{g}) \text{ 既約} \iff \begin{cases} 1) \mathfrak{g} \text{ が } \mathfrak{g} < f \text{ なる極大部分環.} \\ 2) f + \mathfrak{g}_f^\perp \subset \mathcal{O}_f \end{cases}$$

(ii) $\forall f \in \mathfrak{g}'$ に對して上の 1) 2) を満たす $\mathfrak{g}$ が存在する.

(iii) (iv) (v) : 命題 4.1 の (iii) (iv) (v) に同じ.

命題 5.2.

- (i) $\forall f \in \mathfrak{g}'$ に対し, G_f 連結, O_f は連結 $\mathfrak{g}$ が閉とは限らぬ.
 (ii) IUR, $\text{ind}(f, \mathfrak{g})$ が CCR ならば, O_f は閉である. とくに
 $\mathfrak{g}$ が代数的 (すなわち, ある線型代数群のリー環) ならば
 逆も正しい.

注意 5.1. (i) 命題 5.1 の条件 1) 2) は " $f + f^\perp = \rho(H)f$ "
 と同値である. (ii) $O_f = \rho(G)f$ が成り立つとき, 条件 1) $\Rightarrow$ 2).
 また, つねに 条件 1) $\Rightarrow$ 2) であるためには $\mathfrak{g}$ が quasi-nilpotent
 (すなわち, 全ての素の root が 0) であることが必要十分である.
 とくに $\mathfrak{g}$ が中零ならば, 条件 1) $\Rightarrow$ 条件 2).

(B) 指標の積分表示 (Pukanszky [11(d)]).

一般に, $\mathbb{R}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ が代数的であることと $\text{ad } \mathfrak{g}$ が
 代数的であることは同値である. とくに $\mathfrak{g}$ が可解ならば, $\mathfrak{g}$
 に対応する連結かつ単連結な群 G が, ある実線型代数群の
 単位元の連結成分の普遍被覆群であることと同値になる.
 このとき G は I 型となり 従って $G \subset \mathbb{R}$ である. Pukanszky は
 Exp. Lie gr. G の指標を求めるとき次の仮定を置いた.

仮定 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \mathfrak{g} \text{ は代数的である.} \\ 2) \text{ IUR, } T \text{ に対応する軌道 } OC(\mathfrak{g}) \text{ は閉である.} \end{array} \right.$

仮定 1) の下で 仮定 2) は T が CCR という条件と同値である.

命題5.3 [11(d)]. 上の仮定の下で,

- (i) $\mathcal{H}_T \supset \mathcal{O}(G)$, すなわち, $(\forall \varphi \in \mathcal{O}(G))$ $T(\varphi)$ は H-S 型.
 (ii) $\mathcal{O}$ 上の不変測度 dv は緩増大であって, $\mathcal{O}(G)$ の部分集合 $\Phi = \{ \varphi^* * \varphi ; \varphi \in \mathcal{O}(G) \}$ に対し,

$$(5.3) \quad \pi_T(\varphi^* * \varphi) = \text{tr}(T(\varphi^* * \varphi)) = \int_{\mathcal{O}} \hat{\varphi}(f) dv(f).$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp x) \cdot P_0(x) \cdot (\varphi^* * \varphi)(\exp x) \\ P_0(x) = \prod_{\alpha \in J_0} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(x)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(x)}}{\alpha(x)} \end{cases}$$

J_0 は軌道 $\mathcal{O}$ による $\mathfrak{g}$ の root の集合であり, 右辺の積分は絶対収束, すなわち, 族 $\Phi \subset \mathcal{O}(G)$ に対する次の積分表示が成立する: $\pi_T = \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot \mu$, $\mu = P_0(x) \cdot J(dv) \in \mathcal{O}'(\mathfrak{g})$.

(iii) dv は (3.10) で与えられる. (Kirillov は (3.11) だという [8(d)].) なお, §3.3 で注意したように積分表示 (5.3), (5.4) は指標 π_T を完全に決定する.

§3.1.1 §3.1.1 の ax+th の群 G は上の仮定 (i) を充す. $\hat{G}$ には 2 個の無限次元表現 T_+ , T_- があり, その他は 1 次元表現である. $T_{\pm}$ に対応する軌道 $\mathcal{O}_{\pm} \subset \mathfrak{g}'$ はいずれも開であり (i) ではない. さうして $T_{\pm}$ はCCRでない (問題1.1 参照).

§6. 可解リー群の表現の構成と指標

しばらく G を任意の単連結リー群とする. 一般に $f \in \mathfrak{g}'$ の

固定群 G_f は連結とは限らない. G_f^0 を G_f の単位元の連結成分とし, $O_f = \rho(G)f = G/G_f$ とすると $\pi_1(O_f) \cong G_f/G_f^0$ となる. G_f の (2-タリ) 指標 η_f への 2-形式 $\delta\eta_f$ が

$$\eta_f \ni X \mapsto \sqrt{-1}(X, f) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$$

となるものが存在するとき, f や O_f を integral であるという. 指標 η_f には $(G_f/G_f^0)^\wedge \cong \pi_1(O_f)^\wedge$ だけの自由度があるが, η_f の全样本を $\mathcal{L}_f$ とかく.

一方, $f \in \eta_f'$ における polarization とは, η_f の複素化 η_c の部分環 $\mathcal{L}$ への次の条件 1) 2) 3) を満たすものである.

1) $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_f$ なる極大部分環である. (実は, $\mathcal{L}$ 極大

$$\iff \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L} = \dim \eta_f - \frac{1}{2} \dim O_f.)$$

2) $\mathcal{L}$ は G_f -不変.

3) $\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}$ は η_c の部分環 (すなわち $X \mapsto \bar{X}$ は η_c の η_f に属する conjugation).

すると, $\mathcal{A} = \eta_f \cap \mathcal{L}$, $\mathcal{B} = \eta_f \cap (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}})$ は η_f の部分環で

$\eta_f \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \eta_f$. さらに, D^0, E^0 を $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対応する G の解析的部分群とすると, $D = D^0 G_f$, $E = E^0 G_f$ は G の部分群である. この $\mathcal{L}$ が次の

Putnamsky 条件: $\rho(E)f = \rho(E^0)f$ は η_f' に関,

を充たすとする. このとき, D, E は G に関; D^0, E^0 は D, E の連結成分, 従って関, となる. よって f を integrable とする

と, $\forall \eta_f \in \zeta_f$ に対し, $D = D^0 G_f$ の指標 χ_f を

$$(6.1) \quad \delta \chi_f = \sqrt{-1} f|_{\mathcal{G}}$$

と取り, η_f の振る舞いであることが唯一つ存在する. $\Sigma = D \setminus E$ の一葉 D における接空間を $E/\mathcal{G}$ と同一視すると,

$$\mathcal{N}_c = \mathcal{G} \cap \bar{\mathcal{G}}, \quad E_c = \mathcal{G} + \bar{\mathcal{G}} \text{ により}$$

$$(6.2) \quad (E/\mathcal{G})_c \cong \mathcal{G}/\mathcal{N}_c + \bar{\mathcal{G}}/\mathcal{N}_c.$$

Σ 上に $\mathcal{G}/\mathcal{N}_c$ を反解析的接空間とするような E -不変複素構造が入る. また,

$$(6.3) \quad B_f(X, Y) = ([X, Y], f) \quad (X, Y \in \mathcal{G})$$

に際し E と $\mathcal{G}$ とは直交するから, §3.3 に於けると同様に, $E \times E$ 上の交代形式 $B_f|_{E \times E}$ から $\Sigma = D \setminus E$ 上の E -不変な測度 μ_X が与えられる. この μ_X を用いて, §1.6 の如く E の誘導表現 $S = \text{Ind}_{D \uparrow E} \chi_f$ を作ると, S の表現空間 $\mathcal{H}^S$ は

$$(6.4) \quad Z\varphi = \sqrt{-1}(Z, f)\varphi \quad (Z \in \mathcal{G})$$

を満たす $\varphi \in \mathcal{H}^S$ 全体 $\mathcal{H}_1$ を不変閉部分空間と包含する. S の部分表現 $S|_{\mathcal{H}_1}$ を $\text{ind}_E(\eta_f, \mathcal{G})$ とかく. ($\mathcal{G} = E$, i.e., $\mathcal{G} = \bar{\mathcal{G}}$ ならば $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}^S$.)

$$(6.5) \quad \text{ind}(\eta_f, \mathcal{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ind}_{E \uparrow G} (\text{ind}_E(\eta_f, \mathcal{G}))$$

とおく. かく, integral な $f \in \mathcal{G}'$ に於ける polarization $\mathcal{G}$ が Pukanszky 条件を満たすとき G の表現 $\text{ind}(\eta_f, \mathcal{G})$ を得る [2].

すなわち、 G を可解とする、 f における polarization $\mathfrak{f}$ が次の条件を満たすとき admissible という。

a) $\mathfrak{f}$ は positive である。(すなわち、 $X+iY \in \mathfrak{f}$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$) ならば、 $B_f(X, Y) \geq 0$, かつ、 $= 0$ となるのは、 $X \in \mathfrak{g}$ または $Y \in \mathfrak{g}$ のときにかぎる。)

b) $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ の中零根基とすると、 $\mathcal{N}_0 \cap \mathfrak{f}$ は $\mathfrak{h} = f/\mathcal{N}$ における $\mathcal{N}$ の polarization である。

c) G は $\mathcal{N}$ の相対 $\mathcal{N}'$ 上に自然に働くが、 $\mathfrak{h} = f/\mathcal{N}$ の固相群を $G_{\mathfrak{h}}$ としたとき、 $\mathfrak{f}$ は $G_{\mathfrak{h}}$ -不変である。

$\mathfrak{f}$ が admissible ならば Pukansky 条件を満たすことが分る。さて、

命題 6.1 (Auslander-Kostant [2]).

G を単連結、可解リー群とする。

(i) $f \in \mathfrak{g}'$ が integral, $\mathfrak{f}$ が f における admiss. polarization ならば、 $\forall \eta_f \in \mathcal{L}_f$ に対し、 $\text{ind}(\eta_f, \mathfrak{f})$ は既約であり、admiss. pol. $\mathfrak{f}$ のとり方にはよらないが η_f が異なれば同値ではない。

(ii) $\forall f \in \mathfrak{g}'$ に対し、 f に対する admiss. pol. $\mathfrak{f}$ が存在する。

(iii) さらには G を I 型とすると、

(K) $\forall f \in \mathfrak{g}'$ は integral,

(D) G の任意の IUR はこの型の表現に同値である。

(A) 任意の軌道 $O \subset \mathfrak{g}'$ 上 $\pi_1(O)^\wedge \cong \zeta_f$ ($\forall f \in O$) であるから, $\zeta_f \ni \eta_f \mapsto \text{ind}(\eta_f, \zeta_f)$ により 次の全単射を得る.

$$\coprod_{O \in \hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/p(\mathfrak{g})} \pi_1(O)^\wedge \longrightarrow \hat{G}.$$

(B) 指標の積分表示 (Pukanszky [11(e)]).

次の仮定の下で, 連結かつ単連結可解リー群 G の指標が部分的に求まっている. この仮定は Exp. Lie group のときと同じである.

仮定 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \mathfrak{g} \text{ は代数的. (このとき } G \text{ は I 型, 従って, } G \subset \mathbb{R} \text{ とする.)} \\ 2) \text{ IUR, T に対応する軌道 } O \subset \mathfrak{g}' \text{ (命題 6.1) は閉.} \end{array} \right.$

$\mathfrak{g}$ の原点 O の近傍 V を

$$V = \{X \in \mathfrak{g} ; |\text{Im } \alpha(X)| < 2\pi \quad \forall \text{ root } \alpha\}$$

とおくと, $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ は V から $\exp V$ への解析同型である. 族 $\Phi(T) \subset \mathcal{O}(G)$ を次のようにとる.

$$(6.6) \quad \Phi(T) = \{ \varphi \in \mathcal{O}(\exp V) ; T(\varphi) \geq 0 \text{ (正定値)} \}.$$

命題 6.2. 上の仮定の下で,

(i) $\mathcal{W}_T \supset \mathcal{O}(G)$, すなわち, ($\forall \varphi \in \mathcal{O}(G)$) $T(\varphi)$ は H-S 型.

(ii) $\mathcal{W}_T \supset \Phi(T)$, すなわち, ($\forall \varphi \in \Phi(T)$) $T(\varphi)$ は trace class.

(iii) T に対応する軌道 O 上の適当な G -不変測度 $d\nu$ をとると

$$(6.7) \quad \pi(\varphi) = \text{tr}(T(\varphi)) = \int_O \hat{\varphi}(f) d\nu(f) \quad (\forall \varphi \in \Phi(T)).$$

すなわち, 右辺の積分は絶対収束で,

$$(6.8) \quad \begin{cases} \psi(X) = \Delta^{\frac{1}{2}}(\exp X) \cdot P_0(X) \cdot \varphi(\exp X), \\ P_0(X) = \prod_{\alpha \in J_0^1} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(X)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(X)}}{\alpha(X)} \cdot \prod_{\beta \in J_0^2} \frac{e^{\beta(X)} - 1}{\beta(X)}. \end{cases}$$

J_0^i は O によって与えられる $\mathfrak{g}$ の root の集合で $J_0^1 \cap J_0^2 = \emptyset$.

すなわち, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(\Gamma)$ に対する π_Γ の次の積分表示を得る.

$$\pi_\Gamma = \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot \mu, \quad \mu = P_0(X) \cdot J(d\nu) \quad (\in \mathcal{B}'(\mathfrak{g})).$$

(iv) 測度 $d\nu$ は (3.10) で与えられる.

注意 6.1. 同じ軌道 O に対応する IUR は $\zeta_f \cong \pi_1(O)^\wedge$ だが同値でないものがある. ($\pi_1(O)^\wedge$ は何次元かの torus である.)
ところが積分表示 (6.7), (6.8) はこれら全2の表現に対して共通であるから, 非常に不十分なものであると断言するを得ない. これは写像 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ が 1-1 でないことから来る上の型の積分表示の限界でもあるだろうか? (注意 8.1, 9.1 参照)

§7. コンパクト半単純群の指標の積分表示

G を連結かつ単連結なコンパクト半単純群, H をその Cartan 部分群, $\mathfrak{h}$ を H のリー環とする. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root α は全て $\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}'$ である. 一つの順序に関する単純 root の全体を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ とし, $\rho = \sqrt{-1}\rho' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$ ($\rho' \in \mathfrak{h}'$) とおく.

$$(7.1) \quad (X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\text{ad} X \cdot \text{ad} Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

により, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を同一視する. $\mathfrak{h}$ の部分集合

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}^*; \frac{2(\sqrt{\alpha}\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geq 0 \text{ 整数 } (1 \leq i \leq r) \}$$

ととり、最高weight が $\sqrt{\alpha}\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) である G の IUR を T_λ とし、その指標 $\pi_\lambda(g) = \text{tr}(T_\lambda(g))$ ($g \in G$) の積分表示を考へる。すなわち $\sigma(G) = \text{ad}(G)$ による $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$ の軌道のうち、次元が最大のものは

$$(7.2) \quad O(\lambda) = O_{\lambda+\rho'} = \sigma(G)(\lambda+\rho') \quad (\lambda \in \Lambda)$$

の形であり、 $O(\lambda) \cong G/H$ であり、皆 integral である。 $\mathfrak{g}$ 上の函数

$$(7.3) \quad P(X) = \prod_{\alpha > 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(X)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(X)}}{\alpha(X)} \quad (X \in \mathfrak{g})$$

は G -不変な $\mathfrak{g}$ 上の函数に一意に拡張され、

$$P(Y)^2 = \left| \det \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) \right| \quad (Y \in \mathfrak{g}) \text{ とする。写像 } \exp:$$

$\mathfrak{g} \rightarrow G$ は 1-1 である。こゝでは $\varphi \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ に対し、新

たに $T'_\lambda(\varphi)$ を次のように定義する。 G 上の Haar 測度 dg は $\mathfrak{g}$ 上の dX を適当にとれば $d(\exp X) = P(X)^2 dX$

となるのである。

$$(7.4) \quad T'_\lambda(\varphi) = \int_{\mathfrak{g}} T_\lambda(\exp X) \varphi(X) \cdot P(X)^2 dX$$

とおく。そのとき、

命題 7.1.

(i) $O(\lambda)$ 上の G -不変測度 dv があつて、

$$\text{tr}(T'_\lambda(\varphi)) = \int_{O(\lambda)} \hat{\varphi}(f) dv(f),$$

$$\text{すなわち、} \quad \psi(X) = P(X) \cdot \varphi(X). \quad ([11(a)], [8(c)])$$

すなわち, $\pi'_\lambda: \varphi \mapsto \text{tr}(T'_\lambda(\varphi))$ を $\mathfrak{g}'(\eta)$ の元として表示すると

$$\pi'_\lambda = P(X) \cdot \int(dv).$$

(ii) 上の π'_λ の表示から 函数としての指標 $\pi_\lambda(\eta)$ の表示を得る:

$$\pi_\lambda(\exp X) = \text{tr}(T_\lambda(\exp X)) = P(X)^{-1} \cdot \int(dv) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

(iii) 測度 dv は (3.11) で与えられる (Kirillov [8(1)]).

(Pukanszky による dv の表示には, 計算されていない定数が含まれている [11(2)].)

§8. 複素半単純リー群の指標の積分表示

G を連結かつ単連結な複素半単純リー群, H をその Cartan 部分群, $\mathfrak{h}$ を H のリー環とする. $(\eta, \mathfrak{h})$ の正の root 全体に対応する正部分群を N , $P = NH$ とする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ は $\eta, \mathfrak{h}'$ を $\eta, \mathfrak{h}$ の $\mathbb{C}$ 上の双対空間とする. η と η' , $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を ($\mathbb{C}$ 上の) Killing form (7.1) により同一視する. 単純 root 全体を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (\in \mathfrak{h}' \cong \mathfrak{h})$ とし, $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}'$ の部分集合

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}; \frac{2(\sqrt{-1}\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \text{ 整数 } (1 \leq i \leq r) \right\}$$

をとる. P の任意の ($2=2r$) 指標は, $\exists \lambda \in \Lambda$,

$$\chi_\lambda(\exp X \cdot n) = e^{\sqrt{-1}(X, \lambda)} \quad (X \in \mathfrak{h})$$

の形である. したがって P の指標全体は $\hat{H} \cong \Lambda$ と同一視できる.

$$(8.1) \quad T_\lambda = \text{Ind}_{P \uparrow G} \chi_\lambda,$$

として得られる G の表現は全て既約である、これを G の主系列の表現という、 T_λ の指標 π_λ は G 上の函数として具体的に計算されている、それとは別に T_λ の指標を導く意味で積分表示してみる、その積分表示から G の Plancherel の公式も導かれる (E. A. Gutkin [5]). 軌道 $O \subset \mathfrak{g}$ の閉包 $\overline{O}$ が $O_\lambda = \sigma(G)\lambda$ を含むような O は有限個であり、そのうち、最高次元のもの、 Ω_λ が唯一存在する、 $\lambda \in \Lambda$ が正則ならば $\Omega_\lambda = O_\lambda = \overline{O}_\lambda$ 、一般には $\mathfrak{g}_\lambda$ を λ の $\mathfrak{g}$ における centralizer とし、 $\gamma \in \mathfrak{g}_\lambda$ を $\mathfrak{g}_\lambda$ の quasi-regular (すなわち、 γ の $\mathfrak{g}_\lambda$ における centralizer の次元が最高) な非零元とすれば

(8.2) $\Omega_\lambda = O_{\lambda+\gamma} = \sigma(G)(\lambda+\gamma) \quad (\overline{\Omega}_\lambda \supset O_\lambda)$,
 である、 $\mathfrak{g}$ 上の函数 $p(x)$ を

$$(8.3) \quad p(x) = \left| \det \left(\frac{e^{\text{ad} x} - 1}{\text{ad} x} \right) \right| \quad (x \in \mathfrak{g})$$

とおく ($p(0)=1$). G 上の Haar 測度 dg に対し $\mathfrak{g}$ 上の dx を適当にとれば $d(\exp x) = p(x)^2 dx$ となる、

すなわち $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に対し、 $\int_{\mathfrak{g}}$ と同様にして

$$(8.4) \quad T'_\lambda(\varphi) = \int_{\mathfrak{g}} T_\lambda(\exp x) \varphi(x) \cdot p(x)^2 dx$$

とおく、一方 $\mathfrak{g}$ の原点 0 の近傍 V_0 を

$$(8.5) \quad V_0 = \{x \in \mathfrak{g} ; \text{ad} x \text{ の全ての固有値 } \nu, |\text{Im} \nu| < \pi\}$$

とすれば $\exp$ は V_0 から $\exp V_0$ への解析同型を与える、

命題 8.1 [5]. 軌道 Ω_λ を上のようにとる ($\overline{\Omega}_\lambda \supset \Omega_\lambda$).

Ω_λ 上には (3.11) で与えられる G -不変測度 $d\nu$ をとれば,

$$(8.6) \quad \mathrm{tr}(T'_\lambda(\varphi)) = \int_{\Omega_\lambda} \hat{\varphi}(f) d\nu(f) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{O}(V_0)).$$

ここに

$$\psi(x) = p(x) \cdot \varphi(x) \quad (x \in \mathfrak{g}).$$

すなわち, $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{O} = \mathcal{O}(V_0)$ に対し,

$$\mathrm{tr}(T'_\lambda(\varphi)) = (p(x) \cdot \mathcal{F}(d\nu), \varphi).$$

注意 8.1. 上の表示 (8.6) で φ の台は 原点 0 の近傍に限られるが, これで指標 π_λ は完全に決定される. 何故なら G の任意の IJR, T に対し, $p(x) \pi_\lambda(\exp x)$ ($x \in \mathfrak{g}$) は実解析関数であることが分っている. また H は連結であるから $\pi_\lambda(\exp x)$ は $V_0 \cap \mathfrak{g}$ での値で完全に決まる. (注意 6.1, 9.1 参照) また $\lambda \in \Lambda$ の田舎群 G_λ は連結 ([6], p.482) で, $\Omega_\lambda \cong G/G_\lambda$ は単連結である. 実半単純リー群の場合はそうとは限らない. また $\overline{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda$ ($\forall \lambda \in \Lambda$).

§9. 実半単純リー群の指標の積分表示.

G を連結な実半単純リー群とする. $G = KAN$ を岩沢分解とし, $M, \tilde{M}$ を A の K における中心化群, 正規化群とする. $P = MAN$, $W_A = \tilde{M}/M$ とおく. $\mathfrak{a}, \mathfrak{m}$ を A, M のリー環, $\mathfrak{a}', \mathfrak{m}'$ をこれらの双対空間とする. $\mathfrak{g}$ の Killing

formにより, η と η' , σ と σ' , m と m' を同一視する. すると, $\mathbb{P}$ の任意の有限次元の IUR, L はある $f_0 \in \sigma' \cong \sigma$, $\eta \in \hat{M}$ を用いて

$$L(m, \lambda, x, n) = e^{i(x, f_0)} \cdot \eta(m) \quad (x \in \sigma, m \in M, n \in \mathbb{N})$$

と書かれる. $T^L = T_{f_0, \eta} = \text{Ind}_{\mathbb{P} \uparrow G}^{\text{Ind}} L$ とおく. このうち既約なものに G の連続主系列の表現というが, それらの指標 π_λ は G 上の関数として具体的に示されている. W_A は群 MA 上に働くが $L^w(h) = L(h^w)$ ($h \in MA$) とおいたとき, $W_A \ni w \neq e$ に対し, $L^w \neq L$ ならば, T^L は既約である (F. Bruhat). 逆に $f_0 \in \sigma$ が W_A -正則 (すなわち, $W_A \ni w \neq e$ に対し $f_0^w \neq f_0$) ならば 明らかに $L^w \neq L$ ($\forall w \neq e$) となる. σ の元のうち W_A -正則なもの全体を σ^r と書く. M. Duflo [4] は次の仮定の下に, T^L の指標の積分表示を得た.

$$\text{仮定} \left\{ \begin{array}{l} 1) f_0 \in \sigma \text{ は } W_A\text{-正則 (i.e., } f_0 \in \sigma^r), \\ 2) M \text{ の中心を } Z_M, \text{ 単位元 } e \text{ の連結成分を } M^0 \text{ としたとき, } \\ \quad M = M^0 \cdot Z_M. \end{array} \right.$$

仮定 2) の下で $\eta|_{M^0}$ は既約になるのを

$$\hat{M} \cong \hat{M}^0 \times (M/M^0)^\wedge \cong \hat{M}^0 \times (Z_M/Z_M \cap M^0)^\wedge$$

である. M^0 はコンパクトとは限らないが, reductive で $M^0/M^0 \cap Z_M$ はコンパクトであるから, §7 の結果が使える.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{o} + \mathfrak{g}_-$ ($\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g} \cap \mathcal{W}$) を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環と取る. $\mathcal{W}$ の中心を $\mathfrak{z}_{\mathcal{W}}$, $\mathcal{W}_1 = [\mathcal{W}, \mathcal{W}]$ とすれば $\mathcal{W} = \mathfrak{z}_{\mathcal{W}} + \mathcal{W}_1$ (直和),

$\mathfrak{g}_- = \mathfrak{z}_{\mathcal{W}} + \mathfrak{g}_- \cap \mathcal{W}_1$ となる. $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_- \cap \mathcal{W}_1$ はそれぞれ $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}_1$ の Cartan 部分環である. コンパクト半単純 Lie 環 $\mathcal{W}_1$ に対し, §7 の如く $\Lambda_{\mathcal{W}_1} \subset \mathfrak{g}_- \cap \mathcal{W}_1$, $\rho'_{\mathcal{W}_1} \in \mathfrak{g}_- \cap \mathcal{W}_1$ を定め, $\Lambda_{\mathcal{W}} = \mathfrak{z}_{\mathcal{W}} + \Lambda_{\mathcal{W}_1} \subset \mathfrak{g}_-$ とおく. 表現 $\eta|_{M^0}$ に対して, $\exists \lambda_{\mathcal{W}} \in \Lambda_{\mathcal{W}}$ で $f_1 = \lambda_{\mathcal{W}} + \rho'_{\mathcal{W}_1} \in \mathfrak{g}_-$ の M^0 -軌道上で積分表示 (7.5) が成立する.

一方 $f = f_0 + f_1 = f_0 + (\lambda_{\mathcal{W}} + \rho'_{\mathcal{W}_1}) \in \mathfrak{g}$ は $L|M^0A$ を決定する: $L|M^0A \leftrightarrow (f_0, \eta|_{M^0}) \leftrightarrow (f_0, f_1)$. $O_f = \sigma(G)f \cong G/G_f$ は一般には単連結でなく, $\pi_1(O_f) \cong G_f/G_f^0$. f の N における中心化群を $Z_N(f)$ とすれば, (仮定 1) の下で,

$G_f = Z_N(f) \cdot H$, $G_f^0 = Z_N(f) \cdot H^0$, $\pi_1 = H$ は G に交代する G の Cartan 部分群, H^0 は H の e を含む連結成分である. さらに (仮定 2) があれば $H = H^0 Z_M$ となる. 従って, (仮定 1, 2) の下で,

$\pi_1(O_f) \cong G_f/G_f^0 \cong H/H^0 \cong Z_M/Z_M \cap M^0 \cong M/M^0$,
となる ([6], §16 参照). 更に, T^L 相互間の同値性を考慮に入れば, T^L の同値類は, 軌道 $O = O_f \subset \mathfrak{g}$ ($f \in \mathfrak{o}^{\vee} + \Lambda_{\mathcal{W}} + \rho'_{\mathcal{W}_1}$) に対応する $\pi_1(O)^{\wedge}$ の合併

$$\coprod \pi_1(O)^{\wedge}$$

と 1-1 に交代する事が分る (命題 6.1 (iii) 参照).

$$(9.1) \quad p(x) = \left| \det \left(\frac{e^{ad x} - 1}{ad x} \right) \right|^{1/2} \quad (x \in \mathfrak{g})$$

とおく. G , $\mathfrak{g}$ 上の dg , dx を適当にとれば $d(\exp x) = p(x)^2 dx$ となる. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に對し §§7, 8 と同様に

$$(9.2) \quad (T^L)'(\varphi) = \int_{\mathfrak{g}} T^L(\exp x) \varphi(x) \cdot p(x)^2 dx$$

とおく. $\mathfrak{g}$ の原点 0 の近傍 V_0 を (8.5) で与えられるものとする. $\exp$ は V_0 から $\exp V_0$ への角解析同型を与える.

命題 9.1. T^L に對応する $\mathfrak{g}$ の軌道を O とし, O 上は (3.11) によって与えられる G -不変測度を dv とする. (仮定 1) 2) の下で

$$(9.3) \quad \text{tr}(T^L \gamma(\varphi)) = \int_0 \hat{\gamma}(x) dv(x) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_0)),$$

$$\text{すなわち} \quad \gamma(x) = p(x) \cdot \varphi(x) \quad (x \in \mathfrak{g}),$$

が成立する.

注意 9.1. $T = T^L$ の指標 π_T の積分表示 (9.3) は $\text{supp}(\varphi) \subset V_0$ という制限があるため T^L を完全には決定しない. 実際, 同じ軌道 O に對応する T^L は $\pi_1(O)^{\wedge}$ 分だけ異なるが, 表示 (9.3) はこれら全てに對して共通である. §§9.2 は $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ のとき,

$$H_{\pm} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とおけば} \quad H = H_+ \cup H_-$$

$\exp V_0 \supset H_+$, $\exp V_0 \cap H_- = \emptyset$ となる. §§9.2 表示 (9.3) は H_+ 上で π_T を決定するが, H_- 上では情報を与えない. ところが同じ軌道 O に對応する T^L が 2 個あって, それらの指

標は H_+ 上では一致するが, H_- 上では符号だけ異なる (注意 6.1, 8.1 参照).

注意 9.2. $M = M^0 \cdot Z_M$ とおき, $G = \widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ (普遍被覆群, $n \geq 3$) とおくと, このとき M は非可換有限群 (位数 2^n) である. また M^0 がコンパクトでないときは $G = \widetilde{SU(p, q)}$ ($p \neq q$) とおくと,

§10. Kirillov の "Reduction Theorems" について

Kirillov は既約表現の指標の積分表示を $\dim G$ に関する帰納法で言明しようとしている. まず, G を単純群とし, 連結リー群とし, T をその IUR とすれば, 次の4つの場合が起こる.

- (1) T の核の中に 閉連結可換正規部分群 G_0 ($\dim \geq 1$) がある.
- (2) 閉連結可換正規部分群 A ($\dim \geq 1$) があり $T|A$ がスカラーでない.
- (3) G は次のような中零リー群 N を含む. (i) N のリー環 $\mathfrak{n}$ は $X_1, X_2, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r, Z$ と表され, $[X_i, Y_j] = \delta_{ij} Z$, その他の交換子積は全 0 . (ii) Z は $\mathfrak{n}$ の中心の元である.
(iii) $T(\exp tZ) = e^{i\lambda t}$ ($\exists \lambda \neq 0$).

(4) G は単純群 S と1次元の $\mathbb{R}$ との直積である: $G \cong S \times \mathbb{R}$.
彼はそれぞれの場合にいわゆる reduction theorem を言明した.

(1) の場合. T から自然に G/G_0 の表現 S が得られる. S

に対して, 指標 π_S の積分表示が成立していれば, T の指標 π_T の積分表示が得られる. (1st reduction theorem [8(c)]).

(2)の場合, T から G の真部分群 H とその IUR, U が具体的にあって, $T \simeq \text{Ind}_{H \uparrow G} U$ とする. 指標 π_U の積分表示が成立していれば, それから指標 π_T の積分表示が得られる. (2nd reduction theorem [8(c)]).

(3)の場合, T から G の真部分群 H とその IUR, S が具体的にあって 指標 π_S の積分表示が成立していれば, それから指標 π_T の積分表示が得られる. この場合 T と S の関係は (2) の場合と違ってやや複雑である. (3rd reduction theorem [8(c)]).

既にこの小文も予想外の負数を費し, 筆者も労れたので詳しくは原論文にあたられたい, なお, §5-8 でつねに問題になったことは, $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ が 1-1 でないことから来る困難を避けるように, Kirillov は, $\mathcal{O}(G)$ のかわりに $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ をとって, T の指標を次のように定義した.

$$\varphi \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \text{ に対し } T[\varphi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{g}} T(\exp X) \varphi(X) dX$$

とおき, $\varphi \mapsto \text{tr}(T[\varphi])$ を T の指標というのである. しかし, §5-8 で見た如く, この考え方が成功していると言えるのは せいぜいコンパクト群の場合だけである.

付記 川中宣明氏より有限 (Chevalley) 群の既約指標に対しても部分的には²が、類似の積分表示が成立していることを注意していただいた。リー環上の不変測度の“Fourier 変換”を用いて指標が表されるというのである (T. A. Springer [4] 参照)。Springer 自身は Harish-Chandra による (多分、コンパクト群の場合の) 結果から誘発されたと書いている。

引用文献

- (1) M. F. Atiyah-R. Bott: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications, Ann. Math., 88-3(1968), 451-491.
- (2) L. Auslander-B. Kostant: Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Inv. Math., 14(1971), 255-354.
- (3) J. Dixmier:
 - (a) Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. N, Can. J. Math., 11(1959), 321-344.
 - (b) Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. V, Bull. Soc. Math. France, 87(1959), 65-79.
 - (c) Les C^* -algèbres et leurs représentations, 1964, Gauthier-Villars, Paris.
- (4) M. Duflo (M. Дюфло): Representations of principal series of semisimple Lie groups, Functional Analysis and its Applications, 4-2(1970), 38-42.
- (5) E. A. Gutkin (E. A. Гуткин): Representations of principal series of complex semisimple Lie groups, Funct. Anal. Appl., 4-2(1970), 32-37.
- (6) Harish-Chandra: Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., 119(1965), 457-508.
- (7) T. Hirai:
 - (a) The characters of irreducible representations of the Lorentz group of n -th order, Proc. Japan Acad., 41(1965), 526-531.
 - (b) Classification and the characters of irreducible representations of $SU(p, 1)$, ibid., 42(1966), 907-912.
 - (c) The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 8(1968), 313-363.

- (d) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups. I. Case of $SU(p, q)$, Japanese J. Math., 22(1970), 1-68.
 - (e) 実半単純リー群の表現の指標と不変固有超関数, 23-4(1971), 241-260.
 - (f) Structure of induced representations and characters of irreducible representations of complex semisimple Lie groups, International Conference on Harmonic Analysis at Univ. of Maryland, Lecture Notes in Math., Springer.
- (8) A. A. Kirillov:
- (a) Unitary representations of nilpotent Lie groups, U. Math. Nauk, 17-4 (1962), 57-101.
 - (b) Method of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups, Funct. Anal. Appl., 2-1(1968), 96-98.
 - (c) Characters of unitary representations of Lie groups, *ibid.*, 2-2(1968), 40-55.
 - (d) Characters of unitary representations of Lie groups. Reduction theorems, *ibid.*, 3-1(1969), 36-47.
- (9) B. Kostant:
- (a) Quantization and unitary representations, Lectures in Modern Analysis. II, Lecture Notes In Math., Springer.
 - (b) Orbits and quantization theory, Internat. Math. Congress (1970), Vol.2, 395-400.
- (10) R. L. Lipsman: On the characters and equivalence of continuous series representations, J. Math. Soc. Japan, 23-3(1971), 452-480.
- (11) L. Pukanszky:
- (a) Leçon sur les représentations des groupes, 1967, Dunod, Paris.
 - (b) On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groups, J. Funct. Anal., 1(1967), 255-280.
 - (c) On the theory of exponential groups, Trans. Amer. Math. Soc., 126 (1967), 487-507.
 - (d) On the unitary representations of exponential groups, J. Funct. Anal., 2(1968), 73-113.
 - (e) Characters of algebraic solvable groups, *ibid.*, 3(1969), 435-494.
- (12) H. Shin'ya: Spherical functions on locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 12-1(1972), 55-85.
- (13) N. Tatsuuma: Plancherel formula for non-unimodular locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 12-1(1972), 179-261.
- (14) D. P. Zhelobenko (Д. П. Желобенко): Operational calculus on complex semisimple Lie groups, Izv. Akad. Nauk CCCP, 33(1969), 931-973.
- (*) T. A. Springer: Generalization of Green's polynomials, preprint.