

実代数群の巾零軌道の誘導と旗多様体上の K 軌道の閉包

東京電機大学 工学部

太田琢也

§0. 設定と問題

本稿を通して以下の記号を用いる。 G を $\mathbb{R}$ 上定義された連結簡約複素代数群、 $\tau: G \rightarrow G$ を複素共役、 $G(\mathbb{R}) = \{g \in G; \tau(g) = g\}$ を τ が定める G の実型、 $\theta: G \rightarrow G$ を τ と可換な (複素化された) Cartan 対合とし、 $K := \{g \in G; \theta(g) = g\}$ とおく。 G の閉部分群の Lie 環は対応する小文字のドイツ文字で表し、 τ, θ が定める $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ の対合をも τ, θ で表す。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ を θ に関する Cartan 分解とする。 τ -stable な G または $\mathfrak{g}$ の部分集合 A に対して $A(\mathbb{R}) = \{x \in A; \tau(x) = x\}$ とおく。 G の $\mathfrak{g}$ への作用は、いつも adjoint action を考える。 $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環たちの成す variety (旗多様体) とし $\pi: T^*\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を moment map とする。 $\langle, \rangle$ は $\mathfrak{g}$ 上の G -不変な双一次形式で $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{s}$ は $\langle, \rangle$ に関して直交し、かつ $\langle, \rangle|_{\mathfrak{k}(\mathbb{R})}$ は負定値、 $\langle, \rangle|_{\mathfrak{s}(\mathbb{R})}$ は正定値であるものとし、 $\langle, \rangle$ による同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ により π を $\pi: T^*\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ と見ておく。

H を θ -stable かつ τ -stable な G の極大トーラス、 $Q = LU$ は G の θ -stable な放物型部分群であって、 θ -stable かつ τ -stable な Levi factor L 、及び unipotent radical U をもつもの、 B_L を H を含む L の split Borel 部分群 (ie. $\theta(B_L) = B_L^-$: opposito Borel) とし、 B を $B = B_L U$ により定まる G の Borel 部分群とする。このとき四つ組 (set of θ -stable data for $G(\mathbb{R})$) $(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ 及び B_L に対して標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群

$$X = X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu) = (\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})} \left(\text{Ind}_{B_L(\mathbb{R})}^{L(\mathbb{R})} (\delta \otimes \nu) \right) = (\mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})} ((\delta \otimes \nu) \otimes (\text{twist}))$$

が定義される。ここに $\text{Ind}_{B_L(\mathbb{R})}^{L(\mathbb{R})}$ は実放物型部分群による parabolic induction、 $(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}})^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})}$ は θ -stable な放物型部分環による cohomological parabolic induction である。また、 $\delta \otimes \nu$ は $H(\mathbb{R})$ のある条件を満たす指標、 $\otimes(\text{twist})$ はある指標による twist である。詳細については Vogan[V] を参照されたい。本稿では、このようにして得られる B (resp. $\mathfrak{b}$) を標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に対応する Borel 部分群 (resp. 部分環) と呼ぶことにする。

このとき、[O2] により $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ の (巾零) $H \cap K$ 軌道 $\{0\} \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ から $\mathfrak{b}_L$ 及び $\mathfrak{q}$ による巾零軌道の誘導を合成することにより、 $\mathfrak{s}$ の巾零 K 軌道の集合

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{b}} := \text{Ind}^{\theta}((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}) \circ \text{Ind}^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_L) \uparrow \mathfrak{l})(\{0\})$$

が定まる。本稿では標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に対応する $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ の K 軌道の閉包 $\overline{K \cdot \mathfrak{b}} \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ と $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}}$ 及び X の associated variety の関係について考察する。

§1. 巾零軌道の誘導

$\mathfrak{s}$ の巾零元の集合を $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ で表し、 $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ の $\mathfrak{g}$ -principal (i.e. $\mathfrak{g}$ で regular) な元の全体を $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}$ で表す。また、 $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ の K 軌道の全体を $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$ で表す。

Remark 1.1. [AV] により $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr} \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は $\mathfrak{g}$ が quasisplit (i.e. $\mathbb{R}$ 上定義された $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環が存在する) であることが知られている。

$\mathfrak{l} = \text{Lie}(L)$, $\mathfrak{s}_L := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}$, $K_L = L \cap K$ とおく。

Definition 1.2 $\mathcal{O} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ に対して $(\mathcal{O} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}) \cap \tilde{\mathcal{O}}$ が $\mathcal{O} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}$ で open dense となる $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$ が唯1つ存在する。これを $\tilde{\mathcal{O}} = \text{Ind}^{\theta}((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{O})$ と表す。これにより写像

$$\text{Ind}^{\theta}((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}) : \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L \rightarrow \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$$

が定まる。この写像による $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}$ の $\mathfrak{l}$ -principal な K_L 軌道たちの像を $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}}$ とかく：

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{b}} = \text{Ind}^{\theta}((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)$$

Remark 1.3. ([O2]) $P = MN$ を θ -stable かつ τ -stable な Levi factor M 、unipotent radical N をもつ τ -stable な G の放物型部分群とする。 $\mathcal{O}_M \in \mathcal{N}_{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{s}}/M \cap K$ に対しても巾零 K 軌道の集合

$$\text{Ind}^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{O}_M) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$$

が定まる。 P が Borel 部分群のときは

$$\text{Ind}^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}) \uparrow \mathfrak{g})(\{0\}) = \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K$$

従って、この記号を用いると上の $\mathcal{I}_b$ は

$$\mathcal{I}_b = \text{Ind}^\theta((l, q) \uparrow \mathfrak{g})(\text{Ind}^{\mathbb{R}}((h, b_L) \uparrow l)(\{0\}))$$

ともかける。

$\mathfrak{g}$ の h に関するルート系を $R(\mathfrak{g}, h)$ で表し、虚ルートたちの成す部分系を $R(\mathfrak{g}, h)_{i\mathbb{R}}$ で表す。また、 u に含まれる虚ルートたちの集合を $R(u, h)_{i\mathbb{R}}$ で表す:

$$R(\mathfrak{g}, h)_{i\mathbb{R}} = \{\alpha \in R(\mathfrak{g}, h); \theta(\alpha) = \alpha\}, \quad R(u, h)_{i\mathbb{R}} = \{\alpha \in R(\mathfrak{g}, h)_{i\mathbb{R}}; \mathfrak{g}_\alpha \subset u\}$$

ここに、 $\mathfrak{g}_\alpha$ はルート $\alpha \in R(\mathfrak{g}, h)$ に対するルート空間である。仮定 $\theta(B_L) = B_L^-$ より $R(l, h)$ は虚ルートをもたないから $R(u, h)_{i\mathbb{R}}$ は $R(\mathfrak{g}, h)_{i\mathbb{R}}$ の正系を成す。このとき、§0 の標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 X の associated variety $\text{Ass}(X) \subset \mathcal{N}_s$ (同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ による) に関して次が成り立つ。

Theorem 1.4. (i) ([AV]) 標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 X において $R(\mathfrak{g}, h)_{i\mathbb{R}}$ の正系 $R(u, h)_{i\mathbb{R}}$ が large type、即ち任意の単純ルートが非コンパクト (i.e. $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{s}$) ならば $\text{Ass}(X)$ に含まれる $\mathfrak{g}$ -principal な K 軌道の集合 $\text{Ass}(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K$ と $\mathcal{I}_{b-}$ の $\mathfrak{g}$ -principal な K 軌道の集合 $[\mathcal{I}_{b-}]^{\mathfrak{g}-pr}$ は一致する:

$$\text{Ass}(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K = [\mathcal{I}_{b-}]^{\mathfrak{g}-pr} \dots (*)$$

ここに $\mathcal{I}_{b-} = \text{Ind}^\theta((l, q^-) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{N}_{s_L}^{l-pr}/K_L)$ である。

(ii) ([Y]) $G(\mathbb{R})$ が連結かつ半単純、 $H(\mathbb{R})$ がコンパクトのとき、 $b = q$ 、 $h = l$ 、かつ $X = (\mathcal{R}_b^{\mathfrak{g}})^{\dim(u \cap \mathfrak{k})}(\delta)$ は discrete series となる。このとき $\mathcal{I}_{b-} = \{\text{Ind}^\theta((h, b^-) \uparrow \mathfrak{g})(\{0\})\}$ (1つの K 軌道) であって次が成り立つ。

$$\text{Ass}(X) = \overline{\text{Ind}^\theta((h, b^-) \uparrow \mathfrak{g})(\{0\})}.$$

Remark 1.5. (i) で $\mathfrak{g}$ が quasisplit でなければ (*) の両辺は空集合となる。

Theorem 1.4 により次のことが成り立つのではないかと予想される。

Conjecture 1.6. $\text{Ass}(X) = \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{I}_b} \overline{\mathcal{O}}$

§2. 巾零軌道の誘導と旗多様体の K 軌道の閉包

$\mathcal{B}_g$ を $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環たちの成す variety (旗多様体) とする。

Definition 2.1. ([AV]) $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}_g$ を θ -stable な Borel 部分環、 $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{b}_1$ を θ -stable な Cartan 部分環 とする。 $\mathfrak{b}_1$ に含まれるルートの成す $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ の正系 $R(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{h}_1)$ の単純ルートが complex なルート (i.e. $\theta(\alpha) \neq \pm\alpha$)、または非コンパクトな虚ルート (i.e. $\theta(\alpha) = \alpha$ かつ $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{s}$) であるとき、large type であるという。 $\mathfrak{g}$ の large type の θ -stable な Borel 部分環の集合を $\mathcal{B}_g^L$ で表す。

Remark 2.2. (i) ([AV]) 次の (a)-(c) は同値である。

(a) $\mathcal{B}_g^L \neq \emptyset$

(b) $\mathcal{N}_s^{\mathfrak{g}-pr} \neq \emptyset$

(c) $\mathfrak{g}$ が quasisplit.

特に §0 の Levi 部分群 L は条件 $\theta(B_L) = B_L^-$ より quasisplit、従って $\mathcal{N}_{s_L}^{l-pr} \neq \emptyset$ である。

(ii) $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}_g^L$ に対して $\mathfrak{b}_1 \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ となる $\mathcal{O} \in \mathcal{N}_s^{\mathfrak{g}-pr}/K$ が唯 1 つ存在する。これが全単射

$$\mathcal{B}_g^L/K \simeq \mathcal{N}_s^{\mathfrak{g}-pr}/K, (K \cdot \mathfrak{b}_1 \leftrightarrow \mathcal{O}_1)$$

を定める (cf. [O2])。

$\pi: T^*\mathcal{B}_g \rightarrow \mathfrak{g}$ を moment map とする。

Remark 2.3. ([BB]) $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}_g$ の K 軌道 $K \cdot \mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}_g/K$ に対して余法束 $T_{K \cdot \mathfrak{b}_1}^* \mathcal{B}$ の π による像は次のようにかける。

$$\pi(T_{K \cdot \mathfrak{b}_1}^* \mathcal{B}) = K(\mathfrak{b}_1^\perp \cap \mathfrak{s})$$

ここに

$$\mathfrak{b}_1^\perp := \{\lambda \in \mathfrak{g}^*; \lambda(\mathfrak{b}_1) = \{0\}\} = \{x \in \mathfrak{g}; \langle x, \mathfrak{b}_1 \rangle = \{0\}\} = (\text{nilpotent radical of } \mathfrak{b}_1)$$

である。

本稿の主定理は次のものである。

Theorem 2.4. §0 の $H, Q = LU, B = B_L U$ に対して

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{b}} = \text{Ind}^{\theta}((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{l-pr}/K_L)$$

とおく。 $\mathfrak{b}$ の $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ における K 軌道の閉包に含まれる K 軌道の集合を $\overline{K \cdot \mathfrak{b}}/K \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}/K$ とかくとき、次が成り立つ。

$$\pi(\cup_{Y \in \overline{K \cdot \mathfrak{b}}/K} T_Y^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) = \cup_{O \in \mathcal{I}_{\mathfrak{b}}} \overline{O}.$$

この定理は松木氏の次の結果と、それに続く 2 つの補題を用いて証明される。

Proposition 2.5. (松木) Theorem 2.4 の $\mathfrak{b}$ に対して次が成り立つ。

$$\overline{K \cdot \mathfrak{b}} = K \cdot \{g \cdot \mathfrak{b}; g \in L\} = K \cdot \{\mathfrak{b}_L^1 + u; \mathfrak{b}_L^1 \in \mathcal{B}_l\} \supset K \cdot \{\mathfrak{b}_L^0 + u; \mathfrak{b}_L^0 \in \mathcal{B}_l^L\}$$

Proof. [M] により $(L \cap K)B_L \subset L$ は L で open dense:

$$\overline{(L \cap K)B_L} = L.$$

G の中で

$$\overline{KB} \supset K \overline{(L \cap K)B_L} U = KLU = KQ \supset KB$$

KQ は closed より $\overline{KB} = KQ$. $p: G \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ を $p(g) = g \cdot \mathfrak{b}$ により定めると、 p が閉写像であることを用いて

$$\overline{K \cdot \mathfrak{b}} = \overline{K \cdot p(B)} = p(\overline{KB}) = p(KQ) = KQ \cdot \mathfrak{b} = KL \cdot \mathfrak{b} = K \cdot \{g \cdot \mathfrak{b}; g \in L\}$$

q.e.d.

この証明は松木敏彦氏に教えて頂きました。松木氏に感謝します。

Lemma 2.6. $\mathfrak{b}_L^1 \in \mathcal{B}_l^L$ を l の large type の θ -stable な Borel 部分環とし、全単射

$$\mathcal{B}_l^L / K_L \simeq \mathcal{N}_{s_L}^{l-pr} / K_L$$

により $K_L \cdot \mathfrak{b}_L^1 \in \mathcal{B}_l^L / K_L$ に対応する巾零 K_L 軌道を $\mathcal{O}_L^1 \in \mathcal{N}_{s_L}^{l-pr} / K_L$ とする (i.e. $\mathfrak{b}_L^1 \cap \mathcal{O}_L^1 \neq \emptyset$)。 $\mathfrak{b}^1 := \mathfrak{b}_L^1 + \mathfrak{u} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ とおけば、次が成り立つ。

$$\overline{\pi(T_{K \cdot \mathfrak{b}^1}^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}})} = \overline{Ind^{\theta}((l, q) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{O}_L^1)}$$

Proof. $\mathfrak{b}^1, \mathfrak{b}_L^1$ の nilpotent radical をそれぞれ $(\mathfrak{b}^1)^{\perp}, (\mathfrak{b}_L^1)^{\perp}$ とかく。Remark 2.3 より

$$\pi(T_{K \cdot \mathfrak{b}^1}^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) = K \cdot \{(\mathfrak{b}^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s}\} = K \cdot \{(\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}\}$$

$$\supset K_L \cdot \{(\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}\} = K_L \cdot \{(\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s}\} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s} \supset \mathcal{O}_L^1 + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}.$$

$\mathcal{O}^1 = Ind^{\theta}((l, q) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{O}_L^1)$ とかくとき、 $\mathcal{O}^1 \cap (\mathcal{O}_L^1 + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}) \neq \emptyset$ より $\pi(T_{K \cdot \mathfrak{b}^1}^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) \supset \mathcal{O}^1$ 。
よって

$$\overline{\pi(T_{K \cdot \mathfrak{b}^1}^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}})} \supset \overline{\mathcal{O}^1}.$$

次に $\mathcal{O}_L^1$ は l -principal より $\mathcal{N}_{s_L}$ の開 K_L 軌道である。よって $\mathcal{O}_L^1 \cap \{(\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s}\} \neq \emptyset$ は $(\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s}$ の開集合である。従って $(\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s} \subset \overline{\mathcal{O}_L^1}$ かつ

$$(\mathfrak{b}^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s} = (\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s} \subset \overline{\mathcal{O}_L^1} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s} = \overline{(\mathcal{O}_L^1 + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s})}$$

である。 $\mathcal{O}^1 \cap (\mathcal{O}_L^1 + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}) \neq \emptyset$ が $\mathcal{O}_L^1 + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}$ で open dense であることから $\overline{(\mathcal{O}_L^1 + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s})} \subset \overline{\mathcal{O}^1}$ 。
従って

$$\pi(T_{K \cdot \mathfrak{b}^1}^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) = K \cdot \{(\mathfrak{b}^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s}\} \subset K \cdot \overline{(\mathcal{O}_L^1 + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s})} \subset \overline{\mathcal{O}^1}.$$

q.e.d.

Lemma 2.7. $\mathfrak{b}$ の K 軌道の閉包に含まれる任意の K 軌道 $Y \subset \overline{K \cdot \mathfrak{b}}$ に対して代表 $\mathfrak{b}^1 = \mathfrak{b}_L^1 + \mathfrak{u} \in Y$ ($\mathfrak{b}_L^1 \in \mathcal{B}_l$) をとる (cf. Proposition 2.5)。 $(\mathfrak{b}_L^1)^{\perp} \cap \mathfrak{s} (\subset \mathcal{N}_{s_L})$ が既約である
ことと

$$\mathcal{N}_{s_L} = \bigcup_{\mathcal{O}_L \in \mathcal{N}_{s_L}^{l-pr} / K_L} \overline{\mathcal{O}_L}$$

([KR]) により $\mathcal{O}_L \in \mathcal{N}_{s_L}^{l-pr}/K_L$ で $(b_L^1)^\perp \cap s \subset \overline{\mathcal{O}_L}$ となるものが存在する。このとき次が成り立つ。

$$\pi(T_Y^* \mathcal{B}_g) = \pi(T_{K \cdot b^1}^* \mathcal{B}_g) \subset \overline{Ind^\theta((l, q) \uparrow g)(\mathcal{O}_L)}$$

Proof. $\pi(T_{K \cdot b^1}^* \mathcal{B}_g) = K \cdot \{(b_L^1)^\perp \cap s + u \cap s\} \subset K \cdot (\overline{\mathcal{O}_L} + u \cap s)$

であるが $\mathcal{O} := \overline{Ind^\theta((l, q) \uparrow g)(\mathcal{O}_L)}$ とかけば $\mathcal{O} \cap (\mathcal{O}_L + u \cap s)$ は $\mathcal{O}_L + u \cap s$ で open dense だから

$$\overline{\mathcal{O}_L + u \cap s} = \overline{(\mathcal{O}_L + u \cap s)} \subset \mathcal{O}$$

よって

$$\pi(T_{K \cdot b^1}^* \mathcal{B}_g) \subset \mathcal{O} = \overline{Ind^\theta((l, q) \uparrow g)(\mathcal{O}_L)}.$$

q.e.d.

Theorem 2.4 の証明. 任意の K 軌道 $Y = K \cdot b^1 \in \overline{K \cdot b}/K$ ($b^1 \in \mathcal{B}_g$) に対して Lemma 2.7 より $\pi(T_Y^* \mathcal{B}_g) \subset \overline{Ind^\theta((l, q) \uparrow g)(\mathcal{O}_L)}$ となる $\mathcal{O}_L \in \mathcal{N}_{s_L}^{l-pr}/K_L$ が存在する。これより

$$\pi(\cup_{Y \in \overline{K \cdot b}/K} T_Y^* \mathcal{B}_g) \subset \cup_{\mathcal{O} \in \mathcal{I}_b} \overline{\mathcal{O}}.$$

次に $p: T^* \mathcal{B}_g \rightarrow \mathcal{B}_g$ を射影とすると

$$\cup_{Y \in \overline{K \cdot b}/K} T_Y^* \mathcal{B}_g = \pi^{-1}(s) \cap p^{-1}(\overline{K \cdot b})$$

は閉集合、 π は proper より $\pi(\cup_{Y \in \overline{K \cdot b}/K} T_Y^* \mathcal{B}_g)$ は s の閉集合である。

$$\mathcal{Z} := K \cdot \{b_L^0 + u; b_L^0 \in \mathcal{B}_l^L\} \subset \mathcal{B}_g/K$$

とおけば Proposition 2.5 より $\mathcal{Z} \subset \overline{K \cdot b}/K$ であるから

$$\pi(\cup_{Y \in \overline{K \cdot b}/K} T_Y^* \mathcal{B}_g) \supset \cup_{Z \in \mathcal{Z}} \pi(T_Z^* \mathcal{B}_g)$$

. Lemma 2.6 により

$$\cup_{Z \in \mathcal{Z}} \overline{\pi(T_Z^* \mathcal{B}_g)} = \cup_{\mathcal{O}_L \in \mathcal{N}_{s_L}^{l-pr}/K_L} \overline{Ind^\theta((l, q) \uparrow g)(\mathcal{O}_L)} = \cup_{\mathcal{O} \in \mathcal{I}_b} \overline{\mathcal{O}}.$$

従って

$$\pi(\cup_{Y \in K \cdot \bar{b}/K} T_Y^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) = \cup_{\mathcal{O} \in \mathcal{I}_{\bar{b}}} \overline{\mathcal{O}}$$

q.e.d.

§3. (AIII) 型の場合における $\mathcal{I}_{\bar{b}}$ の記述

ここでは (AIII) 型の場合に、標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に対応する任意の Borel 部分環 $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ について、 $\mathcal{I}_{\bar{b}}$ の記述を証明抜きで与える。

◇ ab 図形

有限次元複素ベクトル空間 V と、その対合 s_V の対 (V, s_V) を対合付きベクトル空間と呼ぶことにする。 (V, s_V) に対して次のようにおく。

$$V^a := \{v \in V; s_V v = v\}, V^b := \{v \in V; s_V v = -v\}$$

$$K(V) := \{g \in GL(V); s_V g s_V^{-1} = g\} \simeq GL(V^a) \times GL(V^b)$$

$$\mathfrak{s}(V) := \{X \in \mathfrak{gl}(V); s_V X s_V^{-1} = -X\} \simeq Hom(V^a, V^b) \times Hom(V^b, V^a)$$

とおく。

$m = \dim V^a$, $n = \dim V^b$ のとき $(GL(V), K(V))$ は $(GL(m+n, \mathbb{C}), GL(m, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}))$ ($\leftrightarrow U(m, n)$) と同型な対称対となる。

ヤング図形の箱口の代りに a または b を置き、横には a と b が交互に並ぶようにした図形を ab 図形という。 a の個数が p 個、 b の個数が q 個の ab 図形の集合を $D(p, q)$ で表す。 ab 図形 η の a (resp. b) の個数を $n_a(\eta)$ (resp. $n_b(\eta)$) で表す。また、 η の第 1 列を除いて得られる ab 図形を η' とし $\eta^{(j)}$ を $\eta^{(j)} := \{\eta^{(j-1)}\}'$ により定める。

Definition 3.1. $\eta, \mu \in D(p, q)$ に対して

$$\eta \geq \mu \Leftrightarrow_{\text{def}} n_a(\eta^{(j)}) \geq n_a(\mu^{(j)}), n_b(\eta^{(j)}) \geq n_b(\mu^{(j)}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

と置くことにより、 $\geq$ は $D(p, q)$ の順序を定める。

Proposition 3.2. (i) $\mathfrak{s}(V)$ の巾零 $K(V)$ 軌道の集合は $D(\dim V^a, \dim V^b)$ により分類される :

$$D(\dim V^a, \dim V^b) \simeq \mathcal{N}_{\mathfrak{s}(V)} / K(V) \quad (\eta \leftrightarrow \mathcal{O}_\eta)$$

(ii) ([O1]) $\eta, \mu \in D(\dim V^a, \dim V^b)$ に対して

$$\eta \geq \mu \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O}_\eta} \supset \mathcal{O}_\mu$$

が成り立つ。

◇ ab 図形の積 *

$(U, s_U), (V, s_V)$ を対合付きベクトル空間とする。

$$s_{U \oplus V} := \begin{pmatrix} s_U & 0 \\ 0 & s_V \end{pmatrix}$$

と置くことにより $(U \oplus V, s_{U \oplus V})$ も対合付きベクトル空間となる。

$$\theta(g) = s_{U \oplus V} g s_{U \oplus V}^{-1} \quad (g \in GL(U \oplus V))$$

は対称対 $(GL(U \oplus V), \theta)$ を定める。

$$\mathfrak{q} := \mathfrak{gl}(U) \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus \text{Hom}(U, V)$$

は $\mathfrak{gl}(U \oplus V)$ の θ -stable な放物型部分環であり、

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{gl}(U) \oplus \mathfrak{gl}(V)$$

は、その θ -stable な Levi factor である。

Definition 3.3. ab 図形 $\eta \in D(\dim U^a, \dim U^b)$, $\mu \in D(\dim V^a, \dim V^b)$ は $\mathfrak{s}_L := \mathfrak{s}(U) \oplus \mathfrak{s}(V)$ の巾零 $K(U) \times K(V)$ 軌道

$$\mathcal{O}_\eta \times \mathcal{O}_\mu \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L} / (K(U) \times K(V)) = \mathcal{N}_{\mathfrak{s}(U)} / K(U) \times \mathcal{N}_{\mathfrak{s}(V)} / K(V)$$

を定める。このとき ab 図形 $\eta * \mu \in D(\dim(U \oplus V)^a, \dim(U \oplus V)^b)$ を

$$\mathcal{O}_{\eta * \mu} = \text{Ind}^\theta((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{gl}(U \oplus V))(\mathcal{O}_\eta \times \mathcal{O}_\mu)$$

により定める。

Proposition 3.4. 上の積 $*$ に関して結合律

$$(\eta * \mu) * \nu = \eta * (\mu * \nu)$$

が成り立つ。

Remark 3.5. ab 図形 η に対して $a * \eta$ (resp. $b * \eta$) は η の b で (resp. a で) 始まる最長の行の初めに a (resp. b) を加えて得られる ab 図形に一致する。また、 $\eta * a$ (resp. $\eta * b$) は η の b で (resp. a で) 終わる最長の行の終わりに a (resp. b) を加えて得られる ab 図形に一致する。これにより ν が 1 つの行から成る ab 図形のときは、Proposition 3.4 を用いて $\nu * \eta$, $\eta * \nu$ が計算できる。

Example. $a * \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, $b * \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & b \\ b & a & b \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b \end{pmatrix} * b = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b \\ b \end{pmatrix}.$$

◇ $\mathcal{I}_b = \text{Ind}^\theta((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{N}_{s_L}^{\mathfrak{l}-pr} / K_L)$ の記述

$m \geq n \geq \ell \geq 0$ として、 $m' = m - \ell$, $n' = n - \ell$, $G = GL(m + n, \mathbb{C})$ とおく。

$$S = \begin{pmatrix} 1_{m'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\ell \\ 0 & 0 & 1_\ell & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta(g) = SgS^{-1} \quad (g \in G)$$

とおくと、対称対 (G, θ) に対応する実型 $G(\mathbb{R})$ は $U(m, n)$ に同型となる。 $\mathfrak{gl}(m + n, \mathbb{C})$ の対角行列

$$t = \text{diag}(a_1, \dots, a_{m'}, b_1, \dots, b_{n'}, c_1^+, \dots, c_\ell^+, c_1^-, \dots, c_\ell^-)$$

の全体 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m+n, \mathbb{C})$ の Cartan 部分環となる。 $\mathfrak{h}$ のウエイト $\lambda_i, \mu_i, \epsilon_i^+, \epsilon_i^- \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\lambda_i(t) = a_i, \mu_i(t) = b_i, \epsilon_i^+(t) = c_i^+, \epsilon_i^-(t) = c_i^-$$

により定めると

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}^c = \{\lambda_i - \lambda_j, \mu_i - \mu_j\} : \text{compact imaginary roots}$$

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}^n = \{\pm(\lambda_i - \mu_j)\} : \text{non - compact imaginary roots}$$

となる。

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_{m'}, \mu_1, \dots, \mu_{n'}\}$ の順列全体の集合を $\mathcal{P}(\{\lambda_i, \mu_j\})$ とかく。 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{m'+n'}) \in \mathcal{P}(\{\lambda_i, \mu_j\})$ に対して

$$\Sigma_\nu := \{\nu_i - \nu_{i+1}; 1 \leq i \leq m' + n' - 1\}$$

とおくと

$$\mathcal{P}(\{\lambda_i, \mu_j\}) \simeq \{R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_{i\mathbb{R}} \text{ の正系 } \} (\nu \leftrightarrow \Sigma_\nu)$$

となる。

ν に対して ab 図形 $\eta_\nu \in D(m', n')$ を

$$\eta_\nu := c_1 * c_2 * \dots * c_{m'+n'}$$

により定める。ここに

$$c_p := \begin{cases} a & (\nu_p \in \{\lambda_i\}) \\ b & (\nu_p \in \{\mu_j\}) \end{cases}$$

である。このとき次が成り立つ。

Theorem 3.6. $Q = LU$ は $\text{Lie}(L) = \mathfrak{l} \supset \mathfrak{h}$ を満たす $\mathfrak{g}$ の θ -stable な放物型部分群とし、 L は quasisplit であるとする。 $R(u^-, \mathfrak{h})_{i\mathbb{R}} = \Sigma_\nu (\nu \in \mathcal{P}(\{\lambda_i, \mu_j\}))$ とするとき

$$\max[\text{Ind}^\theta((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)] = \max\{\mathcal{O}_\eta; \eta \in \{\eta_\nu * \overbrace{ab \dots ab}^{2\ell}, \eta_\nu * \overbrace{ba \dots ba}^{2\ell}\}\}$$

が成り立つ。ここに $\max\{\}$ は $\{\}$ の closure relation に関して極大であるものの全体を表す。特に、この軌道の集合は $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系 Σ_ν のみに依存する。

Corollary 3.7. Theorem 3.6 の仮定のもとに $\mathfrak{b}_L \cap \mathfrak{h}$ を $\mathfrak{l}$ の任意の split (i.e. $\theta(\mathfrak{b}_L) = \mathfrak{b}_L^-$) な Borel 部分環とし、 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_L + \mathfrak{u} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ と置く。このとき

$$\pi(\cup_{Y \in \overline{K \cdot \mathfrak{b}}/K} T_Y^* \mathcal{B}) = \overline{\mathcal{O}_{\eta_1}} \cup \overline{\mathcal{O}_{\eta_2}}$$

が成り立つ。ここに $\eta_1 := \eta_{\nu} * \overbrace{ab \dots ab}^{2\ell}$, $\eta_2 := \eta_{\nu} * \overbrace{ba \dots ba}^{2\ell}$ である。

References

- [AV] J. Adams and D. Vogan, L-groups, projective representations, and the Langlands classification, Amer. J. Math. 113(1991), 45-138.
- [BB] W. Borho and J.-L. Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces III, Inventiones math. 80(1985), 1-68.
- [KR] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math. 93(1971), 753-809.
- [M] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan 31, No. 2 (1979), 331-357
- [O1] T. Ohta, The closure of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities, Tohoku Math. J. 43(1991), 161-211.
- [O2] 太田琢也、実代数群の標準表現の associated variety と巾零軌道の誘導、数理解析研究所講究録 929(1995), 1-18.
- [V] D. Vogan, Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.
- [Y] H. Yamashita, Associated variety and Gelfand-Kirillov dimensions for the discrete series of a semisimple Lie group, Proc. Japan Acad., 70, Ser. A, No. 2, 1994, 50-55.