

乱流のエネルギー散逸クラスター

東大、理、物理 真田 勉

計算流体研 石井 克哉

(1990年3月5日 受理)

第1章 序

自然現象や工学上の問題で現れる大部分の流れは乱流である。また乱流は、物理の問題としても極めて興味ある統計現象のひとつである。乱流の性質は一般にその主流（平均流）や境界条件に強く依存するが、十分に乱れた流れの中では、小さいスケールの現象が普遍的な統計的性質や構造を持つと考えられている。この普遍的な性質を発見し、それを理論的に解明することが、乱流理論の大きな目標のひとつである。

一様等方乱流理論で中心的な役割を果たしているコルモゴロフ（1941）の理論では、乱流のエネルギースペクトル $E(k)$ が

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1)$$

のようにスケーリングされる慣性領域の存在を予想する。ここに、 C はコルモゴロフ定数と呼ばれる無次元定数であり（実験では約 1.5）、 ε は単位時間、単位質量当りのエネルギー散逸率、そして k は波数である。指数 $-5/3$ はすでに数多くの実験や最近の大規模な数値シミュレーションによって確認されている。

この論文の内容は、1989年11月、統計数理研究所で開催された研究会「乱流の統計理論とその応用」で講演発表されたものです。

ところで、この理論においては、エネルギー散逸率 ε は次元解析におけるパラメータとして扱われているが、実際には、その散逸率は

$$\varepsilon(x, t) = (\nu/2) \sum_{i,j} (\partial u_i / \partial u_j + \partial u_j / \partial u_i)^2 \quad (2)$$

で与えられる、場所と時間に依存する「エネルギー散逸場」である。ここに $u_i(x, t)$ ($i=1, 2, 3$) は乱流の速度場、 ν は動粘性率である。エネルギー散逸場の揺らぎ、すなわちその統計性が、コルモゴロフのスケーリング(1)に影響を与えるかどうかは、1944年、ランダウとリフシッツ(1959)によって初めて指摘されて以来、現在でもまだ未解決の問題である。他方、乱流のエネルギー散逸場の統計が特異なものであることが、実験で発見された (Batchelor and Townsend, 1949)。乱流の速度場はほぼガウス分布に従うが、速度の微分場はガウス分布からずれている。さらに、レイノルズ数が大きいほど、そのずれは大きくなる。具体的には微分場の尖り度 (Kurtosis)

$$\langle (\partial u / \partial x)^4 \rangle / (\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle)^2 \quad (3)$$

がレイノルズ数と共に大きくなる (たとえば、Van Atta and Antonia, 1980)。(2)より $(\partial u / \partial x)$ はエネルギー散逸と関係している。従って実験事実、乱流の中でエネルギー散逸の大きい領域が一様に分布しているのではなく、間欠的 (intermittent) に存在していることを意味する。エネルギー散逸場の間欠的構造や空間分布の統計的性質の解明は、乱流理論の中心的問題のひとつであるが、あまり研究は進んでいない。その原因のひとつは、実験においては散逸場そのものを直接得ることは不可能に近いからである。今までのところ、乱流の

実験では、ある固定した点の速度の値を時系列として取り出し、テイラー仮説を用いて、 $\partial u / \partial t$ と $\partial u / \partial x$ または $\nu (\partial u / \partial x)^2$ と ε の統計性を同一視して調べている。しかし、1次元的な情報である時系列から、瞬間的な3次元空間場の構造に関する情報を手に入れることは困難である。

ところで、乱流は Navier-Stokes 方程式という比較的簡単な支配方程式に従っていると考えられている。適当な(なるべく簡単な)境界条件と初期条件を与えて、この支配方程式を数値的に解くことにより、計算機の中に「乱流」を作り、エネルギー散逸場の中に潜む法則を探り出せる。本論文は数値的方法で得られたエネルギー散逸場の性質を紹介する。

第2章 3次元乱流場

3次元乱流場は非圧縮性流体の運動を支配する、次の Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことにより得られる。

$$\partial u / \partial t + (u \cdot \text{grad})u = -\text{grad } p + \nu \Delta u + f \quad (4)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (5)$$

ここに p は圧力である。外力 f は比較的大きなスケールのフーリエ成分のみからなっている。各方向、周期 2π の周期境界条件を課すことにより、フーリエスペクトル法 (Orszag, 1971)を用いて解く。粘性率の異なる4つのRUNを実行することにより、最終的にレイノルズ数の異なる乱流場を作り、統計的性質のレイノルズ数依存性を調べることができる。空間格子点は 128^3 または 256^3 である。

エネルギー $E = (1/2) \langle u^2 \rangle$ ($\langle \cdot \rangle$ は空間平均を表す)、エネルギー散

逸率 $\varepsilon = \langle \varepsilon(x) \rangle$ および マイクロスケールレイノルズ数 $R_\lambda (= \sqrt{2E} / \sqrt{(E/Q)/\nu})$ の時間発展を図 1-3 に示す。t=40 以降は、ほぼ定常な状態に落ち着いている。そこで、以下では 代表的な時刻 t=100 における乱流場の間欠構造を調べる。まず図 4 はエネルギースペクトル $E(k)$ を、図 5 はエンストロフィースペクトル $Q(k) = k^2 E(k)$ を示している。 $-5/3$ 乗の慣性領域が、 ν が小さくなるほど高波数側へ伸びていることがわかる。コルモゴロフ定数 2.0 は、実験値に比べれば、やや大きめかもしれない。これはおそらくレイノルズ数の違いに依るものであろう。またエンストロフィースペクトル（これはスケール毎のエネルギー散逸量を表す）のピークはほぼ $k=20$ にある。外力は ほぼ $k=2$ にかかっているので、エネルギーの input と粘性による散逸は約 1 オクターブのスケール分離を起こしている。このようなスケール分離はコルモゴロフ理論の基本的な仮説のひとつである。

第3章 エネルギー散逸クラスター

この数値計算から求めた散逸場もまた間欠的である。図 6 は $z=0$ の面の鳥かん図（上）と等高線図（下）である。比較のため図 7 に、同じ時刻、同じ平面のエネルギー u^2 の鳥かん図と等高線図を描いてある。エネルギーはほぼ一様に広がっているが、エネルギー散逸場には散逸が集中したスパイク状の構造が見える。また、等高線図にはエネルギー散逸のかたまり（クラスター）が見える。このクラスターを用いて間欠構造を定量的に調べる。

「エネルギー散逸クラスター」を次のように定義する。最初に、しきい値を選ぶ。そのしきい値よりも大きな値を持つ、連結した領域を 1 個のクラスターと呼ぶ。連結性は数値計算に用いた格子点を使って判断する（但し、 256^3 の格子点は 128^3 に粗視化する）。クラスターはしきい値に依存することに注意すべきである。また、クラスターに含まれる格子点の数を、そのクラスター

の体積またはサイズと呼ぶことにする。クラスターの中で起こるエネルギー散逸が大きければ大きいほど、その場は間欠的であると言えよう。図8はクラスターへの集中度を表わしている。VOLUME RATIO は（クラスターの占める体積）／（全体積）で定義される。また ENERGY-DISSIPATION RATIO は（クラスター中で起こるエネルギー散逸）／（全空間で起こるエネルギー散逸）を表す。しきい値を変化させることにより、VOLUME RATIO を変えることができる。すなわち、図8は「どれだけの体積にどれだけのエネルギー散逸が起こっているか」（エネルギー散逸の集中度）を表している。図から、レイノルズ数による違いはあまり見られない。ところで、一般に ε の分布関数が与えられれば、VOLUME RATIO vs ENERGY-DISSIPATION RATIO の関係は決まる。例えば ε の分布について次の指数分布 (Yamamoto and Hosokawa, 1988)

$$\text{Prob}(\sqrt{\varepsilon} > a) = \exp(-\gamma a) \quad (6)$$

（ γ は adjustable parameter）を仮定すれば、VOLUME RATIO(v_r) と ENERGY-DISSIPATION RATIO(ε_r) の関係は

$$\varepsilon_r = (1/2) \{ (\log v_r)^2 - 2 \log v_r + 1 \} v_r \quad (7)$$

と求まる。この関係式が図8の実線で表されている。指数分布は集中度を多少、過大評価気味である。

次に VOLUME RATIO とその VOLUME を賄うクラスターの数との関係を調べる（図9）。こちらの図ではレイノルズ数による違いがはっきりと現れている。すなわち、レイノルズ数が大きい散逸場の方が、「同じ体積」を賄うクラスターの数が多くなっている。逆に言えば平均的なクラスターのサイズは小さくなり、

より小さな構造からできていることを意味する。言い換えれば、レイノルズ数の大きい散逸場の方が「バラバラ」になっていく。

最後にクラスターサイズの分布関数を調べる。図10はレイノルズ数が最も大きい場について、しきい値を変化させたときの、クラスターサイズの分布関数である。しきい値の変化に依って、特定のサイズを持ったクラスターの個数は変化するが、分布関数のべき指数 -2 はほとんど変化しない。他のレイノルズ数の場についても同じ結果が得られた。このようなべき分布は、特徴的なクラスターサイズが無いという意味で、自己相似性の反映である。

第4章 まとめ

「エネルギー散逸クラスター」という新しい概念を導入して、3次元乱流のエネルギー散逸場の間欠性を定量的に調べてきた。集中度、連結性（または、spottiness）そして自己相似性が解析された。ところで「間欠的」とは正に「クラスター形成」に他ならない。従って、クラスター統計を用いることによって、間欠的乱流場の様々な性質が明らかにされるであろう。特に乱流場の3次元構造に、興味ある統計法則が隠されていることを本研究は予感させる。

謝辞

この論文を書くことを勧めて下さった、小貫明氏に感謝いたします。

参考文献

- G.K.Batchelor and A.A.Townsend, 1949, Proc.R.Soc.London A199, 238.
- A.N.Kolmogorov, 1941, C.R.Acad.Sci.USSR 30, 301.
- L.D.Landau and E.M.Lifshitz, 1959, Fluid Mechanics (Pergamon Press),

Chap.3.

S.A.Orszag, 1971, Stud.Appl.Math.50, 293.

C.W.Van Atta and R.A.Antonia, 1980, Phys.Fluids 23, 252.

K.Yamamoto and I.Hosokawa, 1988, J.Phys.Soc.Jpn.57, 1532.

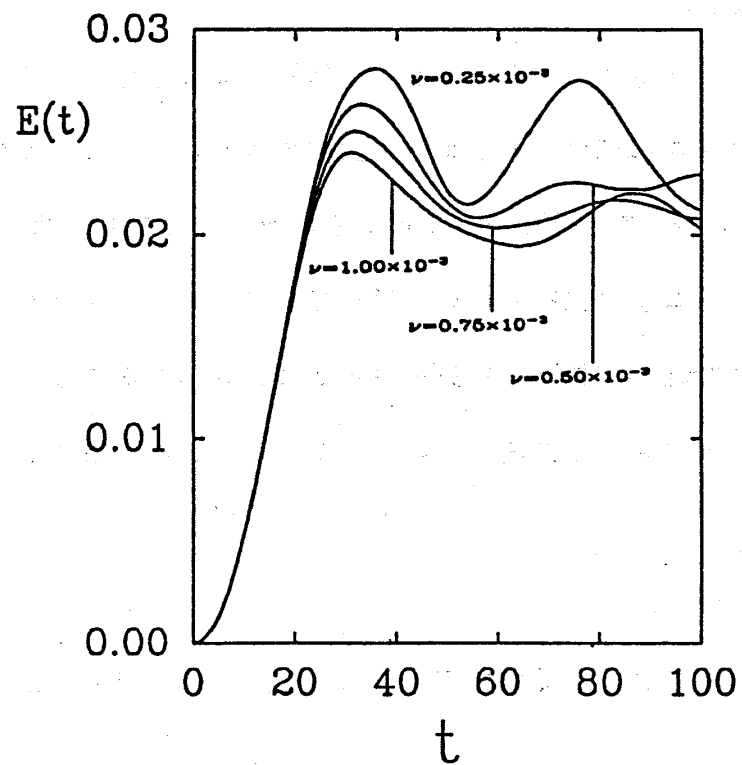


図1. エネルギーの時間発展.

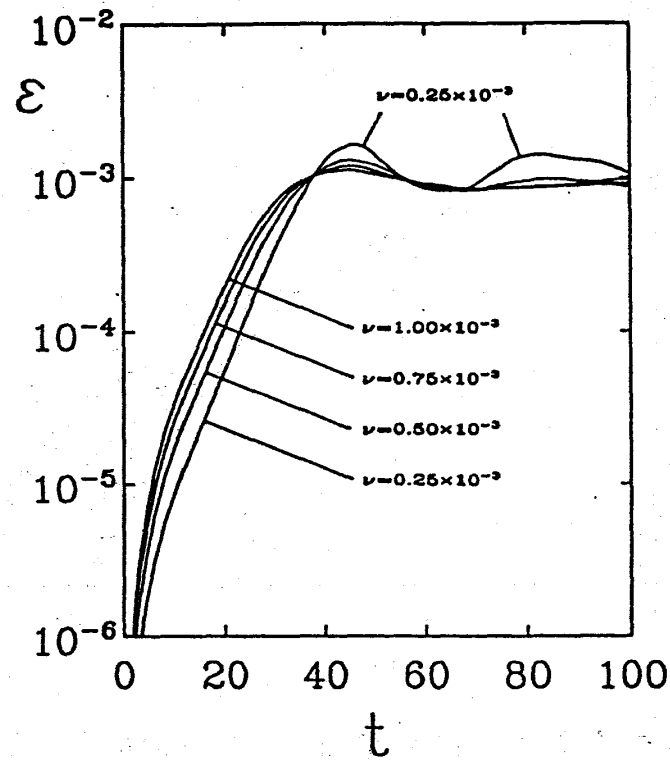


図2. エネルギー散逸率の時間発展.

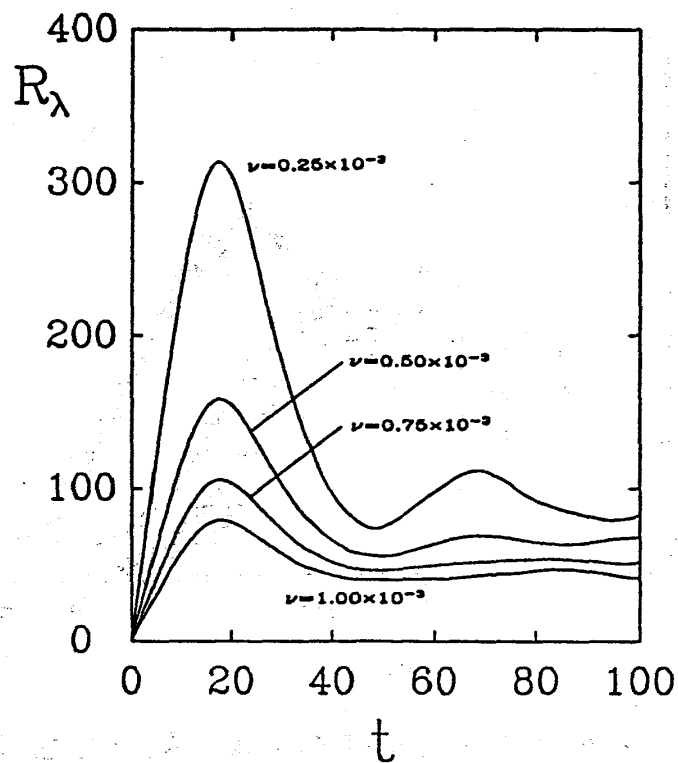


図3. マイクロスケールレイノルズ数の時間発展.

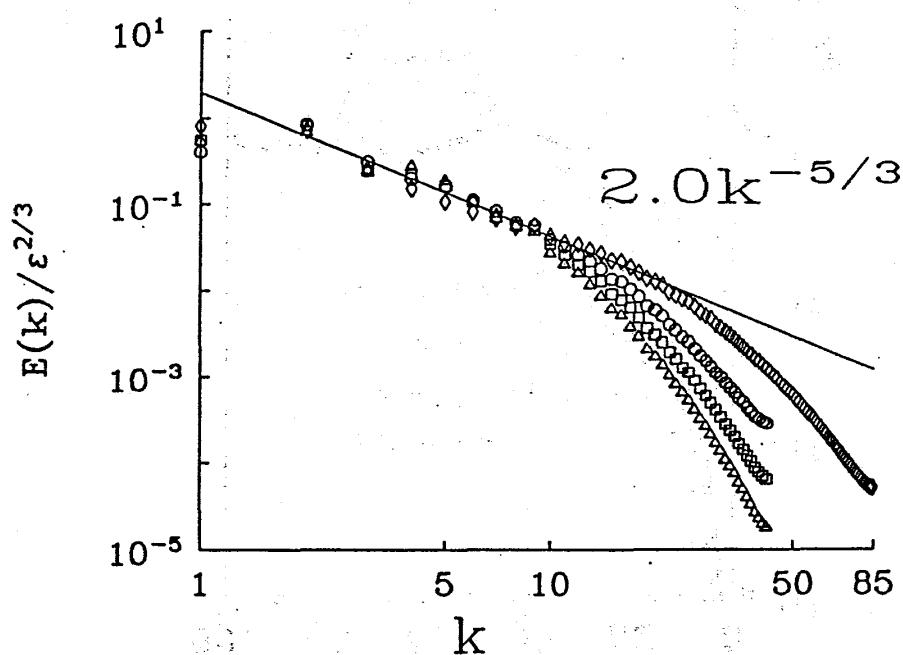


図4. エネルギースペクトル. 記号◇は $\nu=0.25 \times 10^{-3}$ 、○は 0.50×10^{-3} 、□は 0.75×10^{-3} 、△は 1.00×10^{-3} の場を表す。

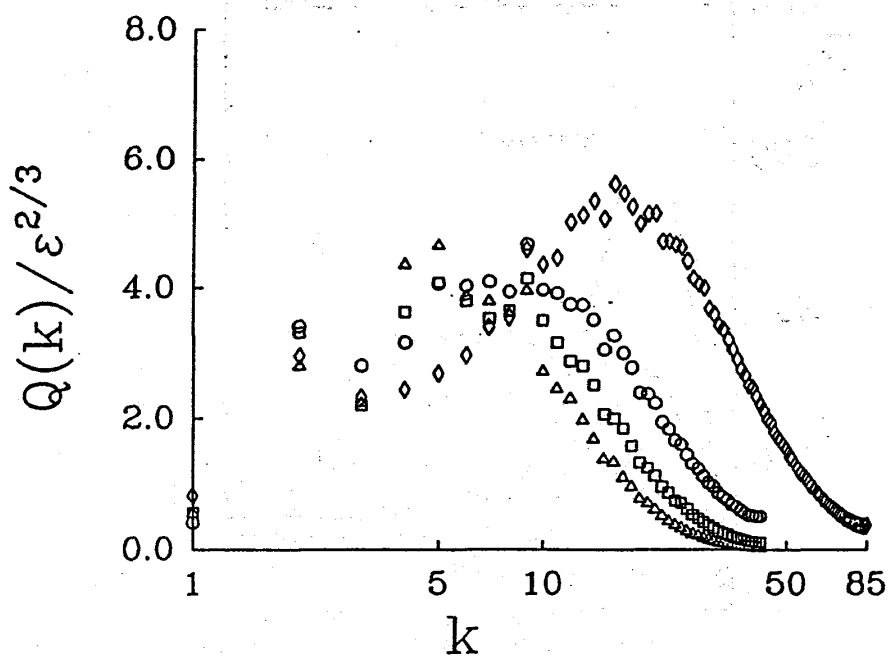


図5. エンストロフィースペクトル. 記号は図4と同じ.

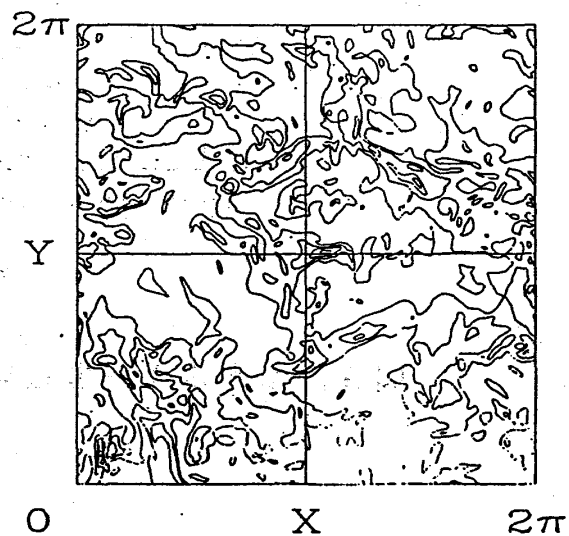
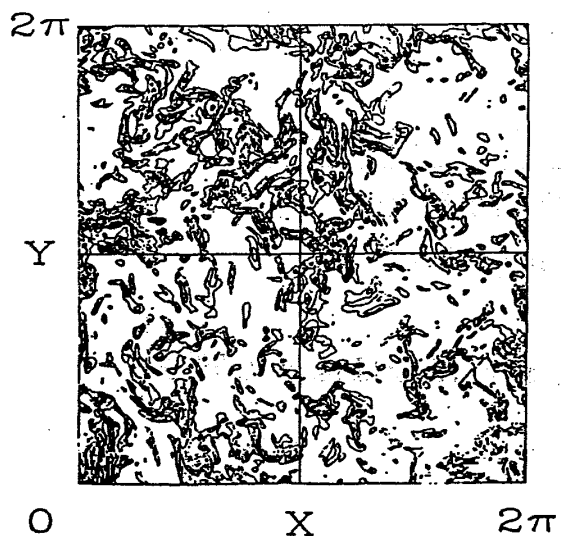
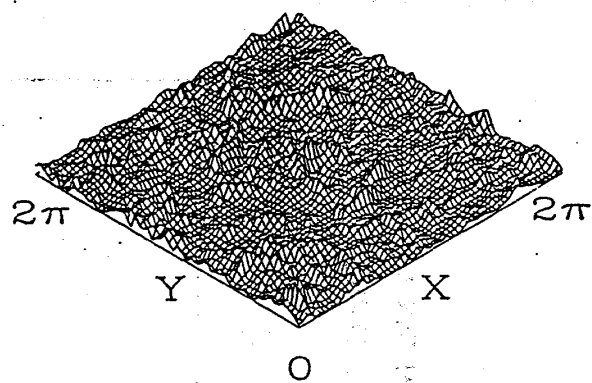
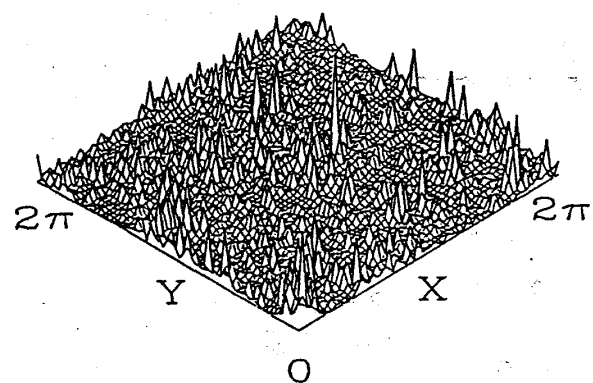


図6. $z=0$ 面のエネルギー散逸場：
鳥かん図（上）と等高線図（下）。

図7. $z=0$ 面のエネルギーの場：
鳥かん図（上）と等高線図（下）。

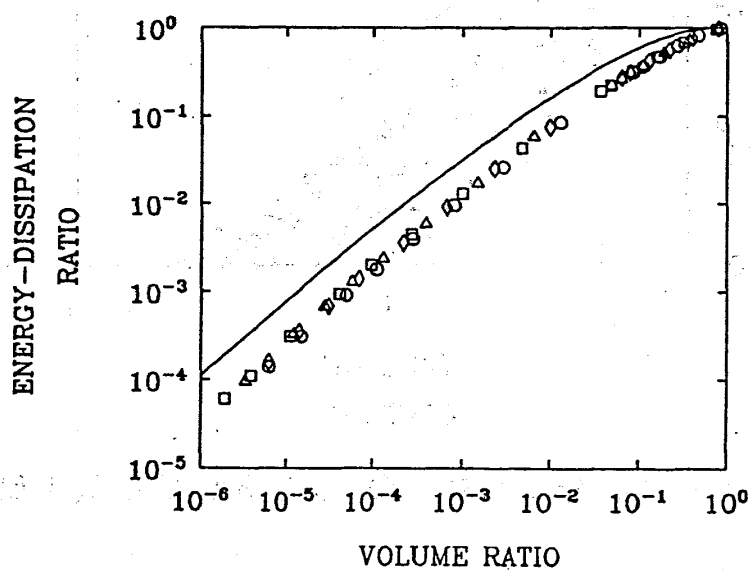


図8. エネルギー散逸の集中度。記号は図4と同じ。

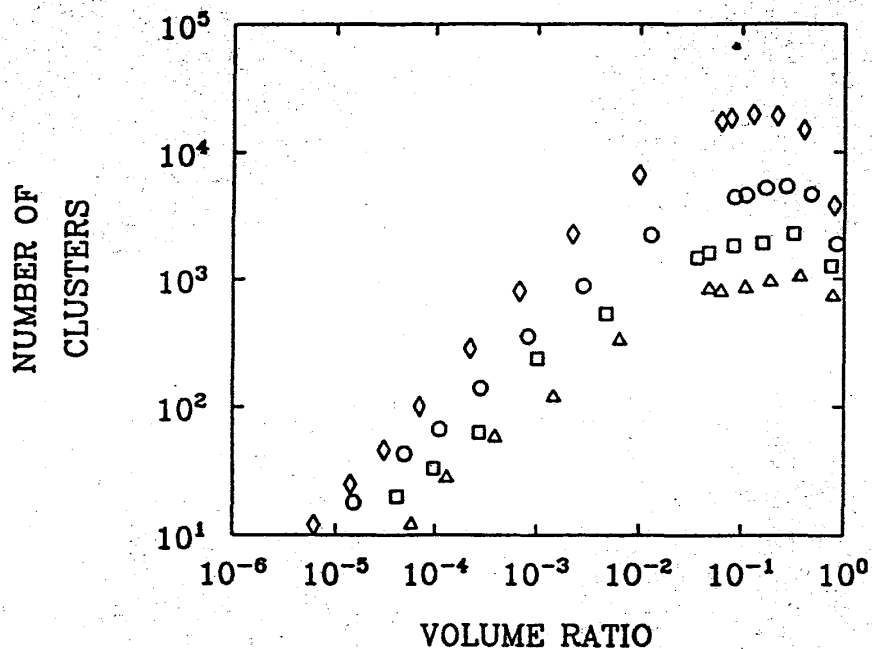


図 9. エネルギー散逸場の連結性. 記号は図 4 と同じ.

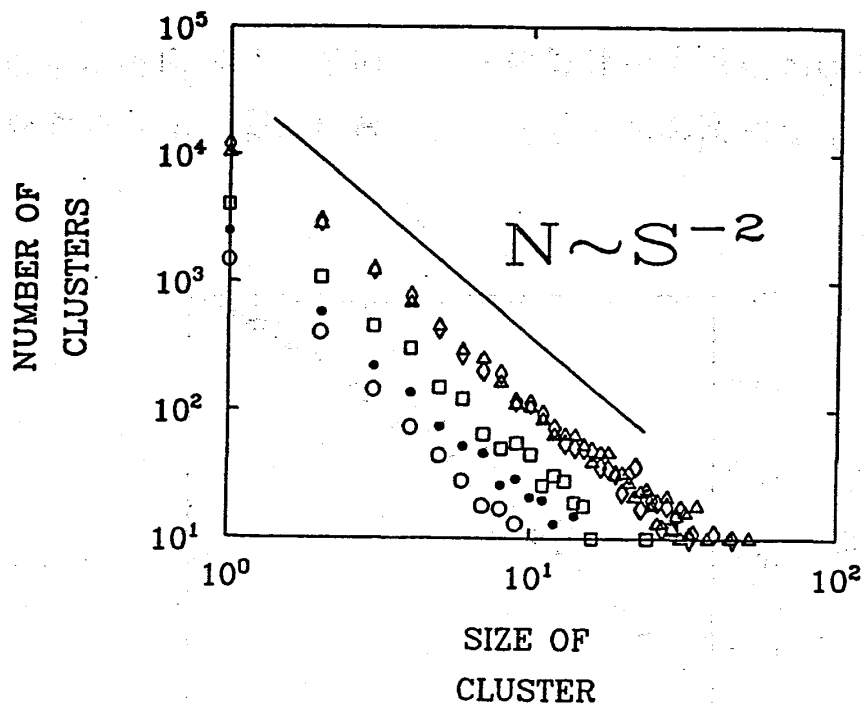


図 10. クラスターサイズの分布関数. $\circ$ はしきい値が最大値の $3/10$ 、 $\square$ は $2/10$ 、 $\triangle$ は $1/10$ 、 $\diamond$ は $5/100$ 、 $\bullet$ は $1/100$ を表す.