ブラウン運動の階層性
—古典的モデル，中性子散乱，クォーク・グルオンプラズマにおいて

早大・理工　水谷雅志，室谷　心，並木美喜雄

1. はじめに

自然界には物質の階層性があることがよく知られている。……大宇宙ー銀河系ー太陽系ー地球ー身近な物体ー分子・原子ー原子核ー素粒子ークォークー……と続く階層性である。素粒子論では，物質の構成要素が発見されれば，「わかった」と素朴に考えていた時代があったように思う。最近の素粒子論の発展は「わかる」ということのむずかしさを改めて示しているかのようだ。

一方，多重発生をともなう高エネルギー反応の分析では，しばしば，「一体何がわかったのか？」という質問に悩ませられてきた。実際，「わかる」ということは何であるかを真剣に考えた人も多いと思う。この不透明さが若い研究者を高エネルギー反応の研究から遠ざけた一因かもしれない。

では，そのような複雑な現象を「わかる」とは，どういうことであるか？　それは，まず第一に，現象論の確立である。少数の現象論的パラメータ（物質定数）をもつ現象論によって，現象の本質的局面が理解できたとき，「わかる」ための作業は第一段階を終了する。第二段階は，その現象論（および物質定数）を基礎的な力学法則（第一原理）から導出することである。この二つの段階が完成して，はじめて「わかった」といえると，私は考える。

しかし，現象論と第一原理の距離は多くの場合極めて遠い，そこに，“中間段階過程”とその理論が登場する余地と必要性がある。すなわち，複雑な物質現象は

現象 ── 現象論 ── 中間段階理論 ── 第一原理

という階層性によって理解すべきものである。この考えの意識的適用を試みたい。

とはいっても，この考えはここではじめて導入するものではない。すでに，物性論や原子核物理などで，意識的または無意識的に使われてきた考えでもある。この小文では，その考えを

(i) 古典的ブラウン運動

(ii) 低エネルギー中性子・原子核弾性散乱

(iii) クォーク・グルオン・プラズマを目指した流体理論

に適用しよう。

(i) 古典的ブラウン運動では，第一原理はいうまでもなく多体のニュートン力学である。現象論としては，例えば，オームの法則をとることができよう。中間段階理論としては，一体的ブラウン運動を記述するランジュバン方程式が適当である。これは現象論パラメータとして摩擦係数を含む。オームの法則における伝導率はその摩擦係数によって表される。一方，摩擦係数は第一原理から導出されるというわけであ

る。なお，一体的ブラウン運動にも階層性があることが知られている。これらを簡単なモデルによって説明したい（§2）。

(ii) 低エネルギー中性子の原子核（質量数A）による弾性散乱は基本的には（A＋1）個の多体問題だが，一体的な光学ポテンシャルという描像が成立し，そのまわりに“ゆらぎ”があることが知られている。この場合，第一原理は（A＋1）体のシュレーディンガー方程式であり，現象論が一体の複素光学ポテンシャルである。一つの光学ポテンシャルによって，多数の原子核に対して，現象である（粗視化された）散乱断面積のエネルギー依存性（一種の巨大共鳴）を説明することができる。光学ポテンシャルがこの場合の現象論的パラメータである。さらに，中間段階理論としては，光学ポテンシャルをもつ1体のシュレーディンガー・ランジュバン方程式があり，それを第一原理から導出する方途もある。これは一種の量子力学的ブラウン運動である（§3で概略を説明したい）。また，これらを基礎にして，核物質の輸送係数を求めることもできる。

(i)と(ii)の中間段階理論は，多体系の中に存在する一体的集団運動モードを見出し，それを基盤にして成立した。現象の本質を記述する集団運動モード（それは必ずしも一体的とはかぎらない）を見出すところが重要である。第一原理に含まれる基本的相互作用は，まずこの集団運動モードをつくるのに費され，その残りがそのモードから逸脱である散逸効果（すなわち，摩擦係数や粘性係数など）を与える。しばしば，物質定数を（久保理論などを使って）直接第一原理から導出しようとする試みを見るが――それでより簡単な場合もあるが――それはあまりにも短絡的である。繰り返しだが，まず現象論を確立し，それに近く，かつ，第一原理との中介をする形で中間段階理論をつくる必要性と意義があると，私は思う。

この考えをクォーク・グルオン・プラズマの問題に適用しようとしたのが，(iii)である（§4でくわしく述べる予定）。ただし，この場合はまだ現象論が確立しているとはいいがたい。ここでは流体モデルを現象論と考えよう。したがって，流体の物理量に対する熱力学と流体力学方程式が現象論法則である。一方，第一原理はQCDである。いうまでもなく，QCDと現象論との距離は極めて遠い。中には，格子ゲージ理論の数値計算ですべてが終ると考えている人がいるが，原理的には可能だとしても，完成ははるかに先のことであろう。また，先ほどの階層論の立場からいえば，得策とはいえない。

まず，クォーク・グルオン・プラズマの本質を把える集団運動モードがわかったとしよう。そのモードを記述する正準演算子に対して，演算子ランジュバン方程式を中間段階理論として設定する。場の量子論的ブラウン運動である。現象論的パラメータはそのランジュバン方程式に含まれるスペクトル関係と減衰定数である。中間段階理論の目的は，それらをインプットとし，熱伝導率や粘性係数などの輸送係数をアウトプットとして与える理論の定式化なのである。インプットの関数形に対しては，現象レベルでの良い結果を与えるようなものを現象論的モデルとして与えてもよいし，格子ゲージ理論の結果をもち込んでもよい。後者の場合は，第一原理と中間段階理論との関係をつけたことになる。一般に，この関係は有限温度場の量子論を解くことによってえられる。(iii)はまだはじまったばかりであって，未解決の問題が数多くある。ここでは理論的定式化を述べ，後で室谷君が数値解について報告する。

2. 古典的ブラウン運動における階層性[1)]

まず，1次元のブラウン運動モデルを考えよう。一つの微粒子（質量M）が，周囲にある多数の液体分

子（質量 m）と衝突を繰り返しながら進むわけである。微粒子の速度を v，それと正面衝突する液体分子の速さを $-u_+$，後追い衝突する液体分子の速さを u_-，液体分子の線密度を n とすれば，エネルギー保存則と運動量保存則より，微粒子の運動方程式

$$M\dot{v} = -n\frac{2mM}{M+m}(v+u_+)^2 + n\frac{2mM}{M+m}(v-u_-)^2 \qquad (2-1)$$

が得られる。ただし，$u_\pm > v$ とした。$M \gg m$ を仮定し，$u_+ + u_- = 2\bar{u}$ と平均量 $\bar{u}$ でおきかえると（2－1）は，

$$M\dot{v} \simeq -8\,nm\bar{u}\,v - 4\,nm(u_+ - u_-)\bar{u} \qquad (2-2)$$

となる。問題にしている時間尺度が平均衝突時間間隔 $t_0 = \frac{1}{\bar{u}n}$ より十分長いとして，液体分子の速度を統計法則によって扱うことにする。集団平均を＜…＞により表わせば，

$$\langle u_+\rangle = \langle u_-\rangle = \bar{u},\quad \langle u_+ - u_-\rangle = 0$$

である。さらにエネルギー等分配則

$$\langle (u_+ - u_-)^2\rangle = \frac{kT}{m}$$

を使って（2－2）の内容を調べよう。（2－2）式を

$$\left.\begin{aligned} &m\dot{v} = -fv + \xi \\ &f = 8\,nm\bar{u} \\ &\xi = -4\,nm(u_+ - u_-)\bar{u}, \end{aligned}\right\} \qquad (2-3)$$

と書き直せば，ξ は次の統計法則にしたがう：

$$\langle \xi\rangle = \langle -4\,nm(u_+ - u_-)\bar{u}\rangle = 0, \qquad (2-4)$$

$$\begin{aligned}\langle \xi^2\rangle &= (16\,nm\bar{u})\,nm\langle (u_+ - u_-)^2\rangle\bar{u} \\ &= 2fkT/t_0\end{aligned} \qquad (2-5)$$

これは微粒子のブラウン運動を記述する一体的確率過程のランジュバン方程式である。すなわち，ミクロ時間尺度の多体的ニュートン運動方程式（2－1）から，マクロ時間尺度の一体的ランジュバン方程式（2－3）を導出したわけだ。特に（2－5）は揺動力 ξ と散逸定数（今の場合摩擦係数 f）の関係を与える揺動散逸定理（ナイキストの定理）として知られているものである。これで第一原理から中間段階理論への移行を完成したことになる。

次に，ランジュバン方程式を基礎にして，現象論的法則を与えるプロセスに移る。電場 E のある場合のランジュバン方程式は

$$M\dot{v} = eE - fv + \xi \qquad (2-6)$$

であるが，vの定常状態平均は$\langle v\rangle = \frac{e}{f}E$となり，電流密度$J = e\langle v\rangle n = \frac{e^2 n}{f}E$を与える。したがって，オームの法則

$$J = \sigma E; \quad \sigma = \frac{e^2 n}{f} \qquad (2-7)$$

がえられたわけである。物理定数σがランジュバン方程式に含まれている摩擦係数fによって表わされている。(2－3)第2式はそのfを第一原理から求めたものであった。

さて，この古典的ブラウン運動にも一種の階層性があることを注意しておきたい。多体的力学過程から粗視化によって，一体的方程式を導出すると

$$M\ddot{X} + f\dot{X} - F = \xi \qquad (2-8)$$

となるが(Fは外力など)，揺動力ξは多くの場合

$$\langle \xi(t)\rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\,\xi(t')\rangle = \langle \xi^2\rangle e^{-\frac{|t-t'|}{t_0}} \qquad (2-9)$$

という統計的性質をもつ，t_0はミクロ緩和時間である。ここでt_0をゼロとするような時間尺度に移行すれば，$\exp[-|t-t'|/t_0] \to 2t_0\delta(t-t')$であるから，(2－8)と(2－9)はランジュバン方程式

$$\ddot{X} + \kappa\dot{X} - K = \frac{1}{M}\xi,$$
$$\langle \xi(t)\rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\,\xi(t')\rangle = 2fkT\delta(t-t') \qquad (2-10)$$

となる。$2t_0\langle \xi^2\rangle = 2fkT$はすでに見たとおりである。デルタ関数の存在によって，この確率過程がマルコフ的であることを知る。§4の理論との関係で記憶しておいてほしい。

(2－10)はOU型確率過程のランジュバン方程式である。この方程式を$(1/\kappa)$程度の時間尺度について平均しよう。すなわち，平均操作

$$\kappa\int_{-\infty}^{t} e^{-\kappa(t-t')}X(t')\,dt' \qquad (2-11)$$

を行うと，(2－10)は

$$\dot{X} + \frac{1}{\kappa}\bar{K} = \eta \quad ; \quad \eta(t) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t} e^{-\kappa(t-t')}\xi(t')\,dt' \qquad (2-12)$$

となる。ただし$\bar{K} = K\left(X + O\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)$であることに注意。$\eta$の統計性は簡単な計算により

$$\langle \eta(t)\rangle = 0 \; ; \; \langle \eta(t)\,\eta(t')\rangle = \frac{fkT}{\kappa M^2}e^{-\kappa|t-t'|}$$

となることがわかる。したがって$\frac{1}{\kappa} \to 0$の極限で

$$\left.\begin{aligned} &\dot{X}+\frac{1}{\kappa}K=\eta, \\ &<\eta(t)>=0 \\ &<\eta(t)\,\eta(t')>=2\alpha\delta(t-t')\ ;\quad \alpha=\frac{kT}{f} \end{aligned}\right\} \qquad (2-12)$$

というウィーナー過程のランジュバン方程式が得られる。すなわち，OU過程の緩和時間$\frac{1}{\kappa}$が無視できるような，より粗いマクロ的時間尺度に移ることにより，OU過程はウィーナー過程へと移行したのである。

この移行をFokker-Planck方程式を使って議論しよう。以下簡単のため$F=K=0$とする。OU過程のランジュバン方程式

$$M\dot{v}+fv=\xi,\quad \dot{X}=v \qquad (2-13)$$

に対するFokker-Planck方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,\ v,\ t)=\left\{\frac{fkT}{M^2}D_v^2+\kappa D_v v-D_x v\right\}\psi(x,\ v,\ t) \qquad (2-14)$$

である。$\psi(x,\ v,\ t)$は確率変数x，vに対する確率分布関数。

まず速度過程として考える。確率分布関数$\psi(v,\ t)=\int\psi(x,\ v,\ t)\,dx$に対するFokker-Planck方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(v,\ t)=\left\{\frac{fkT}{M^2}D_v^2+\kappa D_v v\right\}\psi(v,\ t) \qquad (2-15)$$

となるが，これはランジュバン方程式

$$\frac{d}{dt}\left(x-\frac{1}{\kappa}v\right)=\eta \qquad (2-16)$$

に対応する。この左辺において$x-\frac{1}{\kappa}v\to x\ \left(\frac{1}{\kappa}\to 0\right)$という極限操作を行うことにより，ウィーナー過程のランジュバン方程式$\dot{x}=\eta$が得られる。

また位置過程に対する分布関数は$\psi(x,\ t)=\int\psi(x,\ v,\ t)\,dv$では与えられない。くわしい議論は省略するが，それは$\varphi(x,\ t)=\int\psi\left(x-\frac{1}{\kappa}v,\ v,\ t\right)dv$である。(2−14)から$\varphi(x,\ t)$のFokker-Planck方程式を求めれば，$\frac{1}{\kappa}$を無視する近似では，ウィーナー過程のFokker-Planck方程式である拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,\ t)=\alpha D_x^2\varphi(x,\ t) \qquad (2-17)$$

がえられる。なお，$(1/\kappa)\to 0$では$\varphi(x)=\psi(x)$。

3. 低エネルギー中性子散乱に対する量子力学的ブラウン運動[2)]

低エネルギー中性子と質量数Aの核子の散乱問題は，基本原理に従えば，A＋1体のシュレーディンガー方程式を解くことにより解決される。一方この問題に対する現象論として，光学モデルが存在する。光

学モデルは，入射中性子の波動関数のしたがう方程式として，複素ポテンシャルVを持つ一体のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2+V\right]\psi \qquad (3-1)$$

によって表わされる。

筆者は基礎理論であるA＋1体波動方程式と，現象論の一体光学モデルとの橋渡しをするものとして，ランジュバン・シュレーディンガー方程式を考えた。それはC数ランダム波動関数χとC数ランダム源fに対して

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(x,\ t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2+V\right]\chi(x,\ t)+f(x,\ t) \qquad (3-2)$$

を要求することによって定式化されている。このχと光学モデルのψとの関係は

$$\psi=<\chi> \qquad (3-3)$$

であり，またfの統計性はfのフーリエ変換$\tilde{f}(x,\omega)$に対する

$$\begin{aligned}&<\tilde{f}(x,\ \omega)>=0,\\&<\tilde{f}(x,\ \omega)\tilde{f}^*(x',\omega')>\propto|\mathrm{Im}V(x)|n(\omega,\ T)\cdot\delta^3(x-x')\delta(\omega-\omega')\end{aligned} \qquad (3-4)$$

で与えられる。(3－4)第二式は核反応における揺動散逸定理であり，原子核ナイキスト定理と呼ぶべきものである。またfはc数ランダム源であるが，量子論的性質の反映として(3－4)第二式には分布関数$n(\omega,\ T)$が現われ，マルコフ的性質$\delta(t-t')$は実現されない。

筆書はこのランジュバン・シュレーディンガー方程式(3－2)，(3－4)を用いて中性子散乱断面積の“ゆらぎ”を説明すると同時に，(3－2)と(3－4)を基礎理論から導出して，光学モデルの基礎付けを行った。詳細は文献2を見ていただきたい。

4．演算子値ランジュバン方程式と流体輸送理論[3)]

最後に筆者達が最近行った，クォーク・グルーオンプラズマ現象を目差した，演算子値ランジュバン方程式に基づく輸送理論を紹介する。

宇宙初期や高エネルギー重イオン反応において，高温高密度状態が実現される。そこでは，クォーク閉じ込めの破れたクォーク・グルーオンプラズマ状態になっていると予想されている。ハドロン相とこのクォーク・グルーオンプラズマ相との間の相転移現象に対しては，いくつかの現象論的考察がある。しかし，これらの現象論と基礎理論との関係は，現在の時点では，それほど明白なものとは考えられない。一方基礎理論に密着してのアプローチとして，格子ゲージ理論がある。格子ゲージ理論の数値計算により数多くのことが明らかになってきたが，現在の数値計算で調べられているものは，平衡状態の性質にすぎない。非平衡な現象である高エネルギー重イオン反応などの実際の現象に対して，そのまま適用することは不可

能である。そこで我々は§1で述べた方針にしたがい，現象論と基礎理論（第一原理）との中間に，両者の橋渡しをする半現象論（中間段階理論）として，演算子値ランジュバン方程式を考えることにする。この演算子値ランジュバン方程式に含まれるパラメーターにより現象を説明し，さらに基礎理論によって演算子値ランジュバン方程式を基礎付けるというのが我々の戦略である。しかし，本稿では，演算子値ランジュバン方程式と現象論との関係に話を限ることにする。

まず，現象論として流体モデルを採る。宇宙初期や高エネルギー重イオン反応などで，実現が期待される高温高密度状態の流体では，当然局所系が存在し，その局所系に対しては局所平衡を仮定する。局所系はミクロ的には大きいが，マクロ的には小さい。いまこの局所系を，同じ熱力学的性質を持つ平衡状態にある無限に大きい系で置きかえよう。その系の支配的なモードを $a(k, t)$ とする。簡単のため，中性スカラーボソンモードを考えることにする。この $a(k, t)$ のしたがう方程式として，

$$\left.\begin{aligned} i\dot{a}(k, t) &= \int_0^t K(k, t-t')\, a(k, t')\, dt' + f(k, t) \\ -i\dot{a}^\dagger(k, t) &= \int_0^t K^*(k, t-t')\, a^\dagger(k, t')\, dt' + f^\dagger(k, t) \end{aligned}\right\} \qquad (4-1)$$

を考える。ここで $f(k, t)$，$f^\dagger(k, t)$ は演算子値ランダム源であり，$K(k, t)$ は c数積分核関数である。$K(k, t)$ のフーリエ変換を $E(k, \omega) = \varepsilon(k, \omega) - \frac{i}{2}\gamma(k, \omega)$ $(\gamma > 0)$ とし，$f(k, t)$ のフーリエ表示を

$$f(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sqrt{\frac{\gamma(k, \omega)}{2\pi}}\, \rho(k, \omega)\, A(k, \omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (4-2)$$

とする。ここで ρ は c数実関数である。$f^\dagger(k, t)$ は，$(4-2)$ のエルミート共役。また，$A(k, \omega)$ は演算子とし，

$$[A(k, \omega),\ A^\dagger(k', \omega')] = \delta^3(k-k')\, \delta(\omega-\omega') \qquad (4-3)$$

を満足するものとしておく。$\omega - E(k, \omega) = 0$ のゼロが ω の下半面にあるという仮定のもとで $(4-1)$ の定常解を求めると

$$\left.\begin{aligned} a(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\gamma(k, \omega)}{2\pi}}\, \frac{\rho(k, \omega)\, A(k, \omega)}{\omega - E(k, \omega)}\, e^{-i\omega t} \\ a^\dagger(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\gamma(k, \omega)}{2\pi}}\, \frac{\rho(k, \omega)\, A^\dagger(k, \omega)}{\omega - E^*(k, \omega)}\, e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad (4-4)$$

がえられる。ここで任意の時刻に対し同時刻正準交換関係

$$[a^\dagger(k, t),\ a(k', t)] = \delta^3(k-k') \qquad (4-5)$$

を要請すれば，$(4-4)$ と $(4-5)$ より $\rho(k, \omega)$ に対する条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \rho^2(k, \omega)\, \frac{\gamma(k, \omega)}{|\omega - E(k, \omega)|^2} = 1 \qquad (4-6)$$

がえられる。C数関数 $\rho(k, \omega)$ は(4−6)を満足しなければならない。さらに，以下の関係式が意味を持つためには

$$\rho(k, \omega) = 0 \quad \text{for} \quad \omega < 0 \tag{4−7a}$$

を要求する必要がある。ρ の具体的関数形に対しては，いくつかの議論があるが,[4]具体的モデル計算においては，γ が小さいという弱減衰近似の範囲で

$$\rho(k, \omega) = 1 \quad \text{for} \quad \omega > 0 \tag{4−7b}$$

とおくことができる。

次に熱平衡平均($<\cdots>$で表わす)の計算規則を与えなければならないが，それはKMS条件

$$<a^{\dagger}(k, t)\, a(k', t' + i\beta)> = <a(k', t')\, a^{\dagger}(k, t)> e^{\beta\mu} \tag{4−8}$$

を満足するように決める必要がある。ここで $\beta = T^{-1}$，μ は化学ポテンシャル。この要求は A，$A^{\dagger}$，それらの積の熱平衡平均に対する次の ''ansatz'' によって満足される：

$$\left.\begin{aligned}
&<A(k, \omega)> = <A^{\dagger}(k, \omega)> = 0 \\
&<A(k, \omega) A^{\dagger}(k', \omega')> = \delta^3(k - k')\, \delta(\omega - \omega')\, [1 + n(\omega, T)] \\
&<A^{\dagger}(k, \omega) A(k', \omega')> = \delta^3(k - k')\, \delta(\omega - \omega')\, n(\omega, T) \\
&<A(k, \omega) A(k', \omega')> = <A^{\dagger}(k, \omega) A^{\dagger}(k', \omega')> = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4−9}$$

なお，高次の積に対してはウィックの法則を適用できるとする。ここで $n(\omega, T)$ は

$$n(\omega, T) = \frac{1}{e^{\beta(\omega - \mu)} - 1} \tag{4−10}$$

である。(4−2)と(4−9)から f の平均値及び相関が求まり

$$\left.\begin{aligned}
&<f(k, t)> = <f^{\dagger}(k, t)> = 0 \\
&<f(k, t)\, f^{\dagger}(k', t')> = \delta^3(k - k') \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho^2(k, \omega)\, \gamma(k, \omega) \\
&\qquad\qquad \times [1 + n(\omega, T)]\, e^{-i\omega(t - t')} \\
&<f^{\dagger}(k, t)\, f(k', t')> = \delta^3(k - k') \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho^2(k, \omega)\, \gamma(k, \omega) \\
&\qquad\qquad \times n(\omega, T)\, e^{i\omega(t - t')} \\
&<f(k, t)\, f(k', t)> = <f^{\dagger}(k, t)\, f^{\dagger}(k', t')> = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4−11}$$

となる。この相関の式は，揺動散逸定理そのものであり，ナイキストの定理の量子論版である。ここで特に注意すべきことは，量子論的性質の反映として $n(\omega, T)$ が表われ，白色雑音ではない点である。従ってこの確率過程はマルコフ的ではなく，[5] 素朴に期待されるような運動論的方程式に依っては，記述することのできない性質のものである。

我々の半現象論の立場では，$E(k, \omega)$ もしくは $\varepsilon(k, \omega)$ と $\gamma(k, \omega)$ が現象に対し合せるべきインプットパラメーターである。以下に見るように，すべての物理量は $\varepsilon(k, \omega)$ と $\gamma(k, \omega)$ で書くことができる。

この $a(k, t)$，$a^{\dagger}(k, t)$ を用いて，熱浴中の場の演算子 $\phi(x)$ を次のように定義しよう。

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^2 2\Omega(k)}} [a(k, t) e^{ik\cdot x} + a^{\dagger}(k, t) e^{-ik\cdot x}]$$

$$= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\Omega(k)}} \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\gamma(k, \omega)}{2\pi}} \rho(k, \omega) \qquad (4-12)$$

$$\times \left[\frac{A(k, \omega)}{\omega - E(k, \omega)} e^{i(k\cdot x - \omega t)} + \frac{A^{\dagger}(k, \omega)}{\omega - E^{*}(k, \omega)} e^{-i(k\cdot x - \omega t)}\right]$$

ここで $\Omega(k)$ は，$\phi(x)$ に対して同時刻交換関係

$$[\phi(x, t), \dot{\phi}(x', t)] = i\delta^3(x - x') \qquad (4-13)$$

を与えるように決める。すなわち，

$$\Omega(k) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho^2(k, \omega) \frac{\omega\gamma(k, \omega)}{|\omega - E(k, \omega)|^2} \qquad (4-14)$$

この場の演算子 $\phi(x)$ から，エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ と粒子流演算子 J_{μ} を

$$\left.\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= :\phi(x) \overleftrightarrow{P}_{\mu} \overleftrightarrow{P}_{\nu} \phi(x): \\ J_{\mu}(x) &= :\phi(x) \overleftrightarrow{P}_{\mu} \phi(x): \end{aligned}\right\} \qquad (4-15)$$

と定義することができる。[6] ここで $\overleftrightarrow{P}_{\mu} = \frac{i}{2}(\overrightarrow{\partial_{\mu}} - \overleftarrow{\partial_{\mu}})$ であり：AB：はAとBのノーマル積である。この $T_{\mu\nu}$ 及び J_{μ} の期待値により，熱力学的量が与えられる。例えば，エネルギー密度 $E(T)$，圧力 $P(T)$，エントロピー密度 $S(T)$ はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{\Omega(k)} \rho^2(k, \omega) \omega \frac{\gamma(k, \omega)}{|\omega - E(k, \omega)|^2} n(\omega, T) \\ P(T) &= \frac{1}{6\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{\Omega(k)} \rho^2(k, \omega) \frac{k^2}{\omega} \frac{\gamma(k, \omega)}{|\omega - E(k, \omega)|^2} n(\omega, T) \end{aligned}\right\} \qquad (4-16)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
S(T) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk \{(1+J_0(k,T))\ln(1+J_0(k,T)) \\
&\qquad - J_0(k,T)\ln J_0(k,T)\} \\
J_0(k,T) &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\omega}{\Omega(k)}\,\rho^2(k,\omega)\,\frac{\gamma(k,\omega)}{|\omega - E(k,\omega)|^2}
\end{aligned}
\right\}
$$

となる。また線型応答理論により，$T_{\mu\nu}$ の対称化相関から輸送係数を求めることができ，[7)8)] 熱伝導率 κ，ずれ粘性係数 $\eta_{(S)}$，体積粘性係数 $\eta_{(V)}$ はそれぞれ

$$
\left.
\begin{aligned}
\kappa(T) &= \frac{1}{6\pi^2 T}\int_0^\infty k^2 dk \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 k^2}{\Omega^2(k)}\rho^4(k,\omega)\frac{\gamma^2(k,\omega)/4}{\pi|\omega - E(k,\omega)|^4} \\
&\qquad \times n(\omega,T)[1+n(\omega,T)] \\
\eta_{(S)}(T) &= \frac{1}{15\pi^2 T}\int_0^\infty k^2 dk \int_0^\infty d\omega \frac{k^4}{\Omega^2(k)}\rho^4(k,\omega)\frac{\gamma^2(k,\omega)/4}{\pi|\omega - E(k,\omega)|^4} \\
&\qquad \times n(\omega,T)[1+n(\omega,T)] \\
\eta_{(V)}(T) &= \frac{1}{2\pi^2 T}\int_0^\infty k^2 dk \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\Omega^2(k)}\left[\frac{1}{3}k^2 - \frac{\partial P(T)}{\partial E(T)}\omega^2\right]^2 \rho^4(k,\omega) \\
&\qquad \times \frac{\gamma^2(k,\omega)/4}{\pi|\omega - E(k,\omega)|^4}\, n(\omega,T)[1+n(\omega,T)]
\end{aligned}
\right\} \quad (4-17)
$$

となる。このように，熱力学的量も輸送係数もすべて，我々の立場のインプットパラメーターである $E(k,\omega)$（すなわち，$\varepsilon(k,\omega)$，$\gamma(k,\omega)$）を定めれば，具体的に求めることができるわけである。

いま $\dfrac{1}{\omega - E(k,\omega)}$ の極限を，$\omega = \varepsilon_j(k) - \dfrac{i}{2}\gamma_j(k)$，　$(j = 1, 2\cdots)$

とし，その極での留数を $R_j(k)$ とし，$\gamma_j(k) \ll \varepsilon_j(k)$ という弱減衰近似をとれば，γ の最低次で，

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varepsilon(k, \varepsilon_j(k)) = \varepsilon_j(k) \\
&\gamma(k, \varepsilon_j(k) = R_j^{-1}(k)\,\gamma_j(k) \\
&R_j(k) = \left[1 - \frac{\partial\varepsilon(k,\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\varepsilon_j(k)}\right]^{-1} \\
&\frac{\gamma(k,\omega)/2}{\pi|\omega - E(k,\omega)|^2} = \sum_j R_j(k)\,\delta(\omega - \varepsilon_j(k)) \\
&\frac{\gamma^2(k,\omega)/4}{\pi|\omega - E(k,\omega)|^4} = \sum_j \frac{2}{\gamma_j(k)} R_j^2(k)\,\delta(\omega - \varepsilon_j(k))
\end{aligned}
\right\} \quad (4-18)
$$

とおくことができ，熱力学的量の近似的表式は

$$\left.\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{2\pi^2}\int k^2 dk\ \frac{1}{\Omega(k)}\sum_j R_j(k)\,\varepsilon_j^2(k)\,n(\varepsilon_j(k),\ T) \\ P(T) &= \frac{1}{6\pi^2}\int k^2 dk\ \frac{k^2}{\Omega(k)}\sum_j R_j(k)\,n(\varepsilon_j(k),\ T) \\ S(T) &= \frac{1}{2\pi^2}\int k^2 dk\,[(1+J_0(k,\ T))\ln(1+J_0(k,\ T) \\ &\qquad -J_0(k,\ T)\ln J_0(k,\ T)] \end{aligned}\right\} \qquad (4-19)$$

となる。ここで

$$\left.\begin{aligned} \Omega(k) &= \sum_j R_j(k)\,\varepsilon_j(k) \\ J_0(k,\ T) &= \frac{1}{\Omega(k)}\sum_j R_j(k)\,\varepsilon_j(k)\,n(\varepsilon_j(k),\ T) \end{aligned}\right. \qquad (4-20)$$

である。また輸送係数の近似的表式は，

$$\left.\begin{aligned} \kappa(T) &= \frac{1}{3\pi^2 T}\int_0^\infty k^2 dk\ \frac{k^2}{\Omega^2(k)}\sum_j R_j^2(k)\ \frac{\varepsilon_j^2(k)}{\gamma_j(k)} \\ &\qquad \times n(\varepsilon_j(k),\ T)\,[n(\varepsilon_j(k),\ T)+1] \\ \eta_{(S)}(T) &= \frac{2}{15\pi^2 T}\int_0^\infty k^2 dk\ \frac{k^2}{\Omega^2(k)}\sum_j R_j^2(k)\ \frac{1}{\gamma_j(k)} \\ &\qquad \times n(\varepsilon_j(k),\ T)\,[n(\varepsilon_j(k),\ T)+1] \\ \eta_{(V)}(T) &= \frac{1}{\pi^2 T}\int_0^\infty k^2 dk\ \frac{1}{\Omega^2(k)}\sum_j R_j^2(k)\ \frac{1}{\gamma_j(k)}\left[\frac{1}{3}k^2-\frac{\partial P(T)}{\partial E(T)}\,\varepsilon_j^2(k)\right]^2 \\ &\qquad \times n(\varepsilon_j(k),\ T)\,[n(\varepsilon_j(k),\ T)+1] \end{aligned}\right. \qquad (4-21)$$

となり，よく知られているように減衰係数 $\gamma_j(k)$ の逆数に比例していることがわかる。§2の(2−7)と見比べていただきたい。

以上ここでは，簡単のため中性スカラーボソンに限って議論してきたが，フェルミオンに対しても同様に定式化できる。またQCDからの基礎付けについては，一応の筋道はあるが，別の機会にゆずりたい。[3)]

参考文献

1) 並木美喜雄　統計数理 **34** 303 (1986)

2) M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **22** 843 (1959); **23** 629 (1960);

C. E. Porter, Phys.Today **16**, 26 (1963)
3) M. Mizutani, S. Muroya and M. Namiki, WU-HEP-87-6
4) 例えばR. F. Streater J. Phys. A : Math. Gen. **15** 1477 (1982) ;
H. Hasegawa et al. J. Phys. A : Math. Gen. **18** L123 (1985) など
5) R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **26** Suppl. 1 (1969)
6) M. Namiki and C. Iso, Prog. Theor. Phys. **18** 591 (1957)
7) 中島貞雄, 物性論研究 **88**, 45 (1955) ; **102**, 24 (1956) ;
R. Kubo, M. Yokota and S. Nakajima, J. Phys. Soc. Japam **12**, 1203 (1957);
D. N. Zubarev, Nonequilibrium Statistical Thermodynamics, Plenum, New York, 1979.
8) C. Iso, K. Mori and M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **22**, 403 (1959)

演算子値ランジュバン方程式による流体理論における数値解析

早大・理工　水谷雅志, 室谷　心, 並木美喜雄
Universidad de Santiago de Compostela 伊達　伸

本研究会における並木報告[1)]（以後[1]と記す）に述べられている，量子論的ランジュバン方程式にもとづく流体モデルの数値解析について報告する。

[1]に述べられているように，我々は現象論として流体モデルを採り，現象論と基礎理論との橋渡しとして，量子論的ランジュバン方程式を設定した。ここでは，インプットパラメーター$E(k, \omega)$を適当に選ぶことにより熱力学的量に相転移らしき振舞を与え，さらに流体方程式を解くことにより，クォーク・グルーオンプラズマ相の時空発展を議論する。

1. εとγに対する現象論的モデル

簡単なモデルとして$\omega - E(k, \omega) = 0$の解が1つしかない場合を考える。その場合，[1]の(4−19)より熱力学的量は，

$$\left.\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk\, \varepsilon(k)\, n(\varepsilon(k), T) \\ P(T) &= \frac{1}{6\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk\, \frac{k^2}{\varepsilon(k)}\, n(\varepsilon(k), T) \end{aligned}\right\} \quad (1-1)$$