

時間揺動の熱力学，相関およびスケーリング則

九大理 藤坂 博一， 鹿大理 井上 政義

今回は，カオス揺動に代表される時間揺らぎの統計的解析法として最近開発した，多変数揺動に対する揺動スペクトル理論，一般化相関関数の理論，固有関数展開法，連分数展開法について，さらに，カオス転移点近傍における関連する諸量のスケーリング則について講演した。項目は次の通りである。

- A. 時間揺らぎの統計熱力学と相関
- B. カオス転移点近傍における静的および動的スケーリング則
- C. 具体的応用例
 - (i) バンド分離点近傍
 - (ii) 拡張された一次元写像系における拡散の消失点近傍

A., B., C.(i)については文献を参照して貰うことにして，ここではC.(ii)について少し詳しく報告することにする。

拡張された一次元写像

$$X_{n+1} = X_n + a \cdot \sin(2\pi X_n) \equiv F(X_n) \quad (1)$$

を考える。この系は外部パラメータ a の適当な領域に対して，拡散

$$\langle (X_n - \langle X_n \rangle)^2 \rangle \simeq 2 D n \quad (2)$$

を示す。このモデルの対応する物理系としては周期外力下の周期ポテンシャル中の運動

$$\ddot{X} = -r \dot{X} - \sin(2\pi X) + F \cos(\Omega t) \quad (3)$$

がある。

以下では $a = 1$ 近傍を考える。系(1)の大域的性質は， $X_n = N_n + x_n$ ，($0 < x_n < 1$)で定義される量 N_n (位相点が n ステップ目に居るセルの番号)の特性と同等である。並進対称性より， x_n は

$$x_{n+1} = F(x_n) - [F(x_n)] \equiv f(x_n) \quad (4)$$

に従い, N_n は

$$N_{n+1} = N_n + u(x_n) \quad (5)$$

に従う。 $u(x)$ は

$$u(x) = \begin{cases} -1 & x \in \Omega_- \\ 0 & x \in \Omega_-, \Omega_+ \\ 1 & x \in \Omega_+ \end{cases} \quad (6)$$

なる 1 ステップでのとび数である。従って, (5)より

$$N_n = N_0 + \sum_{j=0}^{n-1} u(x_j) \quad (7)$$

対称性より $\langle u \rangle = 0$ とすると, (2)は

$$\langle (N_n - N_0)^2 \rangle \simeq 2Dn, \quad (u \rightarrow H) \quad (8)$$

と同等である。

この系の運動をもう少し詳しくみてみよう。セル間の“ランダム”なとび移りは変数 $u(x_n)$ の時間的変動に起因する。正確には量

$$\sum_{j=0}^{n-1} u(x_j) \quad (9)$$

の時間的変動による。領域 n の中で $-1, 0, 1$ が同じ値を与えれば拡散現象 (8) で説明するには十分である。ところが $u(x_n)$ は決定論的運動方程式により生成されており, $-1, 0, 1$ の三値の配列は初期条件 x_0 によって一意的に決っている。量 (9) が同じ値を与える異なる時系列を区別する為に別の量 $v(x_n)$ を導入する。これをどう選ぶかは一意的ではないが, 今

$$v(x_n) = \begin{cases} -1 & x_n \in \Omega_- \\ 0 & x_n \in \Omega_-, \Omega_+ \\ 1 & x_n \in \Omega_+ \end{cases} \quad (10)$$

としよう。そうすると, (9)の他に

$$\sum_{j=0}^{n-1} v(x_j) \quad (11)$$

を測定することにより, 考えている時間領域 n の中に何回右にとび, 左にとんだかの情報まで

入ることになる。このようにして、より詳細を知る為には二つの時系列 $(u(x_n), v(x_n))$ を調べる必要がある。

二変数時間揺動に対しては、特性関数

$$M_{q_1, q_2}(n) \equiv \langle \exp [q_1 \sum_{j=0}^{n-1} u(x_j) + q_2 \sum_{j=0}^{n-1} v(x_j)] \rangle \quad (12)$$

を考える。ここで、

$$\phi(q_1, q_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_{q_1, q_2}(n) \quad (13)$$

を導入すると、

$$M_{q_1, q_2}(n) = Q_{q_1, q_2}(n) \exp [\phi(q_1, q_2) n] \quad (14)$$

と表わせ、熱力学量は、

$$\alpha_1 = \frac{\partial \phi(q_1, q_2)}{\partial q_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \phi(q_1, q_2)}{\partial q_2} \quad (15)$$

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 - \phi(q_1, q_2) \quad (16)$$

$$q_1 = \frac{\partial \sigma(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1}, \quad q_2 = \frac{\partial \sigma(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \quad (17)$$

で与えられる。 $\sigma(\alpha_1, \alpha_2)$ は揺動スペクトルである。一方、陽わな時間相関は $Q_{q_1, q_2}(n)$ に含まれる。

拡張された一次元写像に戻る。図1に示したように、 $a \leq 1$ はタイプ I 間欠性の消失点近傍であり、時間的に長い相関が存在する。この為、 $a \leq 1$ では拡散係数は

$$D \sim (1-a)^{-1/2} \quad (18)$$

のように発散し、 $a \geq 1$ では X の正方向あるいは負方向への一様なドリフト運動となり、拡散は示さない、($D=0$)。

$a \leq 1$ での“熱力学”ふるまいをみる為、一般化転送行列

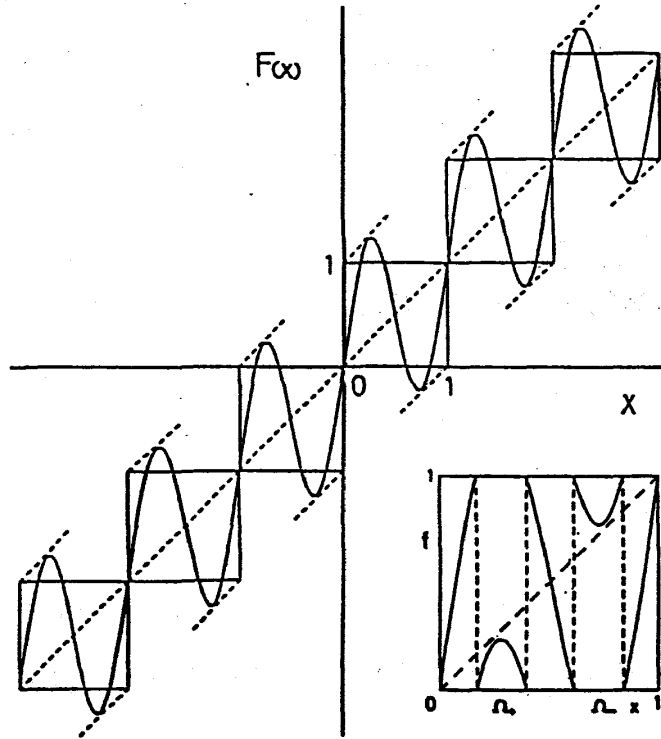


図 1

$$H_{q_1, q_2} = \begin{pmatrix} (1-\kappa)e^{-q_1} & r & 0 \\ \kappa e^{-q_1} & r' & \kappa e^{q_1+q_2} \\ 0 & r & (1-\kappa)e^{q_1+q_2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

を持つ確率モデルを考える。 κ は1ステップで $u(x_n) = \pm 1$ から 0 にとぶ確率で、 a を下から 1 に近づけると 0 に近づく。 r は $u(x_n) = 0$ から ± 1 にとぶ確率であり、転移点の近くで有限の大きさを持つ、($r' = 1 - 2r$)。特

性関数 $\phi(q_1, q_2)$ は H_{q_1, q_2} の最大固有値の対数に等しい。転移点直上 ($\kappa \rightarrow 0$) で、(19) の固有値は e^{-q_1} , r' ($\equiv e^{-b}$), $e^{q_1+q_2}$ と

なり、図 2 のような相図が得られ、三重点 ($q_1^* \equiv b$, $q_2^* \equiv -2b$) が存在することがわかる。三つの相 I, II, III はそれぞれ状態 $(u, v) = (1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$ に対応している。重要なことは、一変数の測定

($q_1 = 0$ あるいは $q_2 = 0$) では、III 相が観

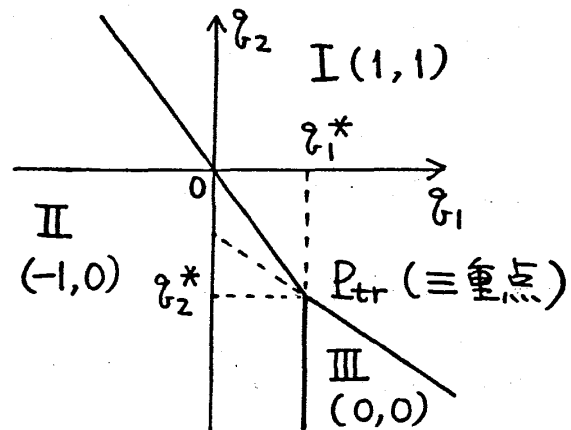


図 2

測できないことである。

転移点からずれると三つの相の境界は不明確になっていく。この様子は関係する量のスケールリング則として記述できる。以下では、特に、二つの点 $(q_1^*, q_2^*) = (0, 0)$ と三重点 $(q_1, q_2) = (q_1^*, q_2^*)$ 近傍について述べる。

[A] . $(q_1, q_2) = (0, 0)$ 近傍

特性関数 $\phi(q_1, q_2)$ は静的スケールリング則

$$\phi(q_1, q_2) = \kappa \bar{\phi}\left(\frac{2q_1 + q_2}{\kappa}, \frac{q_2}{\kappa}\right), \quad (20)$$

$$\bar{\phi}(\xi, y) = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \xi^2} + y - 1) \quad (21)$$

を満す。これを用いて、 $\alpha_1, \alpha_2, \sigma$ 等も (15), (16) よりスケールリング則を満す。

一方、相関関数 $Q_{q_1, q_2}(n)$ は H_{q_1, q_2} の固有値、固有関数によって決められ、

$$Q_{q_1, q_2}(n) \simeq J_{q_1, q_2}^{(0)} + J_{q_1, q_2}^{(1)} \exp[-r_{q_1, q_2} n] \quad (22)$$

となり、減衰率は動的スケールリング則

$$r_{q_1, q_2} \equiv \kappa \Gamma\left(\frac{2q_1 + q_2}{\kappa}\right) \quad (23)$$

$$\Gamma(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2} \quad (24)$$

を満す。

[B] . $(q_1, q_2) = (q_1^*, q_2^*)$ (三重点) 近傍

特性関数は静的スケールリング則

$$\phi(q_1, q_2) = -b + \epsilon \bar{\phi}_{\text{SC}}\left(\frac{q_1 - q_1^*}{\epsilon}, \frac{q_2 - q_2^*}{\epsilon}\right) \quad (25)$$

を満す。ただし、

$$\epsilon = \sqrt{\mu \kappa}, \quad (\mu \equiv r/r') \quad (26)$$

で、スケールリング関数は

$$\bar{\phi}_{\text{SC}}(x, y) = z_0(x, y) \quad (27)$$

で与えられる。ここで、 z_0 は三次方程式

$$z [z^2 - (2 + x^2)] = y(z^2 + xz - 1) \quad (28)$$

の三根 (z_0, z_1, z_2) のうちの最大値である。(25)を用いて, $\alpha_1, \alpha_2, \sigma$ 等の熱力学関数もスケーリング則を満たすことがわかる。

三重点近傍では, 相関関数は

$$Q_{q_1, q_2}(n) = J_{q_1, q_2}^{(0)} + J_{q_1, q_2}^{(1)} \exp[-r_{q_1, q_2}^{(1)} n] + J_{q_1, q_2}^{(2)} \exp[-r_{q_1, q_2}^{(2)} n] \quad (29)$$

と書け, 動的スケーリング則

$$r_{q_1, q_2}^{(\ell)} = \varepsilon \Gamma_\ell \left(\frac{q_1 - q_1^*}{\varepsilon}, \frac{q_2 - q_2^*}{\varepsilon} \right), \quad (30)$$

($\ell = 1, 2$) が成立し, スケーリング関数は,

$$\Gamma_\ell(x, y) = z_0(x, y) - z_\ell(x, y) \quad (31)$$

で与えられる。

三重点近傍の熱力学諸量および減衰率のスケーリング関数を図3に示す。確率モデルに基づく上の結論のうち, 三相の存在と三重点の存在は, 二変数時間揺動に特徴的なことである。

我々は, (1)を直接数値的に解き, 確率モデルとの比較を行った。結果はモデルの結果と定性的によく一致することがわかった。ここでは, 一つだけその結果を述べることにする。図4は, $a = 0.999992$ の場合に対する一次元写像(1)の $\alpha_1(q_1, q_2)$ に対する数値実験の結果であり, 図3の四角で囲んだ部分の図と比較されるべき量である。図4は生のデータを書いたもので, まだスケールしていない為に, 三相 ($\alpha_1 = -1, 0, 1$) 間のシャープな転移がみられる。また, 明らかに三重点が存在していることがわかる。詳しくは近くまとめる予定なのでそれを参照して貰いたい。

文 献

揺動スペクトル理論, 一般化時間相関関数の理論, 固有関数展開法, 連分数展開法については,

H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.99(1990),

およびその中で引用してある論文を参照して貰いたい。また, 少々古いが, 日本語では, 井上政義, 藤坂博一, 山田知司, 物性研究, 1989年1月号がある。

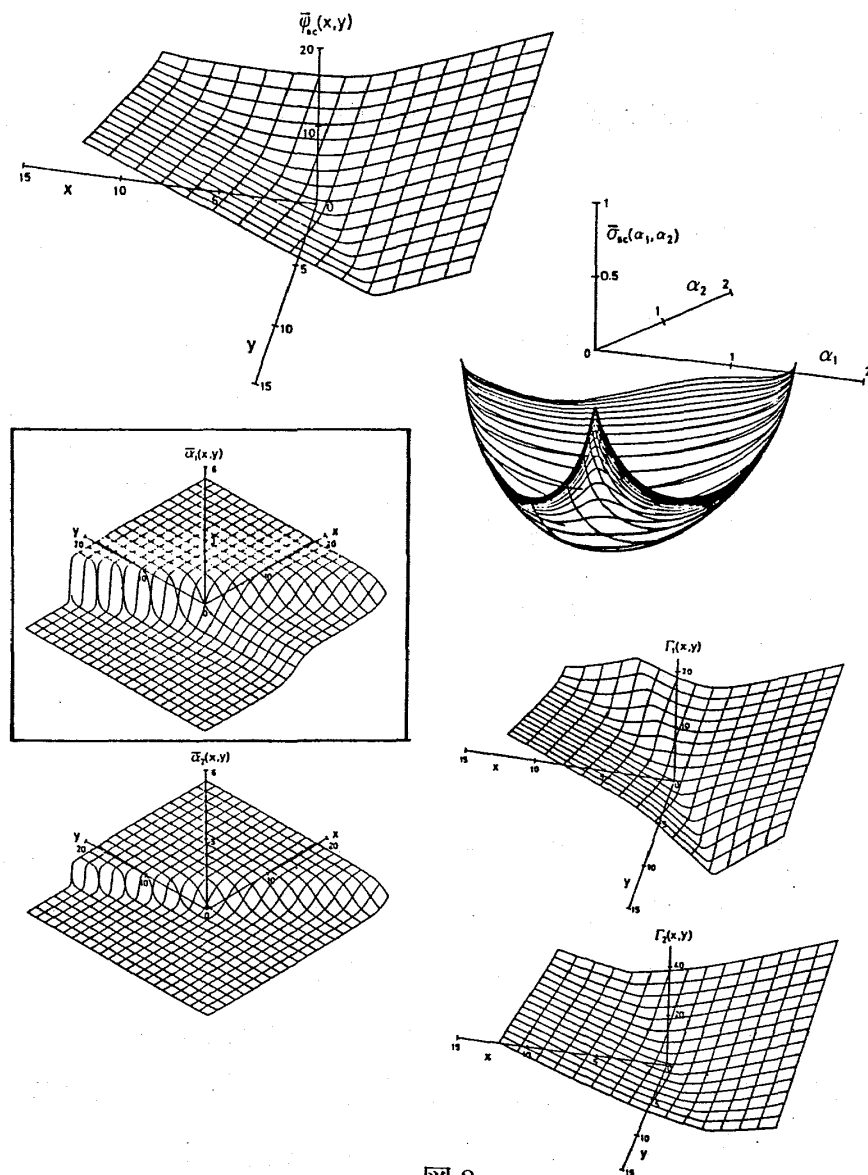


図 3

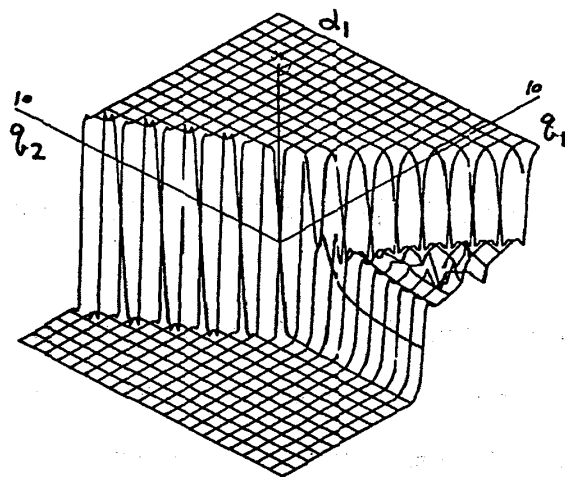


図 4