

Tight spherical designs

学習院大 理 坂内 英一

§1. spherical t -design の定義

$\mathbb{R}^d = d$ 次元 Euclid 空間.

$$\Omega_d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^d \quad \text{と置く.}$$

定義 1 Ω_d の 有限部分集合 X が spherical t -design

であるとは:

$$\sum_{\zeta \in X} f(\zeta) = 0$$

for $\forall$ homogeneous harmonic polynomials f of degree $1, 2, \dots, t$ であることと定義する。ここで多項式 $f = f(x_1, \dots, x_d)$ が harmonic (調和) であるとは、通常のように、 $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \right) f = 0$ であることと定義する。

この spherical t -design の定義は Delsarte-Goethals-Seidel [7] による。この定義は(一見唐突に見えるかもしれない)決して不自然なものではなく、種々の理由から、非常に当を得たものであると思われる。(実際、Delsarte による Association schemes (45に O-polynomial association schemes)

における "design" の定義が自然でありと思えるのと、全く同じ理由から (Delsarte [6] 参照)

なお、Delsarte-Goethals-Seidel [7] で示されているように上の定義は次の定義と同値である。

定義 1' Ω_d の有限部分集合 X が spherical t -design であるとは、 $k=0, 1, \dots, t$ に対して、任意の k -次の多項式 $V(x_1, x_2, \dots, x_d)$ と任意の $T \in O(d)$ (= 直交群) に対して

$$\sum_{x \in X} V(Tx) = \sum_{x \in X} V(x)$$

とすることができる。(更に言い換えるならば、 $k=0, 1, \dots, t$ に対して、 X の k -th moment も、任意の直交変換によっても不変に保たれるということができる。)

実際、この spherical t -design の概念は、単位球面 Ω_d 上の有限部分集合の対称度を測る 1 つのパラメータと見てやる。

さて、spherical t -designs についての、一つの重要な問題は (通常の t -designs についても同様に)、大きい t に対して、

spherical t -design が存在するかどうかである。 $d=2$ に対しては、任意の t に対して、spherical t -design の存在は知られている。すなわち、正 $(t+1)$ 角形の頂点の集合は

spherical t -design を作る。一方、 $d \geq 3$ の時は、(現在知られる限りでは) $t \geq 12$ に対して spherical t -design

の例は知られていないと思われる。 $t \leq 11$ の例はよく知られている。(Delsarte-Goethals-Seidel [7] 参照) 正交 $O(d)$ の有限部分群を用いた他の多くの examples の構成については [4] を参照.)

問題 (Open?) $d \geq 3$ を固定した時, $1 < s \leq t$ ならば t については, spherical t -design は存在するか? (答は yes と予想されたが, 通常の t -design の場合にはこの問題の難かしいのと同様であろう.)

§2 Tight spherical t -designs.

spherical t -design については次の不等式が知られている。

Theorem (Delsarte-Goethals-Seidel [7]) Ω_d において, spherical t -design X が存在するならば,

$$|X| \geq \binom{d+s-1}{d-1} + \binom{d+s-2}{d-1}, \quad t=2s=\text{偶数の時},$$

$$|X| \geq 2 \binom{d+s-1}{d-1}, \quad t=2s+1=\text{奇数の時},$$

(これは通常の t -designs ($t=2s$) における一般化された Fisher の不等式 $b \geq \binom{v}{s}$ と似ている.)

定義 2 Ω_d における spherical t -design X が tight であるとは、 $|X|$ が上の Theorem の不等式において $\frac{d+1}{t+1}$ を満たすことを定義する。

Remark $t=2, 3, 4, 5, 7, 11$ に対しては tight t -designs の存在は知られている。例として、 $d=8$ の時 E_8 型 Weyl 群の 240 個の roots 全体は tight 7-design を作り、 $d=24$ の時、Leech lattice の $196560 = 2 \cdot \binom{28}{5}$ 個のうちの 2 部分集合は、tight 11-design を作るという集合である。

これ、ここまでの話の主定理は、次の結果である。(R.M. Damerell, Royal Holloway College, Univ. of London) との共同研究による。)

$$d \geq 3$$
 と仮定する

- 定理 A (Bannai-Damerell) $d \geq 3$ と仮定する
- (i) $t=2d = \text{偶数} \geq 6$ の時、tight spherical t -design は存在しない。
 - (ii) $t=2d+1 = \frac{d}{2}$ 型の時、 A が十分大ならば (例として $A \geq 100$ ならば十分である) tight spherical t -design は存在しない。

Remarks (i), (ii) において、tight $(2d+1)$ -design の存在の証明出来ていない $A (\geq 6)$ は いくつか残っている が、近いうちに

全部消していると思う。実際、大部分のものは既に消せたが、いくつかの点については必ずしも易しくもない場合がある。

(2) $t=6$ の場合は Delsarte-Gothard-Seidel [7] による。

(3) 各 $t \geq 6$, $t \neq 7$ を fix した時、spherical t -design の存在する d の値は高々有限個であることが既に [2] で証明されている。この結果は 完全に 非存在を証明するものである。この方法は perfect codes [1], tight designs [3] の結果を拡張して、完全な非存在を証明（しようとす）時に役にたつと思われるが、まだ今の所、成算は不明である。特に $t=2, 3, 4, 5, 7$ に対する tight spherical t -designs の分類は非常に難しいと思われる。——通常の tight 4-designs の分類、perfect 2-codes の分類が難しいのと同じ理由で。

(4) tight spherical 9-designs は存在しない。また、tight spherical 11-designs が存在するのは $d=24$ に限る。（これは B. Dvornik (passed away July 26, 1976) による、これは不定方程式の内部を解くことにより得られる。）

(5) Open problem $10X^4 - Y^2 = 1$ の整数解を決定せよ。もしこれが解かたは（即ち $X > 1$ の解を持つならば）tight spherical 13-design の非存在を示せるであろう。

定理 A の証明の概略

証明は、次の Lloyd 型定理 を用いて行われる。すなわち、
spherical t -design X が存在するならば、次の多項式 $R_d(x)$
($t=2d$ の時)、又は $C_d(x)$ ($t=2d+1$ の時) の零点は全て
有理数 で与えられるらしい。

$$(a) R_d(x) = (\text{constant}) \cdot P_{\frac{1}{2}(d-1), \frac{1}{2}(d-3)}(x) \quad (t=2d \text{ の時})$$

↑
(通常、Jacobi 多項式)

$$(b) C_d(x) = C_{\frac{1}{2}d}(x) \quad (t=2d+1 \text{ の時})$$

↑
(通常、Gegenbauer 多項式)

$$\left(\begin{array}{l} \text{Remark} \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(-n, \alpha+n, \beta; x), \\ C_{2n}^{\nu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{const}) \cdot F(-n, n+\nu, \frac{1}{2}; x^2), \\ C_{2n+1}^{\nu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{const}) \cdot 2x \cdot F(-n, n+\nu+1, \frac{3}{2}; x^2). \end{array} \right)$$

但、 F は Gauss の hypergeometric series. この場合 n は有限個で与えられる。

さて、(a), (b) の場合いずれも、 $R_d(x)$ 及び $C_d(x)$ の
零点^(≠0)は (もし有理数で与えらる) 全て $\frac{1}{\text{integer}}$ の形で与え
られるらしいことが容易にわかる。次に、これらの多項式を
根とする多項式 (これらの零点は全て 整数 で与えられるらしい)

を与える。

(a) の場合は、与えられた分母が厚直に対してほぼ対称であるが、少しだけズレていて、そのズレを調べることにやり易い方法がある。方法が [1], [2], [3] などであるが、どれも同じであるが、今度の場合は、直交多項式の理論がうまく使えて、さらに、完全な形で解決出来る。

(b) の場合は、与えられた分母は厚直に関して完全に対称になり、ズレを調べる方法は用いられない。しかし、この場合に不定方程式のことに使える。つまり、この場合は不定方程式

$$\frac{k(k+2)(k+4) \cdots (k+2(n-1))}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = y^2$$

を $k = 0$ に帰着させ、上の不定方程式は $k > 0^2$, n が充分大の場合は解を持つことが実際に証明出来る。^{証明} (Erdős による) 不定方程式

$$\binom{x}{i} = y^2 \quad (i \geq 3)$$

の場合を与えられたが、この場合もまたと複雑である。

References

1. E. Bannai : On perfect codes in the Hamming schemes $H(n, q)$ with q arbitrary. ~~To appear in~~ $J. \text{ Comb. Theory (A)}$.
23 (1977), 58-67
2. ——— : On tight spherical designs : To appear in $J. \text{ Comb. Theory (A)}$
3. ——— : On tight designs. To appear in $Quart. J. Math. (Oxford)$.
4. ——— : On some spherical t -designs (preprint).
5. E. Bannai and R. M. Damerell : Tight spherical designs (in Preparation)
6. P. Delsarte : An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Repts. Suppl. 10 (1973).
7. P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel : Spherical codes and designs. To appear in $Geometriae Dedicata$.