

The box complexes of graphs without 3 and 4-cycles

筑波大学 数理物質科学研究科 上別府 陽 (Akira Kamibeppe)

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

有限集合 V (頂点集合) と V の二元部分集合からなる族 E (辺集合) との組 $G = (V, E)$ を graph という. $V(G)$, $E(G)$ でそれぞれ, graph G の頂点集合, 辺集合を表すことにする. この定義からわかるように, graph は多重辺やループを含まない. 以下では孤立点を持たない graph を考える. graph G の k -彩色 (k -coloring) とは, $\{u, v\} \in E(G)$ ならば $f(u) \neq f(v)$ を満たす写像 $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ のことをいう. このとき, 自然数

$$\chi(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ は } k\text{-彩色を持つ}\}$$

を graph G の彩色数 (chromatic number) という. $\chi(G)$ の下界を与える方法の 1 つとして, graph G の box complex と呼ばれる単体的複体 $B(G)$ の位相幾何学的な情報を用いる方法が知られている. まず $B(G)$ の定義を与え, その方法を紹介するための準備をする.

G を graph とし, $A \subseteq V(G)$ とする. どの $a \in A$ に対しても, $\{v, a\} \in E(G)$ である $v \in V(G)$ を A の common neighbor と呼ぶ. A の common neighbor 全体からなる集合を $CN_G(A)$ で表す. 便宜上, $CN_G(\phi) = V(G)$ と定義する. $A = \{u\}$ のとき, $CN_G(A)$ は G における $u \in V(G)$ の neighbor 全体からなる集合であることがわかる.

$A_1, A_2 \subseteq V(G)$, $A_1 \cap A_2 = \phi$ に対して,

$$V = A_1 \cup A_2, E = \{\{a_1, a_2\} \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \{a_1, a_2\} \in E(G)\}$$

で定義される G の bipartite subgraph (V, E) を $G[A_1, A_2]$ で表す. $G[A_1, A_2]$ が complete であるとは, 任意の $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ に対し, $\{a_1, a_2\} \in E(G)$ が成立することをいう. 便宜上, $G[\phi, A_2]$ と $G[A_1, \phi]$ も complete であると呼ぶことにする. $A_1, A_2 \subseteq V(G)$ に対し,

$$A_1 \boxplus A_2 := (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\}) (\subseteq V(G) \times \{1, 2\})$$

と定義する.

graph G に対して, $V(G) \times \{1, 2\}$ の部分集合族

$$B(G) = \{A_1 \boxplus A_2 \mid A_1, A_2 \subseteq V(G), A_1 \cap A_2 = \phi, \\ G[A_1, A_2] : \text{complete}, CN_G(A_1) \neq \phi \neq CN_G(A_2)\}$$

で与えられる抽象単体的複体を G の box complex という.

X を位相空間とし, $\nu \circ \nu = \text{id}_X$ を満たす同相写像 $\nu: X \rightarrow X$ を X 上の $\mathbb{Z}_2$ -action と呼び, 位相空間と $\mathbb{Z}_2$ -action との対 (X, ν) を $\mathbb{Z}_2$ -space と呼ぶ. 多面体 $\|B(G)\|$ は不動点を持たない $\mathbb{Z}_2$ -action として, 次で定義される simplicial map ν の affine extention を持ち, $\mathbb{Z}_2$ -space になる: 任意の $v \in V(G)$ に対して,

$$\nu: V(B(G)) \rightarrow V(B(G)); \{v\} \boxplus \phi \mapsto \phi \boxplus \{v\}, \phi \boxplus \{v\} \mapsto \{v\} \boxplus \phi.$$

このとき、多面体 $\|B(G)\|$ へ拡張された $\mathbb{Z}_2$ -action に関して $\|B(G)\|$ の $\mathbb{Z}_2$ -index が定義できる。

2つの $\mathbb{Z}_2$ -space (X, ν_X) と (Y, ν_Y) の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ で、 $\nu_Y \circ f = f \circ \nu_X$ を満たすものを X から Y への $\mathbb{Z}_2$ -map と呼ぶ。以下では、 k 次元球面 S^k 上の $\mathbb{Z}_2$ -action は常に antipodal map を考えることにする。一般に、 $\mathbb{Z}_2$ -space (X, ν) の $\mathbb{Z}_2$ -index は次で定義される：

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \nu) := \min\{k \mid \mathbb{Z}_2\text{-map } f: X \rightarrow S^k \text{ が存在}\}.$$

$\chi(G)$ の下界は、box complex の $\mathbb{Z}_2$ -index で与えられることが知られている。

Theorem 1 (J. Matoušek-G. M. Ziegler [4]: p.125). 任意の graph G に対して、

$$\chi(G) \geq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|B(G)\|) + 2.$$

このような研究は、graph の彩色数に関する Kneser 予想 ([4], p.57 を参照) が位相幾何学を応用して証明されたことから始まる ([3], [6] を参照)。一方で graph G が与えられたとき、box complex $\|B(G)\|$ の位相を上から直接知ることは (complete graph など特別なものを除いて) 難しい。以下では、 $\|B(G)\|$ が持つ幾何学的な特徴に注目して得られた結果を述べる。

connected graph G はその spanning tree T にいくつかの辺を加えて表すことができるから $\|B(G)\|$ の位相を調べるために、次の2つの目標をたてることができる：

- ・ tree の box complex の位相を調べる。
- ・ graph G の spanning tree T をとり、 $B(G)$ を $B(T)$ を用いて表す。

(I) tree の box complex の位相について：

$A \subset X$ とする。 $f_0 = \text{id}_X$, $f_1(X) = A$, $f_t|_A = \text{id}_A$ であって、任意の $t \in [0, 1]$ に対して、 $f_t: X \rightarrow X$ が $\mathbb{Z}_2$ -map であるような homotopy $\{f_t: X \rightarrow X\}$ が存在するとき、 A を X の $\mathbb{Z}_2$ -deformation retract という。

Theorem 2 (tree の box complex). T を tree とする。tree T の box complex $\|B(T)\|$ は2つの可縮な component からなる。さらに T を 1 次元 simplicial complex と見なして、 $\|B(T)\|$ の各 component へ埋め込むことができ、その像は $\|B(T)\|$ の $\mathbb{Z}_2$ -deformation retract である。

これを示すためには、次の2つの定理を用いる。

Theorem 3 (box complex の分解定理). graph G の subgraph $G_1, \dots, G_k$ が $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$ を満たし、更に次の条件

$G[M_1, M_2]$ が complete であるような任意の極大部分集合 $M_1 \uplus M_2 \subseteq V(G) \times \{1, 2\}$ に対して、 $G_i[M_1, M_2]$ が complete であるような $i \in \{1, \dots, k\}$ が存在する

を満たすとする。そのとき、 $B(G) = \bigcup_{i=1}^k B(G_i)$ が成り立つ。

G の頂点 $v \in V(G)$ で v の neighbor が唯一つしかないとき、 v を G の端点という。部分集合 $A \subseteq V(G)$ のどの2点も G の辺で結べないとき、 A は G で独立 (independent) であるという。

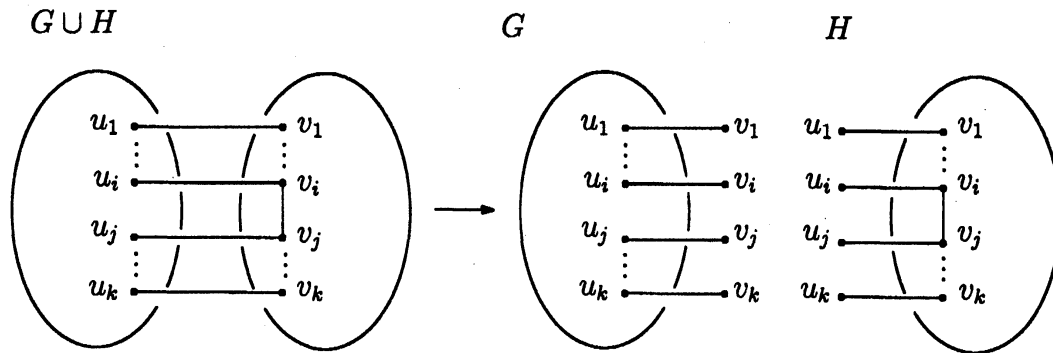
Theorem 4 (貼り合わせ定理 1). 2つの graph G と H の和で表せる graph $G \cup H$ において、 $G \cap H$ が

$$V(G \cap H) = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k\}, E(G \cap H) = \{\{u_i, v_i\} \mid i = 1, \dots, k\}$$

と表されていて、次の条件を満たすとする：

- (1) $\{u_i, v_j\} \notin E(G \cup H) \ (i \neq j),$ (2) $u_1, \dots, u_k$ は H の端点,
 (3) $v_1, \dots, v_k$ は G の端点, (4) $\{u_1, \dots, u_k\}$ は G で独立.

このとき、 $B(G \cup H) = B(G) \cup B(H)$, $B(G \cap H) = B(G) \cap B(H)$ が成り立つ.



(II) graph G の spanning tree T をとり、 $B(G)$ を $B(T)$ を用いて表す：

G を connected graph で $\text{rank } H_1(G) = k$ であるとする。 G の spanning tree T と $E(T) \cup \{e_1, \dots, e_k\} = E(G)$ を満たす k 個の辺 $e_1, \dots, e_k$ をとり、この番号順に T に辺を加えることを考える。即ち $G_0 = T$ とし、各 $i = 1, \dots, k$ に対して、graph G_i を

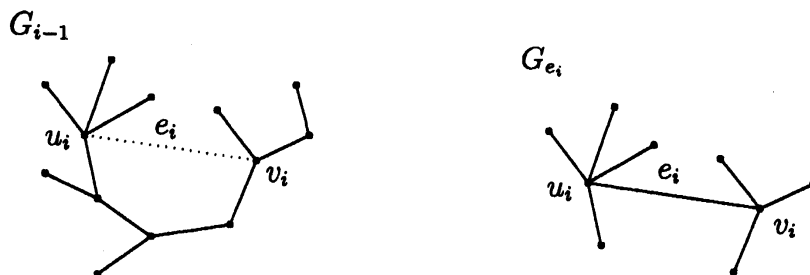
$$V(G_i) = V(T) (= V(G)), E(G_i) = E(T) \cup \{e_1, \dots, e_i\}$$

と定義する。また、graph G_{e_i} を次のように定義する：

$$V(G_{e_i}) = \{u_i, v_i\} \cup \text{CN}_{G_{i-1}}(u_i) \cup \text{CN}_{G_{i-1}}(v_i),$$

$$E(G_{e_i}) = \{\{u_i, x\} \mid x \in \text{CN}_{G_{i-1}}(u_i)\} \cup \{\{v_i, y\} \mid y \in \text{CN}_{G_{i-1}}(v_i)\} \cup \{e_i\}.$$

$\text{CN}_{G_{i-1}}(\{u_i, v_i\}) = \phi$ のとき、graph G_{e_i} は tree になることがわかる。



このとき、 $G_i = G_{i-1} \cup G_{e_i} = \dots = T \cup \bigcup_{j=1}^i G_{e_j}$ である。 G が長さが 4 以下の cycle を含まないとき、次の結果を得る。

Theorem 5. G を長さが 4 以下の cycle を含まない connected graph とする。 G の spanning tree T に対し、 $e_1, \dots, e_k$ は $E(G) \setminus E(T) = \{e_1, \dots, e_k\}$ を満たす k 個の辺とする。上で定義した graph G_{i-1} と G_{e_i} の和で表される graph $G_i = G_{i-1} \cup G_{e_i}$ と各 $i = 1, \dots, k$ に対し、

$$B(G_{i-1} \cup G_{e_i}) = B(G_{i-1}) \cup B(G_{e_i}), \quad B(G_{i-1} \cap G_{e_i}) = B(G_{i-1}) \cap B(G_{e_i})$$

が成り立つ. したがって, $B(G) = B(T) \cup \bigcup_{i=1}^k B(G_{e_i})$ が成り立つ.

このことは, 次の定理を用いて得られる.

Theorem 6 (貼り合わせ定理 2). graph H は頂点集合が $V(H) = \{u_1, \dots, u_k, u, v_1, \dots, v_l, v\}$, 辺集合が

$$E(H) = \{\{u, u_i\} \mid i = 1, \dots, k\} \cup \{\{v, v_j\} \mid j = 1, \dots, l\} \cup \{\{u, v\}\}$$

で定義された tree とする. 2 つの graph G と H の和で表せる graph $G \cup H$ において, 2 つの graph G と H の共通部分が

$$V(G \cap H) = \{u_1, \dots, u_k, u, v_1, \dots, v_l, v\}, \quad E(G \cap H) = E(H) \setminus \{\{u, v\}\}$$

と表されていて, 次の (1)~(3) を満たすとする:

- (1) $CN_G(u) = \{u_1, \dots, u_k\} (= CN_H(u) \setminus \{v\})$,
- (2) $CN_G(v) = \{v_1, \dots, v_l\} (= CN_H(v) \setminus \{u\})$,
- (3) $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\}$ は G で independent.

このとき, $B(G \cup H) = B(G) \cup B(H)$, $B(G \cap H) = B(G) \cap B(H)$ が成り立つ.

以上のことから $B(G)$ を $B(T)$ と $B(G_{e_i})$ ($i = 1, \dots, k$) の和で表すことができた. graph G が長さ 4 以下の cycle を持たなければ G_{e_i} は tree だから $\|B(G_{e_i})\|$ は 2 つの可縮な component になる. 上の結果を用いて $\|B(G)\|$ の位相を次のようにして調べることができる. $\overline{G}$ を次で定義される $B(G)$ の 1 次元 simplicial subcomplex とする:

$$\overline{G} := \{\{u\} \boxplus \phi, \{v\} \boxplus \phi, \phi \boxplus \{u\}, \phi \boxplus \{v\}, \{u\} \boxplus \{v\}, \{v\} \boxplus \{u\} \mid \{u, v\} \in E(G)\} \subset B(G)$$

$\|B(G)\|$ 上の $\mathbb{Z}_2$ -action を $\|\overline{G}\|$ へ制限することで, $\|\overline{G}\|$ 上の $\mathbb{Z}_2$ -action が得られる.

Theorem 7. G を長さが 4 以下の cycle を含まない connected graph とする. このとき, $\|\overline{G}\|$ は $\|B(G)\|$ の $\mathbb{Z}_2$ -deformation retract である.

$\|\overline{G}\|$ の homotopy type は次のようになる.

Theorem 8. G を connected graph とし, $\text{rank } H_1(G) = k$ であるとする. このとき, $\|\overline{G}\|$ について次が成り立つ.

- (1) G に含まれる cycle は, すべて偶数の長さを持つならば,

$$\|\overline{G}\| \simeq \bigvee_k S^1 \amalg \bigvee_k S^1,$$

- (2) G は長さが奇数の cycle を少なくとも 1 つ含むなら,

$$\|\overline{G}\| \simeq \bigvee_{2k-1} S^1.$$

G が長さが 4 以下の cycle を含まない connected graph の場合, 上記の Theorem 7 と 8 から $\|B(G)\|$ の homotopy type が決定できる.

Corollary 9. G を長さが 4 以下の cycle を含まない connected graph とし, $\text{rank } H_1(G) = k$ であるとする. このとき, box complex $\|B(G)\|$ について次が成り立つ.

(1) G に含まれる cycle は, すべて偶数の長さを持つならば,

$$\|B(G)\| \simeq \bigvee_k S^1 \amalg \bigvee_k S^1,$$

(2) G は長さが奇数の cycle を少なくとも 1 つ含むなら,

$$\|B(G)\| \simeq \bigvee_{2k-1} S^1.$$

さて, 長さが 4 以下の cycle を含まない connected graph G に対し, Theorem 7 から $\|B(G)\|$ から $\|\overline{G}\|$ への $\mathbb{Z}_2$ -map があることがわかる. このとき, $\mathbb{Z}_2$ -index の定義から,

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|B(G)\|) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|)$$

である. また $\overline{G}$ の定義から, $\|B(G)\|$ 上の $\mathbb{Z}_2$ -action を $\|\overline{G}\|$ 上に制限したものは, $\|\overline{G}\|$ 上に不動点を持たない $\mathbb{Z}_2$ -action を与える. $\overline{G}$ が 1 次元 simplicial complex であることから,

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|B(G)\|) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|) \leq 1$$

を得る. したがって, $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|B(G)\|) + 2 \leq 3$ が成り立つ.

一方, Erdős の定理 ([1], p.117) により, 任意の正の整数 k に対して, 長さが k 以下の cycle を含まず, $\chi(G) > k$ であるような graph が存在するから, 一般に Theorem 1 で述べた graph の彩色数の下界 $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|B(G)\|) + 2$ と graph G の彩色数 $\chi(G)$ との差はいくらでも大きくなりうるということがわかる.

既に, J. W. Walker [7], §12 によって, 長さが 4 以下の cycle を含まない graph の彩色数の下界を位相的に評価する L. Lovász 等による既存の方法には限界があると指摘されている. 2002 年, J. Matoušek, G. M. Ziegler [5] によって, 長さが 4 以下の cycle を含まない graph で, $\chi(G)$ と $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|B(G)\|) + 2$ の差がいくらでも大きくなりうるということが指摘されている. 更に 2004 年に P. Csorba [2] はこのような graph のもう一つの例を与えている.

参考文献

- [1] R. Diestel, Graph Theory. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 173, Springer-Verlag, 2005.
- [2] P. Csorba. Homotopy types of box complex, arXiv:math.CO/0406118v1, 2004.
- [3] L. Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 25:319-324, 1978.
- [4] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Universitext, Springer-Verlag, 2003.
- [5] J. Matoušek and G. M. Ziegler. Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy. Manuscript, arXiv:math.CO/0208072, 2002.
- [6] K. S. Sarkaria. A generalized Kneser conjecture. J. Combinatorial Theory, Ser. B, 49:236-240, 1990.
- [7] J. W. Walker. From graphs to ortholattices to equivariant maps. J. Combinatorial Theory, Ser. B, 35:171-192, 1983.