

跳水現象における構造転移の研究

北大電子研, 理研 横井 研介 (Kensuke Yokoi)

東工大総理工 肖 鋒 (Feng Xiao)

1 はじめに

跳水とは, 常流から射流に遷移する時に現れる水位の不連続のことである. 本研究では, 跳水現象の一種である円形跳水について調べる. 図1のようにノズルから定常的に水を流し, その水流が水平な板に衝突し, 高速な流れが円形状に広がり, そしてある半径のところで水位の不連続が形成される. これが円形跳水である. こ

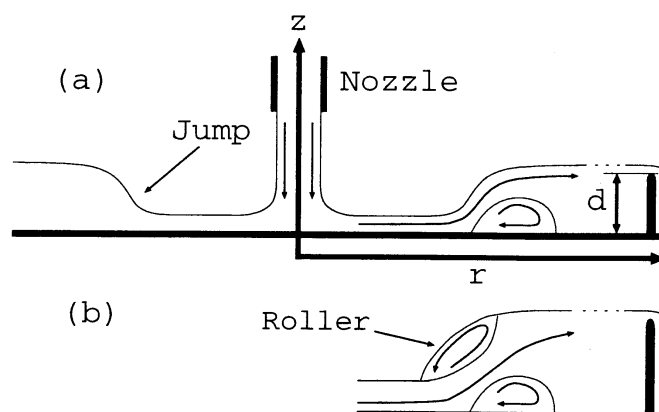


図 1: 円形跳水の実験の概略図. ノズルからの流量は一定. また, この実験では流れの構造を安定させるために粘性の高い液体 (Ethylene glycol 水溶液) が使われている. (a), (b) の流れの構造をそれぞれ Type I, Type II と呼ぶ.

の現象は台所の流しなどでも観測でき, 実験が容易である. そのため古くから多くの研究者により研究されている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. しかし, この現象は一見単純に見えるが, 自由界面およびその不連続, 境界層, (剥離) 渦等が伴い, 解析は非常に困難である. しかし, それと同時に多くの未解決問題を提供している.

実験では, 跳水から十分に離れたところに高さ d の壁 (図 1) があり, これにより跳水の外側の水位をコントロールすることができる. 壁の高さが低い時, または 0 の時, 底の方にのみ渦が形成される構造, Type I (図 1 (a)), が形成される. 次に,

Type I の状況から壁を徐々に上げていくと、ある壁の高さで表面にも渦が形成される構造、Type II (図 1 (b)), に突然変化する。本研究ではこの構造転移を調べる。

ここで、円形跳水とは別のタイプの跳水現象について簡単に紹介する。同様の跳水は水路などでも形成され、水理工学において重要な役割を果たす。Roller を伴った跳水には高速流（例えば、ダムや水門からの放水）のエネルギーを散逸させる効果があり、高速流を減速させ、また河川の寝食を防ぐことに役立っている [11]。そのため、この現象は古くから実験的に良く調べられており、流れの状況により様々な流れの構造を形成することが知られている。また、実用的な跳水の他にも、近年物理的に非常に興味深い多角形の跳水が実験により発見された [8, 9]。上の円形跳水の実験において、Type II への構造転移の後、更に壁の高さを上げていくと対称性が破れ正多角形の跳水が形成される。初めは 10 程度の角数の跳水が形成され、更に壁の高さを上げていくと、角数が一つずつ小さくなる。これらのように、跳水は工学的、理学的にも興味深い現象である。しかしこれらの現象については経験則以上のことは、ほとんど何も分かっていない。

一方、理論的研究では、実験と良く一致する円形跳水の半径に関する Scaling relation [5] が提案されている。また、Type I の静水圧平衡を仮定した縮約モデル [7] が提案されているが、Type II を扱うことができるモデルはまだ構築されていない。そのため縮約モデルによる構造転移の研究は現状では行なえていない。

そこで今回、軸対称を仮定した円形跳水の数値シミュレーションを行なうことにより構造転移の原因を調べた。その結果、跳水の周辺に圧力の上昇が観測され、それが構造転移に重要な役割を果たすことが分かった。

2 計算モデル

界面の大変形を伴う流体現象を扱うために、界面を陰的に扱う数値計算法により計算モデルを構築する。これにより自由界面流れの数値シミュレーションにおける界面の扱いの繁雑さを避けることができる。混相流の数値計算法として、C-CUP 法 (Cubic interpolated propagation, Combined Unified Procedure) [12], Interface tracking 法として、Level set 法 [13, 14], 表面張力の計算モデルとして、CSF モデル (Continuum Surface Force) [15] を用いた。C-CUP 法は、混相流の数値計算法として優れた方法であり、多くの応用例がある。しかし、界面の大変形が定常的に起こるような状況 (Roller 周辺) では数値拡散が深刻な問題となった。そこで、Level set 法を導入することにより界面での数値拡散を防いだ。また Level set 法を用いることにより、界面の曲率を精度良く計算することかでき、表面張力の計算精度も向上した。表面張力の計算には、表面張力を体積力として計算する CSF モデルを用いた。以下に支配方程式と計算モデルの詳細を説明する。

2.1 支配方程式

跳水現象を扱うための支配方程式には、以下のもの採用する.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}_{sv}}{\rho}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) e = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3)$$

ここで, ρ 密度, $\mathbf{u}$ 速度, p 圧力, $\mathbf{g}$ 重力, μ 粘性係数, $\mathbf{F}_{sv}$ 表面張力, e 内部エネルギー. 状態方程式は, 気相, 液相ともに理想気体の状態方程式を用いた.

2.2 混相流の数値計算法

C-CUP 法では, 支配方程式を Advection part と Non advection part に分離して計算する.

1. Advection part:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) e = 0. \quad (6)$$

2. Non advection part:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}_{sv}}{\rho}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (9)$$

時間発展は, Advection part と Non-advection part を交互に計算することにより計算される. Advection part には, 高精度かつ安定な移流方程式の解法である CIP (Cubic Interpolated Propagation) 法 [16] を用いる. Non-advection part は, 差分法によって計算するが, 異なる音速を持つ混相流を扱うために Implicit scheme の CUP 法を用いる. 音速は $C_s^2 = \partial p / \partial \rho$ と定義でき, この関係は以下のように書き換えることができる.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (10)$$

(7) と (10) から

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (11)$$

が得られる。そして, (7), (8), (11) を以下のように差分化する。

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{**}, \quad (12)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^*}, \quad (13)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{**}}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho^*} \Delta \mathbf{u}^{**} + \frac{\mathbf{F}_{sv}}{\rho^*}, \quad (14)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t} = -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{**}. \quad (15)$$

* は Advection part を計算した後の値である。ここで, (13) の発散を (15) に代入すると圧力に対する, 以下の Poisson 方程式が得られる。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^*} \right) = \frac{p^{n+1} - p^*}{\rho^* C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (16)$$

(16) を用いて圧力を計算することにより, 音速に対応した圧力が計算される。そして, その p^{n+1} を用い (12), (13), (14) からそれぞれの音速に対応した $\mathbf{u}^{n+1}$, ρ^{n+1} が計算される。

2.3 Interface tracking 法

Level set 法では, 気相, 液相の界面は Level set 関数 ψ によって追跡される。Level set 関数は液相に対して $\psi > 0$, 気相に対して $\psi < 0$, かつ

$$|\nabla \psi| = 1, \quad (17)$$

を満たす関数である。この時, 界面は Zero level set $\psi = 0$ である。

Level set 関数の時間発展は移流方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi = 0. \quad (18)$$

によって計算され, この移流方程式の計算にも CIP 法 [16] を用いた。

しかし, この移流の計算後の ψ は一般に Level set 関数の性質がいくらか損なわれる。そのため, (19) を定常になるまで計算することにより Level set 関数の性質を回復させる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = S(\psi)(1 - |\nabla \psi|), \quad (19)$$

ここで, S は

$$S(\psi) = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + \delta^2}} \simeq \text{sign}(\psi). \quad (20)$$

この Level set 関数から物質の識別に用いる密度関数 ϕ を以下のように計算する.

$$\phi = H_\alpha(\psi), \quad (21)$$

$$H_\alpha(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \psi < -\alpha \\ \frac{1}{2}[1 + \frac{\psi}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin(\frac{\pi\psi}{\alpha})] & \text{if } |\psi| \leq \alpha \\ 1 & \text{if } \psi > \alpha, \end{cases} \quad (22)$$

ここで 2α は界面の厚さである.

2.4 表面張力のモデル

表面張力は, 密度関数の勾配を使い体積力 $\mathbf{F}_{sv}$ として以下のように計算される.

$$\mathbf{F}_{sv} = \sigma \kappa \nabla \phi, \quad (23)$$

ここで, σ は 表面張力係数, κ は曲率である. κ は

$$\kappa = -(\nabla \cdot \mathbf{n}), \quad (24)$$

によって計算され, $\mathbf{n}$ は 単位法線ベクトルである. $\mathbf{n}$ は, Level set 関数の定義から

$$\mathbf{n} = \nabla \psi. \quad (25)$$

により計算される.

3 計算領域

今回の計算では, 軸対称を仮定した (2次元 r-z) 図 2 を計算する.

4 計算モデルの検証

本計算モデルの妥当性を調べるために, シミュレーション結果を実験の界面のプロファイル, 円形跳水の半径に関する理論 [5] と比較する.

図 3 に実験の界面プロファイルと比較した結果を示す. 次に, 円形跳水の半径に対する Scaling relation

$$r_j \sim q^{\frac{5}{8}} \nu^{-\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{8}}, \quad (26)$$

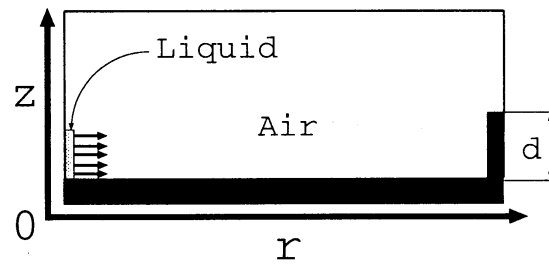


図 2: 計算領域の概略図. 底と壁の境界は no-slip, $\Delta r = \Delta z = 0.1$ mm の Cartesian グリッドを用いる.

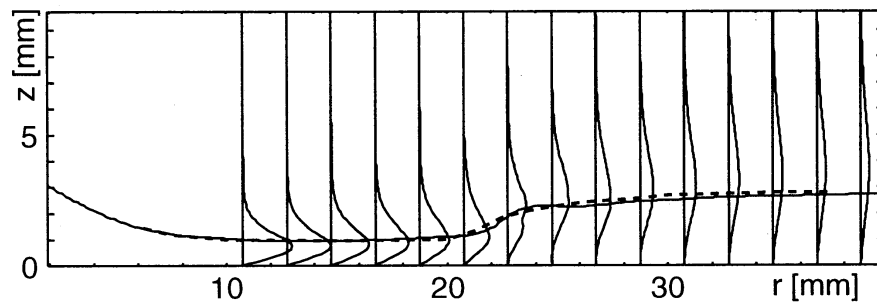


図 3: 実線はシミュレーションの界面のプロファイルと水平方向の速度分布, 点線は実験の界面のプロファイルを表す (実験データは [7] より). パラメータには実験値 $\rho_l = 1110$ kg/m³, $\rho_g = 1.2$ kg/m³, $\nu_l = 7.6 \times 10^{-6}$ m²/s, $\nu_g = 15.0 \times 10^{-6}$ m²/s, $\sigma = 4.5 \times 10^{-2}$ N/m and $Q = 27$ ml/s を用いた. ここで, Q は Volume flux ($2\pi r \int_0^h u dz$, h は深さ) である.

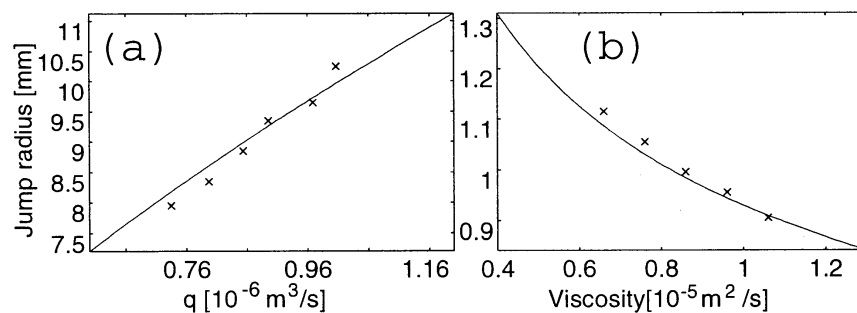


図 4: シミュレーション (x) と Scaling relation (実線) の比較. (a), (b) はそれぞれ跳水の半径の q , ν に対する依存性を示してる. (a) では $\nu = 1.0 \times 10^{-5}$ m²/s, (b) では $q = 0.9 \times 10^{-6}$ m³/s を用いた.

とシミュレーション結果を比較する．ここで， $q = \frac{Q}{2\pi}$ ．この Scaling relation は，シンプルであるが実験と良く一致する．図 4 は，Scaling relation との比較の結果である．図 4 (a) は Flux, (b) は粘性係数に対する半径の依存性を示している．界面，境界層，剥離渦 等が伴った複雑な現象であるにも関わらず，この計算モデルは現象を精度良く再現している．

5 計算結果

様々な壁の高さ d に対する定常状態の界面のプロファイルを図 5 に示す．下の三

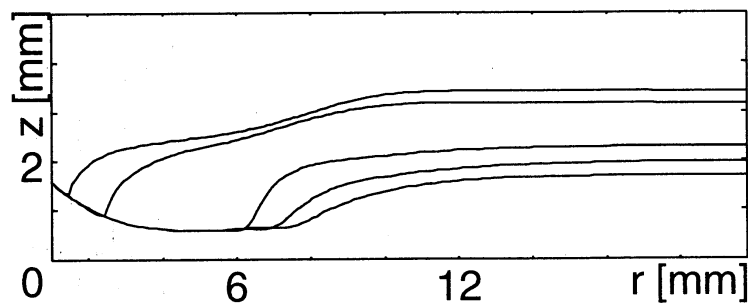


図 5: 様々な壁の高さ d に対する定常状態での界面のプロファイル． $Q = 5.6 \text{ ml/s}$, $\nu_l = 7.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ を用いた．

つのプロファイルは Type I, 上の二つは Type II である．図 6 の “Steady state of Type I” と “Steady state of Type II” は，図 5 の下から二番目と四番目のプロファイルの水平方向の速度分布と界面のプロファイルに対応する．この計算モデルはこのような界面の大変形が伴った状況であっても安定に計算することができる．

次に構造転移の原因を調べるために，Type I から Type II への転移過程を調べる．初期状態として Type I の定常状態を用い，その状態から壁の高さを上げて固定する．その時間発展の様子を図 6 に示す．時間が経つにしたがって跳水周辺の界面の勾配が急になり， $t = 0.29 \text{ s}$ 周辺で表面に逆流が形成され，最後には Type II の定常状態に至る．次に，動圧 (実際の圧力 - 静水圧) の時間発展を調べる．その結果を図 7 に示す．跳水周辺に圧力の上昇が形成され，それは時間が経ち，転移が近づくに従い強くなる．この結果から，構造転移には動圧が重要な役割を果たしていると考えられる．しかし，今までの理論的研究では，静水圧平衡が仮定され，これらの研究では構造転移のメカニズムを説明することができなかった [7]．そこで，この動圧により構造転移を説明することを考える．いま，動圧により逆流を形成するための圧力勾配が形成されていることに注目する．そして，転移が近づくに従い動圧は強くなり，それに伴って圧力勾配も強くなる．もし，この圧力勾配が流れによる力より強くなれば Type II が形成されると考えられる [10]．

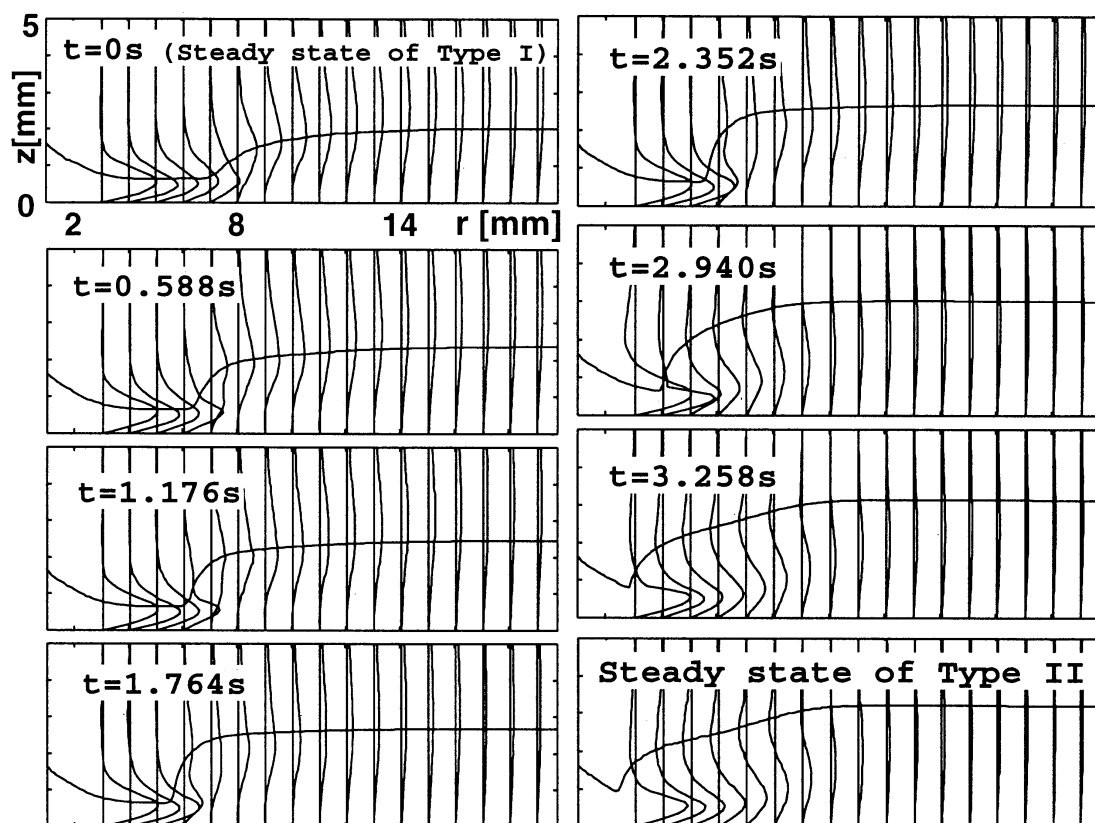


図 6: 界面のプロファイルと水平方向の速度分布の Type I から Type II への時間発展.

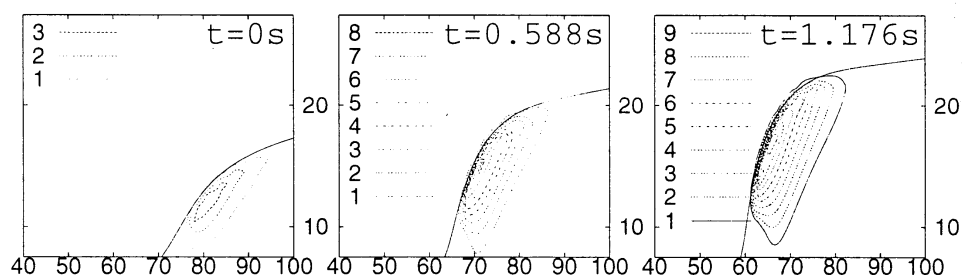


図 7: 跳水周辺での動圧分布 [Pa] の時間発展.

次に動圧形成の理由を考える．図 7 のように動圧が形成されている界面の周辺では必ず曲率が形成されている．表面張力は曲率に比例するため，この場合界面に必ず表面張力が働いている．そして定常状態を維持するためには，何らかの力でこの表面張力を押し返していなければならない．それが動圧による圧力勾配であると考えられる．それを確かめるために定常状態での動圧の曲率に対する依存性を調べる．シミュレーションまた実験 [6] において，壁の高さが高ければ高いほど跳水周辺の曲率は大きくなる．そこで，三つの異なる壁の高さでの Type I の定常状態での動圧分布を調べた (図 8)．曲率が大きければ大きいほど，強い動圧が形成されている．

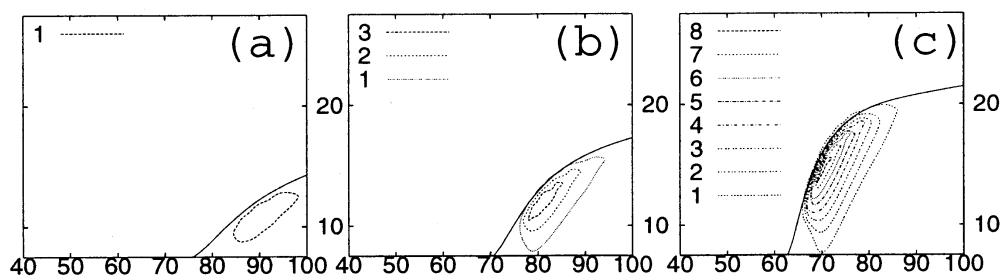


図 8: Type I での様々な壁の高さに対する跳水周辺での動圧分布．(a), (b), (c) は，それぞれ図 5 の一番下のから 3 番目のプロファイルに対応する．

これにより動圧が表面張力に大きく依存していることが分かる [10]．

6 結論

C-CUP 法，Level set 法，CSF モデルを組み合わせ用いることにより，跳水のシミュレーションを行なった．その結果，円形跳水の構造転移には動圧が重要な役割を果たし，動圧は表面張力に強く依存することが分かった．

参考文献

1. Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. London A **90**, 324 (1914).
2. I. Tani, J. Phy. Soc. Jpn. **4**, 212 (1949).
3. E. J. Watson J. Fluid. Mech. **20**, 481 (1964).
4. A. D. D. Craik et al., J. Fluid. Mech. **112**, 347 (1981).
5. T. Bohr, P. Dimon, and V. Putkaradze, J. Fluid. Mech. **254**, 635 (1993).

6. T. Bohr et al, *Physica B* **228**, 1 (1996).
7. T. Bohr, V. Putkaradze, and S. Watanabe, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1038 (1997).
8. C. Ellegaard et al., *Nature* **392**, 767 (1998).
9. C. Ellegaard et al., *Nonlinearity* **12**, 1 (1999).
10. K. Yokoi, and F. Xiao, *Phys. Lett. A* **257**, 153 (1999).
11. V. T. Chow, *Open channel hydraulic*, McGraw-Hill, New York, 1959.
12. T. Yabe, and P. Y. Wang, *J. Phy. Soc. Jpn.* **60**, 2105 (1991).
13. S. Osher, and J. A. Sethian, *J. Comput. Phys.* **79**, 12 (1988).
14. M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher, *J. Comput. Phys.* **114**, 146 (1994).
15. J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and C. Zemach, *J. Comput. Phys.* **100**, 335 (1992).
16. T. Yabe et al., *Comput. Phys. Commun.* **66** 233 (1991).