

Banach 空間における非線形発展作用素と その無限小生成作用素

広大理 大春慎え助 (Shinnosuke Oharu)

広大理 松本敏隆 (Toshitaka Matsumoto)

はじめに 本報告では Banach 空間における発展作用素の生成と無限小生成作用素による特徴付けについて最近得られた結果について報告する。

$(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とし、時間変数の区間 $[0, T]$ に対して X の部分集合族 $\mathcal{D} = \{D(s) : s \in [0, T]\}$ を考える。 X における作用素の族 $\mathcal{U} = \{U(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ が次の 2 つの条件をみたすとき、この族を $\mathcal{D}$ 上の発展作用素という。

(E1) $0 \leq r \leq s \leq t \leq T$ に対して $U(t, s)$ は $D(s)$ を $D(t)$ に写し、

任意の $x \in D(r)$ に対して

$$U(r, r)x = x \quad \text{かつ} \quad U(t, r)x = U(t, s)U(s, r)x$$

(E2) 任意の $x \in D(r)$ に対して $U(t, r)x$ は t に関して $[r, T]$ で連続。
発展作用素の一般的本性質を組織的かつ統一的に調べるためには $\mathcal{U}$ の連続性と時間変数 t に関する時間依存性によって発

展作用素を分類して適当なクラスを考える必要がある。ここでは文献[7]で導入された非線形発展作用素のクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ について考察する。即ち上記の (E1) と (E2) に加えて次の条件をおく、

(E3) 実数 ω とクラス $\mathcal{K}$ に属する $[0, T] \times [0, T]$ 上の実数値関数 f が存在して、 $0 \leq r \leq s \leq T$, $0 \leq t \leq T-s$, $x \in D(s)$, $y \in D(r)$ に対して

$$|U(t+s)x - U(t+r)y| \leq e^{\omega t}|x-y| + \int_0^t e^{\omega(t-\xi)} f(\xi+s, \xi+r) d\xi$$

条件 (E3) は非線形作用素の半群の準縮小性の条件を時間依存の場合に拡張したものである。

クラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素は X における時間依存の発展方程式に対する初期値問題

$$(CP) \begin{cases} u'(t) \in A(t)u(t) & , r < t < T \\ u(r) = x \in D(r) & , 0 \leq r < T \end{cases}$$

の一般化された意味での解を与える作用素の族として現われる。初期値問題 (CP) は多くの人々によって研究されて来た。とくに一般化された意味での解の存在を保障する十分条件については Crandall and Pazy [3], Evans [4], Kato [8], Kobayasi et al. [11], Pavel [13], Iwamiya et al [7] などにより多くの結果が得られている。非線形半群については線形理論に

おける Hille-Yosida の定理の非線形半群の場合への拡張が Komura [12] により Hilbert 空間において得られた。その後、Komura の定理は Baillon [1], Reich [14] によって "smooth" な Banach 空間に拡張され、さらに Kobayashi [9], Kobayashi and Oharu [10] 等によって局所的に Lipschitz 連続な作用素の半群の場合に拡張されている。

この報告ではクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素に対する Hille-Yosida 型の定理を与えることについて論じる。証明には Kobayashi and Oharu [10] において用いられた手法を時間依存の場合に拡張したものを適用する。第1節では非線形発展作用素のクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ について述べる。第2節では接触条件の下でクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素を生成することについて論じる。第3節では右微分係数の拡張として解釈される一般化された意味での無限小生成作用素 (g.i.g.) を導入し、このような無限小生成作用素に対して一般の Banach 空間において成り立つ性質について述べる。第4節では Banach 空間を制限した上で、そこに与えられた発展作用素の g.i.g. が存在し、かつ接触条件をみたすことを示す。このためには発展作用素の定義域 $\mathcal{D}$ に制限を加える必要があるが、その条件は $\mathcal{D}$ が非柱状領域になる場合を含んでいる。

1. 非線形発展作用素のクラス

$(X, |\cdot|)$ を Banach 空間とする。 $x, y \in X$ と $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$[x, y]_{\lambda} = \lambda^{-1} (|x + \lambda y| - |x|)$$

$$[x, y]_{+} = \inf_{\lambda > 0} [x, y]_{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} [x, y]_{\lambda}$$

$$[x, y]_{-} = -[x, -y]_{+}$$

と定める。 汎関数 $[\cdot, \cdot]_{+} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は上半連続で次の性質 (i) ~ (iv) をもつことが知られている。([4])

$$(i) \quad [x, \alpha x + y]_{+} = \alpha |x| + [x, y]_{+}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad [x, \alpha y]_{+} = \alpha [x, y]_{+}, \quad \alpha > 0$$

$$(iii) \quad [x, y]_{-} - [x, z]_{+} \leq [x, y - z]_{-} \leq [x, y]_{+} - [x, z]_{+}$$

$$[x, y + z]_{+} \leq [x, y]_{+} + [x, z]_{+}$$

$$(iv) \quad |[x, y]_{+}| \leq |y|, \quad [x, x]_{+} = |x|$$

文献 [] に従って次のような発展作用素の族を導入する。

$T > 0$ とし、発展作用素の時間依存度を定める関数の族 $\mathcal{F}$ は次の

(i) (ii) をみたす関数 $f(s, t)$ から成っているとする。

$$(i) \quad f \in C([0, T] \times [0, T])$$

$$(ii) \quad f(t, t) = 0, \quad f(t, s) = f(s, t) \geq 0, \quad 0 \leq s, t \leq T$$

定義 1.1 $\mathcal{D} = \{D(s) : s \in [0, T]\}$ を X の空でない部分集合族、

$\omega \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$ とする。 X における作用素の族 $\mathcal{U} = \{U(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$

か次の3条件をみたすとき U はクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素であるという:

$$(E1) \quad 0 \leq r \leq s \leq t \leq T \text{ に対し } D(U(t, s)) = D(s), R(U(t, s)) \subset D(t), \\ x \in D(r) \text{ に対し}$$

$$U(r, r)x = x, \quad U(t, r)x = U(t, s)U(s, r)x$$

$$(E2) \quad s \in [0, T] \text{ と } x \in D(s) \text{ に対し } U(\cdot, s)x \in C([s, T]; X)$$

$$(E3) \quad 0 \leq r \leq s \leq T, \quad 0 \leq t \leq T-s, \quad x \in D(s), y \in D(r) \text{ に対し}$$

$$|U(t+s, s)x - U(t+r, r)y| \leq e^{\omega t}|x-y| + \int_0^t e^{\omega(t-s)} f(s+s, s+r) ds$$

2. 生成定理

この節ではクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素の生成定理を与える。
 $\mathcal{A} = \{A(t) : 0 \leq t \leq T\}$ を Banach 空間 X における作用素の族とする。
 集合 $\{(t, x) : t \in [0, T], x \in D(A(t))\}$ の $[0, T] \times X$ における閉包を $\mathcal{D}$ で表わし、各 $t \in [0, T]$ に対し $D(t) = \{x \in X : (t, x) \in \mathcal{D}\}$ とおく。 $\mathcal{A}$ に対し次のような条件 (C) を考える。

(C) ある定数 $\omega \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{F}$ が存在して次の4条件をみたす。

$$(C1) \quad s, t \in [0, T], (u, v) \in A(s), (x, y) \in A(t) \text{ に対し} \\ \|u-x, v-y\|_- \leq \omega \|u-x\| + f(s, t)$$

$$(C2) \quad x \in D(t) \text{ に対し } \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} d(R(I - \lambda A(t+\lambda)), x) = 0$$

$$(C3) \quad t_n \in [0, T], x_n \in D(A(t_n)), t_n \uparrow t \in (0, T], x_n \rightarrow x \in X \text{ ならば } x \in \overline{D(A(t))}$$

定理 2.1 作用素の族 $\mathcal{A} = \{A(t) : 0 \leq t \leq T\}$ が条件 (C) をみたしているとする。このとき次の性質 (2.1) (2.2) をもつ $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素 $\mathcal{U}$ が存在する。

$$(2.1) \quad 0 \leq s < t \leq T \text{ に対して } \mathcal{U}(t, s) : D(s) \rightarrow \overline{D(A(t))} \subset D(t).$$

$$(2.2) \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad 0 \leq r < T, \quad x \in D(s), \quad (z, w) \in A(r) \text{ に対して}$$

$$|\mathcal{U}(t, s)x - z| - |x - z| \leq \int_s^t \left(|\mathcal{U}(s, s)x - z|_+ + \omega |\mathcal{U}(s, s)x - z| + f(s, r) \right) ds$$

証明. $s \in [0, T)$ と $x \in D(s)$ を固定すると条件 (C2) と f の連続性により、次の (2.3) をみたす $[0, T]$ の分割の列 $\{\Delta^n\}$, $[0, T]$ 上で定義された X -値階段関数の列 $\{\varepsilon^n(\cdot)\}$, 及び $[0, T]$ 上で定義された X -値階段関数の列 $\{u^n(\cdot)\}$ が存在することか示される:

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^n = \{s = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{N(n)}^n \leq T\} \\ t \in (t_{k-1}^n, t_k^n] \text{ のとき } \varepsilon^n(t) = \varepsilon_k^n, \quad 1 \leq k \leq N(n) \\ u^n(0) = x_0^n = x \\ t \in (t_{k-1}^n, t_k^n] \text{ のとき } u^n(t) = x_k^n, \quad 1 \leq k \leq N(n) \\ (t_k^n - t_{k-1}^n)^{-1} (x_k^n - x_{k-1}^n) - \varepsilon_k^n \in A(t_k^n) x_k^n, \quad 1 \leq k \leq N(n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq N(n)} (t_k^n - t_{k-1}^n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_{N(n)}^n = T \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |\varepsilon^n(t)| dt = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N(n)} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |f(s, r) - f(t_k^n, r)| ds = 0, \quad 0 \leq r \leq T. \end{array} \right.$$

従って発展作用素の生成定理 ([11]) を適用することにより、
定理 2.1 が得られる。

証明終

3. 一般化された無限小生成作用素

クラス $E(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素 $\mathcal{U}$ に対して一般化された意味での無限小生成作用素 (g.i.g.) $A^+ = \{A^+(s) : 0 \leq s < T\}$ を次のように定める。

定義 3.1 $s \in [0, T)$, $h \in (0, T-s]$ に対して $A_h(s) = h(U(s+h, s) - I)$ とおく。 $(x, y) \in A^+(s)$ を次で定める：

各 $h \in (0, T-s]$ に対して $(x_h, y_h) \in A_h(s)$ が存在して

$$X \times X \text{ において } \lim_{h \downarrow 0} (x_h, y_h) = (x, y).$$

注意 $A_0(s)x = \lim_{h \downarrow 0} A_h(s)x$ とおくと定義から $A_0(s) \subset A^+(s)$ が成り立つ。 $A_0(s)$ は通常 s における無限小生成作用素とよぶから $A^+(s)$ をこの意味で“一般化された”と呼ぶ。

命題 3.2. $\mathcal{U}$ をクラス $E(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素、 A^+ を $\mathcal{U}$ の g.i.g. とすると次が成り立つ：

$0 \leq s \leq t < T$, $(x, y) \in A^+(s)$, $(x', y') \in A^+(t)$ に対して

$$(3.1) \quad [x - x', y - y'] \leq \omega |x - x'| + f(s, t)$$

証明 $(x, y) \in A^+(s), (\hat{x}, \hat{y}) \in A^+(t)$ とする。定義 3.1 より、

$h \in (0, T-t]$ に対して $x_h \in D(s), \hat{x}_h \in D(t)$ が存在して、

$$\lim_{h \downarrow 0} (x_h, A_h(s)x_h) = (x, y), \quad \lim_{h \downarrow 0} (\hat{x}_h, A_h(t)\hat{x}_h) = (\hat{x}, \hat{y}).$$

$\mathcal{U}$ に対する仮定 (E3) により、 $\lambda > 0$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & |(x_h - \hat{x}_h) - \lambda(A_h(s)x_h - A_h(t)\hat{x}_h)| \\ &= |(1 + \lambda h^{-1})(x_h - \hat{x}_h) - \lambda h^{-1}(U(s+h, s)x_h - U(t+h, t)\hat{x}_h)| \\ &\geq (1 - \lambda h^{-1}(1 - e^{\omega h}))|x_h - \hat{x}_h| - \lambda h^{-1} \int_0^h e^{\omega(h-s)} f(s+s, s+r) ds. \end{aligned}$$

そこで $h \downarrow 0$ とし

$$|x - \hat{x} - \lambda(y - \hat{y})| \geq (1 - \lambda\omega)|x - \hat{x}| - \lambda f(s, t).$$

これより $\lambda^{-1}(|x - \hat{x}| - |x - \hat{x} - \lambda(y - \hat{y})|) \leq \omega|x - \hat{x}| + f(s, t)$

となり、 $\lambda \downarrow 0$ とすれば (3.1) が得られる。

証明終

次に後の議論のために次の補題を準備する。

補題 3.3. $\mathcal{U}$ をクラス $\mathcal{E}(D, \omega, f)$ の発展作用素とし、 $h \in (0, T)$

$r, s \in [0, T)$ とする。このとき $\pi h \in (0, T-s]$ をみたす自然数 n と

$x \in D(s)$ 及び $z \in D(r)$ に対して次の不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & |U(\pi h + s, s)x - z| - |x - z| \\ (3.2) \quad & \leq h \sum_{k=1}^n \left([U(kh + s, s)x - z, A_h(r)z]_+ + h^{-1}(e^{\omega h} - 1)|U((k-1)h + s, s)x - z| \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \int_0^h e^{\omega(h-s)} f(s + (k-1)h + s, s+r) ds. \end{aligned}$$

(証明略.)

次の結果は発展作用素 $\mathcal{U}$ かその g.i.g. $\{A^+(t)\}$ に対して作られた初期値問題

$$\begin{cases} \mathcal{U}'(t) \in A^+(t) \mathcal{U}(t) & , \quad s < t < T \\ \mathcal{U}(s) = x \in D(s) & , \quad 0 \leq s < T \end{cases}$$

の integral solution になっていることを示している。

命題 3.4 $\mathcal{U}$ をクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素、 A^+ を $\mathcal{U}$ の g.i.g. とすると次の不等式が成り立つ:

$0 \leq s \leq t \leq T, 0 \leq r < T, x \in D(s), (z, w) \in A^+(r)$ に対して

$$\begin{aligned} & |U(t, s)x - z| - |x - z| \\ & \leq \int_s^t \left([U(\xi, s)x - z, w]_+ + \omega |U(\xi, s)x - z| + f(\xi, r) \right) d\xi. \end{aligned}$$

(証明略)

4. 接触条件

$\mathcal{U}$ をクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素、 A^+ を $\mathcal{U}$ の g.i.g. とする。

この節では Banach 空間と領域 $\mathcal{D}$ に対して条件を置き、この条件の下で A^+ が接触条件をみたすことを示す。先ず Banach 空間のクラスを制限する。

定義 4.1 Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ が次の (4.1) をみたすとき、
 一様に Gateaux 微分可能なノルムをもつという:

$$(4.1) \quad \begin{cases} M > 0, y \in X, \varepsilon > 0 \text{ に対してある } \delta > 0 \text{ が存在し,} \\ \lambda \in (0, \delta], |x| \leq M \text{ に対して次が成立する,} \\ (2\lambda)^{-1} (|x + \lambda y|^2 + |x - \lambda y|^2 - 2|x|^2) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

次に π を N 上の超フィルターとし、 $\nu: 2^N \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$\nu(B) = \begin{cases} 1 & (B \in \pi) \\ 0 & (B \notin \pi) \end{cases}$$

で定めると ν は N 上の有限加法的測度となる。 $\{a_n\} \in \ell^\infty$ に対して

$$\lim_{\pi} a_n = \int_N a_n d\nu$$

とおくと $\lim_{\pi}$ は ℓ^∞ 上の連続線形汎関数で次の性質

(4.2) をもつ。([5], [15])

$$(4.2) \quad \begin{cases} \lim_{\pi} a_n b_n = \lim_{\pi} a_n \cdot \lim_{\pi} b_n \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{\pi} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \end{cases}$$

超フィルター π を固定して次のような性質 (*) を考える。

(*) Banach 空間 X の任意の弱相対コンパクト列 $\{x_n\}$ に対して
 次が成り立つ:

任意の $x \in X$ に対して

$$\lim_{\pi} |x_n - x| \geq \lim_{\pi} |x_n - a|$$

ただし a は任意の $y \in X^*$ に対して

$$\lim_n \langle x_n - a, y \rangle = 0 \text{ をみたす点とする。}$$

例えば ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) や Hilbert 空間 は性質 (*) をもつ。しかし L^p ($1 \leq p \leq \infty, p \neq 2$) はこの性質 (*) を持たない。([6])

定義 4.2 $s \in [0, T)$, $\lambda \in (0, T-s]$ に対して $x \in R_\lambda(s)$

であることを次で定める:

$h \in (0, T-s-\lambda]$ に対して $x_h \in R(I - \lambda A_h(s+\lambda))$ が存在して

$$\lim_{h \downarrow 0} x_h = x.$$

定義からわかるように $R_\lambda(s) \subset R(I - \lambda A^+(s+\lambda))$ だが s , A^+ が接触条件

(TC) $s \in [0, T)$, $x \in D(s)$ に対して

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} d(R(I - \lambda A^+(s+\lambda)), x) = 0$$

をみたせば次の (DC) が成り立つ:

(DC) $s \in [0, T)$, $x \in D(s)$ に対して

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} d(R_\lambda(s), x) = 0$$

定理 4.3 $(X, \|\cdot\|)$ は 性質 (*) をもち、ノルムが一様に Gateaux 微分可能な回帰的 Banach 空間であるとする。 U をクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素とし、 A^+ を U の g.i.g.、各 $s \in [0, T]$ に対して $D(s)$ は閉凸であるとする。このとき (DC) から (TC) が導かれる。

注意 定理 4.3 の仮定に加えてさらに条件

(4.3) $t_n \in (0, T]$, $x_n \in D(A^+(t_n))$, $t_n \downarrow t \in [0, T]$, $x_n \rightarrow x \in X$ ならば $x \in \overline{D(A^+(t))}$ が成り立てば、 $\overline{D(A^+(t))} = D(t)$ が得られる。

条件 (DC) が成り立つための十分条件について考える。(DC) を書き換えると次のようになる:

(DC) 任意の $s \in [0, T]$, $x \in D(s)$, $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\lambda \in (0, \varepsilon]$ と $h(\lambda) \in (0, T-s-\lambda)$ および $y_2 \in X$ が存在して次の3条件をみたす。

$$(4.4) \quad \|y_2 - x\| < \lambda \varepsilon.$$

$$(4.5) \quad \text{各 } h \in (0, h(\lambda)] \text{ に対して } y_{2h} \in X \text{ が存在して } \lim_{h \downarrow 0} y_{2h} = y_2.$$

$$(4.6) \quad \text{各 } h \in (0, h(\lambda)] \text{ に対して } x_{2h} \in D(s+\lambda) \text{ が存在して}$$

$$x_{2h} - y_{2h} = \lambda A_h(s+\lambda) x_{2h}$$

これより (DC) は方程式 $u - \lambda A_h(s+\lambda) u = x$ が近似的に

解けるための十分条件であることが分かる。

各 $w \in D(st\lambda)$ に対して $\bar{A}_h w = (\lambda+h)^{-1} [h y_{\lambda h} + \lambda U(st\lambda+h, st\lambda)w]$ とおくと (4.6) より、 $x_{\lambda h} = \bar{A}_h x_{\lambda h}$ 。従って $\bar{A}_h$ に不動点が存在するような条件を考えればよい。以下に述べる (D1) ~ (D5) は (DC) が成り立つための十分条件である。

K を X の凸部分集合とし、 $w \in K$ における tangent cone $T_K(w)$ を

$$v \in T_K(w) \iff \liminf_{t \downarrow 0} t^{-1} d(w+tv, K) = 0$$

によって定める。また (E3) より、 $w, \hat{w} \in D(st\lambda)$ に対して

$$\begin{aligned} |\bar{A}_h w - \bar{A}_h \hat{w}| &= \lambda(\lambda+h)^{-1} |U(st\lambda+h, st\lambda)w - U(st\lambda+h, st\lambda)\hat{w}| \\ &\leq \lambda(\lambda+h)^{-1} e^{wh} |w - \hat{w}| \end{aligned}$$

となり、 λ, h を十分小さくとれば $\bar{A}_h$ は縮小写像になる。

(D1) (4.4)、(4.5) から任意の $h \in (0, h(\lambda)]$ と任意の $w \in D(st\lambda)$ に対して

$$y_{\lambda h} \in T_{D(st\lambda)}(w) + (I - \lambda A_h(st\lambda))w$$

(D1) より (DC) が導かれる。実際、 λ, h を十分小さくとって、 $\lambda(\lambda+h)^{-1} e^{wh} < 1$ とすると $\bar{A}_h - \lambda(\lambda+h)^{-1} e^{wh} I$ は $D(st\lambda)$ 上で連続かつ消散的である。(D1) より任意の $w \in D(st\lambda)$ に対して

$(\bar{A}_h - I)w \in T_{D(st\lambda)}(w)$ となり、 $\bar{A}_h - I$ はタイプ $\lambda(\lambda+h)^{-1} e^{wh} - 1$ の半群を生成する。 $\lambda(\lambda+h)^{-1} e^{wh} - 1 < 0$ であり、 $D(st\lambda)$ は閉集合だから、ある $x_{\lambda h} \in D(st\lambda)$ が一意に存在して、 $(\bar{A}_h - I)x_{\lambda h} = 0$ 。

(D2) (4.4), (4.5) から、各 $h \in (0, h_0]$ に対して、 $R(U_{\lambda h}) \subset D(s+\lambda)$.

(D2) を仮定すると縮小写像の原理により、不動点が存在する。

注意 任意の $w \in D(s+\lambda)$ に対して $D(s+\lambda) \subset T_{D(s+\lambda)}(w) + w$ が成り立つので、(D2) の方が (D1) より強い条件である。

(D3) X の閉凸集合 D と関数 $\varphi \in C^1([0, T]; X)$ および関数 $p \in C^1([0, T])$ で $p(\cdot) > 0$ をみたすものが存在して

$$D(s) = p(s) D + \varphi(s) \quad \text{とかけろ。}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき、} \quad y_{\lambda h} &= p(s)^{-1} (p(s+\lambda) - \lambda h^{-1} (p(s+\lambda+h) - p(s+\lambda))) x \\ &\quad + \varphi(s+\lambda) - \varphi(s) - \lambda h^{-1} (\varphi(s+\lambda+h) - \varphi(s+\lambda)) \end{aligned}$$

とおけば、(D2) をみたす。

(D4) 任意の $s \in [0, T)$ に対してある $t_0 \in (s, T]$ が存在して、
 $t \in [s, t_0]$ と $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$\theta D(s) + (1-\theta) D(t) \subset D(\theta s + (1-\theta)t)$$

このとき、 $y_{\lambda h} = x$ とおけば (D2) をみたす。

(D5) $s < t$ のとき $D(s) \subset D(t)$ かつ $x \in D(s)$ に対して,

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d(U(s+h, s)x, D(s)) = 0.$$

Brézis and Browder [2] の結果を用いると、任意の $t \in [S, T]$ に対して、 $R(U(t, s)) \subset D(s)$ となり、 $y_{\lambda, h} = x$ とおけば (D2) を満たす。

L^p ($1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$) は一様に Gâteaux 微分可能なノルムをもつ回帰的 Banach 空間であるが、性質 (*) をもたないために定理 4.3 は適用出来ない。そこで性質 (*) をもつという条件を落とすために領域 D に対し、(DC) よりも強い条件をおく。

(D6) 任意の $s \in [0, T)$, $x \in D(s)$, $\varepsilon > 0$ に対してある $\lambda \in (0, \varepsilon]$ と $h\lambda \in (0, T-s\lambda)$ および $y_{\lambda} \in D(s+\lambda)$ が存在して次の4条件を満たす:

$$(4.7) \quad w \in D(s+\lambda) \text{ に対して } \liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d(U(s+\lambda+h, s+\lambda)w, D(s+\lambda)) = 0.$$

$$(4.8) \quad |y_{\lambda} - x| < \lambda \varepsilon$$

$$(4.9) \quad \text{各 } h \in (0, h\lambda] \text{ に対して } y_{\lambda, h} \in X \text{ が存在して } \lim_{h \downarrow 0} y_{\lambda, h} = y_{\lambda}.$$

$$(4.10) \quad \text{各 } h \in (0, h\lambda] \text{ に対して } x_{2, h} \in D(s+\lambda) \text{ が存在して}$$

$$x_{2, h} - y_{\lambda, h} = \lambda A_h(s+\lambda) x_{2, h}.$$

明らかに (D5) ならば (D6) が成り立つ。

定理 4.4 $(X, \|\cdot\|)$ は一様に Gâteaux 微分可能なノルムをもつ回帰的 Banach であるとする。 $\mathcal{U}$ をクラス $E(\mathcal{D}, w, f)$ の発展作用素とし、 A^+ を $\mathcal{U}$ の g.i.g.、各 $s \in [0, T]$ に対して (D5) は閉凸であるとする。このとき (D6) から (TC) が導かれる。さらに、条件 (4.3) が成り立てば $\overline{D(A^+(t))} = D(t)$ が得られる。

定理 4.3、および定理 4.4、を証明するために次の2つの結果を用いる。

補題 4.5
$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \left(\limsup_{h \downarrow 0} |x_{2h} - x| \right) = 0$$

補題 4.6 定理 4.3、又は定理 4.4. の仮定の下で極限

$$x_2 \equiv \lim_{h \downarrow 0} x_{2h} \quad \text{が存在する。}$$

定理 4.3、および定理 4.4. の証明、

(4.6) または (4.10) より、 $x_{2h} - y_{\lambda h} = \lambda A_h(s+\lambda) x_{2h}$ とかける。
 $h \downarrow 0$ とすれば定義より補題 4.6. により、 $x_{2h} \in D(s+\lambda)$ が存在して、

$$x_2 - y_\lambda \in \lambda A^+(s+\lambda) x_2$$

が成り立つ。 $z_\lambda = A^+(y_\lambda - x)$ とおくと、 $|z_\lambda| < \varepsilon$ が

$(I - \lambda A_h^{(s+\lambda)})x_2 - x = \lambda z_\lambda$ となり (TC) が導かれる。

証明終

5. $u - \lambda A_h(t+\lambda)u = x$ の近似解 x_{2h} .

この節では $u - \lambda A_h(t+\lambda)u = x$ の近似解を考えよう立場から、
補題 4.5. および補題 4.6. を証明する。

補題 4.5. の証明

$h \in (0, h_0]$ をとり、 n を $nh \in (0, T-S]$ をみたす自然数とする。

$k = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$P_{2h}(k) = U(kh+S, S)x - x_{2h}$$

$$P_h(k) = U(kh+S, S)x - x$$

$$Y_h(k) = \int_0^h e^{\omega(h-\beta)} f(\beta + (k-1)h+S, \beta+S+\lambda) d\beta$$

$$z_{\lambda, h} = \lambda^{-1}(y_{\lambda, h} - x), \quad z_\lambda = \lambda^{-1}(y_\lambda - x)$$

とおくと補題 3.3. により、次が成り立つ：

$$(5.1) \quad |P_{2h}(n)| - |P_{2h}(0)| \\ \leq h \sum_{k=1}^n ([P_{2h}(k), A_h(s+\lambda)x_{2h}]_+ + h(e^{\omega h} - 1)|P_{2h}(k-1)| + \sum_{k=1}^n Y_h(k)).$$

$[\cdot, \cdot]_+$ の性質と三角不等式から (5.2) ~ (5.4) が得られる。

$$(5.2) \quad [P_{2h}(k), A_h(s+\lambda)x_{2h}]_+ \leq \lambda^{-1}(2|P_h(k)| - |P_{2h}(0)| + \lambda|z_{\lambda, h}|)$$

$$(5.3) \quad |P_{2h}(n)| - |P_{2h}(0)| \geq -|P_h(n)|$$

$$(5.4) \quad |P_{2h}(k)| \leq |P_h(k)| + |P_{2h}(0)|$$

また、 f は連続だからある $M > 0$ が存在して、 $s, t \in [0, T]$ に対して $f(s, t) \leq M$ が成り立つ。これより

$$(5.5) \quad Y_h(k) \leq h e^{\omega^+ h} M \quad (\text{ただし } \omega^+ = \max(0, \omega))$$

(5.1) に (5.2) ~ (5.5) を代入して整理すると次が得られる。

$$(1-\lambda h^t(e^{w_h}-1)) |p_h(0)|$$

$$\leq \lambda(nh)^{-1} |p_h(n)| + 2(nh)^{-1} \sum_{k=1}^n h |p_h(k)| + \lambda(nh)^{-1} \sum_{k=1}^n h(e^{w_h}-1) |p_h(k-1)| h + \lambda(e^{w_h} M + |z_h|)$$

ここで $h \downarrow 0$, $nh \uparrow t$ とすれば、

$$(1-\lambda\omega) \limsup_{h \downarrow 0} |x_{2,h} - x|$$

$$\leq \lambda t^{-1} |U(t+s, s)x - x| + 2t^{-1} \int_0^t |U(t+s, s)x - x| d\zeta + \lambda\omega t^{-1} \int_0^t |U(t+s, s)x - x| d\zeta + \lambda(M + |z|)$$

と $\lambda \downarrow 0$ とし、

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \left(\limsup_{h \downarrow 0} |x_{2,h} - x| \right) \leq 2t^{-1} \int_0^t |U(t+s, s)x - x| d\zeta$$

$t \downarrow 0$ とすれば求める結論を得る。

証明終

補題 4.6 の証明

$(0, h\omega]$ において 0 に収束する列 $\{h\omega\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとり固定する。

補題 4.5 により、 $\{x_{2,h\omega}\}_{n=1}^{\infty}$ は $D(\mathfrak{A})$ における有界列になっている。次に N 上の超フィルター π を 1 つとり固定する。 $x \in X$ に対して、

$$\Phi(x) = \lim_{\pi} |x_{2,h\omega} - x|^2, \quad \Psi(x) = \lim_{\pi} |x_{2,h\omega} - x|$$

とおくと Φ, Ψ は X 上で凸で連続な汎関数であり、 X が一様に Gateaux 微分可能なノルムをもつことから Φ は X 上 Gateaux 微分可能となる。定理 4.3 の場合は X が性質 (B) をもつ回帰的な Banach 空間、 $D(\mathfrak{A})$ が閉凸、および Φ が coercive 条件を満たすことから $\Phi(x_0) = \inf_{x \in X} \Phi(x)$ をみたす $x_0 \in D(\mathfrak{A})$ が存在する。定理 4.4 の場合も同様に $\Phi(x_0) = \inf_{x \in D(\mathfrak{A})} \Phi(x)$ をみたす $x_0 \in D(\mathfrak{A})$ が存在する。

先ず $\Phi(x_0) = 0$ を示す。これが示されれば、フィルター極限の

性質 (4.2) から $\liminf_{n \rightarrow \infty} |x_{\lambda, h(n)} - x|^2 = 0$ となり、部分列をとれば x に収束することから分かる。そこで x_λ から $\{h(n)\}_{n=1}^\infty$ のとり方によらないことが示されれば、補題 4.6. が証明される。

$t \in [0, T)$, $h \in (0, h(\omega)]$ を $t+h+s+\lambda \in [0, T]$ を満たす t のとし、 $x \in D(\delta + \lambda)$ とする。

$$(5.6) \quad P_h(t) = x_{\lambda, h} - U(t+s+\lambda, s+\lambda)x$$

$$(5.7) \quad Q_h(t) = y_{\lambda, h} - U(t+s+\lambda, s+\lambda)x$$

$$(5.8) \quad R_h(t) = h \int_0^h e^{\omega(h-\xi)} f(s+s+\lambda, s+t+s+\lambda) d\xi$$

とおく。関係式 $x_{\lambda, h} = (\lambda + h)^{-1} [h y_{\lambda, h} + \lambda U(t+h+s+\lambda, s+\lambda)x_{\lambda, h}]$ に注意すると次の (5.9) と (5.10) が成り立つことが分かる。

$$(5.9) \quad \begin{aligned} & |x_{\lambda, h} - (\lambda + h)^{-1} [h y_{\lambda, h} + \lambda U(t+h+s+\lambda, s+\lambda)x]| \\ & \leq \lambda (\lambda + h)^{-1} (e^{\omega h} - 1) |P_h(t)| + (1 - h(\lambda + h)^{-1}) |P_h(t)| + \lambda h (\lambda + h)^{-1} |R_h(t)| \end{aligned}$$

$$(5.10) \quad |x_{\lambda, h} - (\lambda + h)^{-1} [h y_{\lambda, h} + \lambda U(t+h+s+\lambda, s+\lambda)x]| = |P_h(t+h) - h(\lambda + h)^{-1} Q_h(t+h)|$$

(5.9) と (5.10) より次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda h^{-1}(e^{\omega h} - 1)) |P_h(t)| \\ & \leq h^{-1} (\lambda + h) [|P_h(t)| - |P_h(t+h) - h(\lambda + h)^{-1} Q_h(t+h)|] + \lambda R_h(t) \end{aligned}$$

この式の両辺に $|P_h(t)| + \lambda h (\lambda + h)^{-1} R_h(t)$ をかけて関係式

$$|P_h(t+h) - \lambda (\lambda + h)^{-1} Q_h(t+h)| \leq |P_h(t)| + \lambda h (\lambda + h)^{-1} R_h(t)$$

を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} & a(h) |P_h(t)|^2 \\ & \leq h^{-1} (\lambda + h) (|P_h(t+h)|^2 - |P_h(t+h) - h(\lambda + h)^{-1} Q_h(t+h)|^2) + h^{-1} (\lambda + h) (|P_h(t)|^2 - |P_h(t+h)|^2) \\ & \quad + b(h) |P_h(t)| \cdot R_h(t) + c(h) \cdot R_h^2(t) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$a(h) = 1 - \lambda h^1 (e^{\omega h} - 1)$$

$$b(h) = \lambda (\lambda + h + \lambda e^{\omega h}) (\lambda + h)^{-1}$$

$$c(h) = \lambda^2 h (\lambda + h)^{-1}$$

とおいた。これより任意の $\theta > 0$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & a(h) |P_h(t)|^2 \\ & \leq \theta^{-1} (|P_h(t+h) + \theta Q_h(t+h)|^2 - |P_h(t+h)|^2) + h^1 (\lambda + h) (|P_h(t)|^2 - |P_h(t+h)|^2) \\ & \quad + b(h) |P_h(t)| \cdot R_h(t) + c(h) \cdot R_h^2(t) \end{aligned}$$

両辺を $[0, \alpha]$ 上で t で積分して α で割ると、

$$\begin{aligned} (5.11) \quad & a(h) \alpha^{-1} \int_0^\alpha |P_h(t)|^2 dt \\ & \leq (\alpha \theta)^{-1} \int_\alpha^{\alpha+h} (|P_h(t) + \theta Q_h(t)|^2 - |P_h(t)|^2) dt \\ & \quad + (\lambda + h) (\alpha h)^{-1} \left(\int_0^h |P_h(t)|^2 dt - \int_\alpha^{\alpha+h} |P_h(t)|^2 dt \right) \\ & \quad + b(h) \alpha^{-1} \int_0^\alpha |P_h(t)| \cdot R_h(t) dt + c(h) \alpha^{-1} \int_0^\alpha R_h^2(t) dt \end{aligned}$$

(5.6)、(5.7)、(5.8) より $P_h(t)$ 、 $Q_h(t)$ 、 $R_h(t)$ は t の連続関数だから

$\gamma(t) = U(t+s+\lambda, s+\lambda) \hat{x}$ とおけば、次が成り立つ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{h(n)}(t)|^2 = \Phi(\gamma(t))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{h(n)}(t) + \theta Q_{h(n)}(t)|^2 = \Phi(\gamma(t) - \theta(\lambda - \gamma(t)))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(h(n)^{-1} \int_0^{h(n)} |P_{h(n)}(t)|^2 dt \right) = \Phi(\hat{x})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(h(n)^{-1} \int_\alpha^{\alpha+h(n)} |P_{h(n)}(t)|^2 dt \right) = \Phi(\gamma(\alpha))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_h(t) = f(s+\lambda, t+s+\lambda)$$

また、 $\lim_{h \rightarrow 0} a(h) = 1 - \lambda \omega$ 、 $\lim_{h \rightarrow 0} b(h) = 2\lambda$ 、 $\lim_{h \rightarrow 0} c(h) = 0$

以上のことから (5.11) で $h=h(n)$ とおいてフィルター極限をとると、

$$(5.12) \quad \begin{aligned} & (1-\lambda\omega)\alpha^{-1} \int_0^\alpha \Phi(\eta(t)) dt \\ & \leq (\alpha\theta)^{-1} \int_0^\alpha \left(\Phi(\eta(t) - \theta(y_\lambda - \eta(t))) - \Phi(\eta(t)) \right) dt \\ & \quad + \lambda\alpha^{-1} (\Phi(x) - \Phi(\eta(\omega))) + 2\lambda\alpha^{-1} \int_0^\alpha \bar{\Psi}(\eta(t)) f(s+\lambda, t+s+\lambda) dt \end{aligned}$$

ここで $x = x_\lambda$ とすると定理 4.3 の場合は、 x_λ は $\Phi(x)$ を X 上で最小にする点だから (5.12) の右辺第 2 項 ≤ 0 。従って、

$$(5.13) \quad \begin{aligned} & (1-\lambda\omega)\alpha^{-1} \int_0^\alpha \Phi(\eta(t)) dt \\ & \leq (\alpha\theta)^{-1} \int_0^\alpha \left(\Phi(\eta(t) - \theta(y_\lambda - \eta(t))) - \Phi(\eta(t)) \right) dt \\ & \quad + 2\lambda\alpha^{-1} \int_0^\alpha \bar{\Psi}(\eta(t)) f(s+\lambda, t+s+\lambda) dt \end{aligned}$$

が成り立つ。定理 4.4 の場合には、(4.7) より 0 に収束する正数列 $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty$ と $x_{\alpha_m} \in D(s+\lambda)$ が存在して、

$$\eta(x_m) = U(\alpha_m + s + \lambda, s + \lambda) x_\lambda = x_{\alpha_m} + \alpha_m \cdot o(1)$$

とかけると、 $|x_{2h} - x_{\alpha_m}| \leq |x_{2h} - \eta(x_m)| + |\eta(x_m) - x_{\alpha_m}|$ より、

$$\bar{\Psi}(x_{\alpha_m}) \leq \bar{\Psi}(\eta(x_m)) + \alpha_m \cdot o(1) \quad \text{となること、及び } x_\lambda \text{ は } D(s+\lambda)$$

上で $\Phi(x)$ を最小にする点であることを注意すると、

$$\begin{aligned} (5.12) \text{ の右辺第 2 項} & \leq \lambda (\bar{\Psi}(x_\lambda) + \bar{\Psi}(\eta(x_m))) \cdot \alpha_m^{-1} (\bar{\Psi}(x_\lambda) - \bar{\Psi}(\eta(x_m))) \\ & \leq \lambda (\bar{\Psi}(x_\lambda) + \bar{\Psi}(\eta(x_m))) \cdot (\alpha_m^{-1} [\bar{\Psi}(x_\lambda) - \bar{\Psi}(x_{\alpha_m})] + o(1)) \\ & \leq \lambda (\bar{\Psi}(x_\lambda) + \bar{\Psi}(\eta(x_m))) \cdot o(1) \end{aligned}$$

が得られる。従って (5.12) で $\alpha = \alpha_m$ として次の (5.14) が成り立つ。

$$(5.14) \quad \begin{aligned} & (1-\lambda\omega)\alpha_m^{-1} \int_0^{\alpha_m} \Phi(\eta(t)) dt \\ & \leq (\alpha_m\theta)^{-1} \int_0^{\alpha_m} \left(\Phi(\eta(t) - \theta(y_\lambda - \eta(t))) - \Phi(\eta(t)) \right) dt \end{aligned}$$

$$+ 2\lambda \alpha_m^{-1} (\bar{\Psi}(x_\lambda) + \bar{\Psi}(\gamma(\alpha_m))) + 2\lambda \alpha_m^{-1} \int_0^{\alpha_m} \bar{\Psi}(\gamma(t)) f(s+\lambda, t+s+\lambda) dt$$

(5.13) で $\alpha \downarrow 0$ 、(5.14) で $m \rightarrow \infty$ とすれば、

$$(1-\lambda\omega)\Phi(x_\lambda) \leq \theta^{-1}(\Phi(x_\lambda + \theta(x_\lambda - y_\lambda)) - \Phi(x_\lambda))$$

さらに $\theta \downarrow 0$ として、

$$(1-\lambda\omega)\Phi(x_\lambda) \leq \Phi'(x_\lambda, x_\lambda - y_\lambda)$$

が成り立つ。仮定より Φ は Gateaux 微分可能であるから

$$\begin{aligned} \Phi'(x_\lambda, x_\lambda - y_\lambda) &= \lim_{\theta \downarrow 0} \theta^{-1}(\Phi(x_\lambda + \theta(x_\lambda - y_\lambda)) - \Phi(x_\lambda)) \\ &= \lim_{\theta \downarrow 0} \theta^{-1}(\Phi(x_\lambda) - \Phi(x_\lambda + \theta(y_\lambda - x_\lambda))) \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $\Phi(x_\lambda) = 0$ が示された。

最後に x_λ が 0 に収束する数列 $\{h(n)\}_{n=1}^\infty$ のとり方によらないことを示す。

$\{h(n)\}_{n=1}^\infty, \{\hat{h}(n)\}_{n=1}^\infty$ を 0 に収束する 2 つの数列とし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_\lambda h(n) = x_\lambda$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_\lambda \hat{h}(n) = \hat{x}_\lambda$ と仮定する。(5.11) で $h = h(n)$ とおいて $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} (5.15) \quad & (1-\lambda\omega)\alpha^{-1} \int_0^\alpha |P_0(t)|^2 dt \\ & \leq (\alpha\theta)^{-1} \int_0^\alpha (|P_0(\theta + \theta Q_0(t))|^2 - |P_0(t)|^2) dt + \lambda\alpha^{-1} (|x_\lambda - \hat{x}|^2 - |P_0(\alpha)|^2) \\ & \quad + 2\lambda\alpha^{-1} \int_0^\alpha |P_0(t)| f(s+\lambda, t+s+\lambda) dt \end{aligned}$$

ここで、 $P_0(t) = x_\lambda - U(t+s+\lambda, s+\lambda)\hat{x}$

$$Q_0(t) = \hat{x}_\lambda - U(t+s+\lambda, s+\lambda)\hat{x}$$

とおいた。また、関係式

$$\begin{aligned} |x_\lambda - \hat{x}|^2 - |P_0(\alpha)|^2 &= |x_\lambda - \hat{x}|^2 - |x_\lambda - U(\alpha+s+\lambda, s+\lambda)\hat{x}|^2 \\ &= |x_\lambda - \hat{x}|^2 - |x_\lambda - \hat{x} - \alpha A_\alpha(s+\lambda)\hat{x}|^2 \end{aligned}$$

を (5.15) に適用すると次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & (1-\lambda\omega) \alpha^{-1} \int_0^\alpha |P_0(t)|^2 dt \\ & \leq (\alpha\theta)^{-1} \int_0^\alpha (|P_0(t) + \theta Q_0(t)|^2 - |P_0(t)|^2) dt \\ & \quad + \theta^{-1} (|x_\lambda - \hat{x} + \theta \lambda A_{k(n)}(s+\lambda) \hat{x}|^2 - |x_\lambda - y_\lambda|^2) + 2\lambda \alpha^{-1} \int_0^\alpha |P_0(t)| f(s+\lambda, t+s+\lambda) dt \end{aligned}$$

ここで $\alpha = h'(n)$, $\hat{x} = x_{\lambda, h'(n)}$ とおいて $\lambda A_{h'(n)}(s+\lambda) x_{\lambda, h'(n)} = x_{\lambda, h'(n)} - y_{\lambda, h'(n)}$ に注意すると.

$$\begin{aligned} & (1-\lambda\omega) (h'(n))^{-1} \int_0^{h'(n)} |P_0(t)|^2 dt \\ & \leq (\theta h'(n))^{-1} \int_0^{h'(n)} (|P_0(t) + \theta Q_0(t)|^2 - |P_0(t)|^2) dt \\ & \quad + \theta^{-1} (|x_\lambda - x_{\lambda, h'(n)} + \theta (x_{\lambda, h'(n)} - y_{\lambda, h'(n)})|^2 - |x_\lambda - x_{\lambda, h'(n)}|^2) \\ & \quad + 2\lambda (h'(n))^{-1} \int_0^{h'(n)} |P_0(t)| f(s+\lambda, t+s+\lambda) dt \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば.

$$\begin{aligned} & (1-\lambda\omega) |x_\lambda - \hat{x}_\lambda|^2 \\ & \leq \theta^{-1} (|x_\lambda - \hat{x}_\lambda + \theta (y_\lambda - \hat{x}_\lambda)|^2 - |x_\lambda - \hat{x}_\lambda|^2) \\ & \quad + \theta^{-1} (|x_\lambda - \hat{x}_\lambda + \theta (\hat{x}_\lambda - y_\lambda)|^2 - |x_\lambda - \hat{x}_\lambda|^2) \end{aligned}$$

が得られる。ノルムが Gateaux 微分可能であるからして.

$\theta \downarrow 0$ として.

$$(1-\lambda\omega) |x_\lambda - \hat{x}_\lambda|^2 \leq (x_\lambda - \hat{x}_\lambda, y_\lambda - \hat{x}_\lambda)_+ - (x_\lambda - \hat{x}_\lambda, y_\lambda - \hat{x}_\lambda)_- = 0$$

ただし、 $(x, y)_\pm = |x| [x, y]_\pm$.

従って $x_\lambda = \hat{x}_\lambda$ となり、補題 4.6 は証明された。

証明終.

6. 注意

(1) 3節で導入した g.i.g. $A^+(s)$ は右微分係数を拡張したものであったが、左微分係数の拡張 $A^-(s)$ も定義出来て、 $A^+(s)$ と類似の結果が成り立つ。

(2) この研究報告を書いている隙中に、定理 4.4 においては、条件 (4.3) は別の方法を用いれば取り除けることが分かった。

文献

- [1] J.B. Baillon, *Générateurs et semi-groupes dans les de Banach uniformément lissés*, J. Funct. Anal., 29 (1978), 199-213.
- [2] H. Brézis and F.E. Browder, *A general principle on ordered set in nonlinear functional analysis*, Advances in Math., 21 (1976), 355-364.
- [3] M.G. Crandall and A. Pazy, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, Israel J. Math., 11 (1972), 57-94.
- [4] L.C. Evans, *Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space*, Israel J. Math., 26 (1977), 1-42.
- [5] I. Hada, K. Hashimoto and S. Oharu, *On the duality mapping of ℓ^∞* , Tokyo J. Math., 2 (1979), 71-97.
- [6] K. Hashimoto, *Asymptotic means of bounded sequences in Banach spaces*, in preparation.

- [7] T. Iwamiya, S. Oharu and T. Takahashi, On the class of nonlinear evolution operators in Banach space, *Nonlinear Analysis, T. M. A.*, 10 (1986), 315-337.
- [8] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (1967), 508-520.
- [9] Y. Kobayashi, Product formula for nonlinear contraction semigroups in Banach spaces, *Hiroshima Math. J.*, 17 (1987), 129-140.
- [10] Y. Kobayashi and S. Oharu, Semigroups of locally Lipschitzian operators in Banach spaces, in preparation.
- [11] K. Kobayasi, Y. Kobayashi and S. Oharu, Nonlinear evolution operators in Banach spaces, *Osaka J. Math.*, 21 (1984), 281-310.
- [12] Y. Kōmura, Differentiability of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Japan*, 21 (1969), 375-402.
- [13] N. H. Pavel, Nonlinear evolution equations governed by f -quasi-dissipative operators, *Nonlinear Analysis, T. M. A.*, 5 (1981), 449-468.
- [14] S. Reich, Nonlinear semigroups, holomorphic mappings and integral equations, *Proc. Symp. in Pure Math.*, 43, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1986.
- [15] K. Yosida and E. Hewitt, Finitely additive measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 46-66.