

ergodic 変換の normalizer の outer conjugacy

九大 教養 押川元重

1. von Neumann algebra およびその上の automorphism の理論と密接に関連した 測度空間上の変換の理論をのべる。測度空間上の変換に関する定義よりはじめる。

定義. σ 有限測度空間 (Ω, P) から σ 有限測度空間 (Ω', P') 上への 1 対 1 で両可測な写像 φ が non-singularity property " $P(A)=0$ if and only if $P'(\varphi A)=0$ " をみたすとき, isomorphism とよび, このときこれら 2 つの測度空間は isomorphic であるということにする。

定義. 実数直線 R およびその上のルベーク測度からなる測度空間 (R, du) と isomorphic な σ 有限測度空間を Lebesgue space とよぶことにする。

定義. σ 有限測度空間 (Ω, P) からその上への isomorphism T を automorphism とよぶことにする。 (Ω, P) 上の automorphism からなる一全数群 $\{T_s, -\infty < s < \infty\}$ が

$T_t T_s = T_{t+s}$ をみたし、かつ $(\omega, s) \rightarrow T_s \omega$ が可測写像であるとき、flow とよぶことにする。

定義. automorphism T (または flow $\{T_s\}$) が ergodic であるとは、 T 不変可測関数: $f(T\omega) = f(\omega)$ ($\{T_s\}$ 不変可測関数: $f(T_s \omega) = f(\omega)$) は定数関数に限ることである。

定義. automorphism T と T' (flow $\{T_s\}$ と $\{T'_s\}$) が 同型 であるとは、 (Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で $T'\varphi\omega = \varphi T\omega$ ($T'_s\varphi\omega = \varphi T_s\omega$) をみたすものが存在することである。

2. ergodic 変換の弱同値.

定義. (Ω, P) 上の automorphism T について、 $\{T^n \omega; n \in \mathbb{Z}\}$ を ω の T 軌道 とよび、 $\text{Orb}_T(\omega)$ と表わすことにする。

automorphism T と T' が 弱同値 であるとは、 (Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で、 $\varphi \text{Orb}_T(\omega) = \text{Orb}_{T'}(\varphi\omega)$ をみたすものが存在することである。

Lebesgue space (Ω, P) 上の ergodic automorphism T に対して、直積空間 $(\Omega \times \mathbb{R}, P \times du)$ 上の automorphism $\tilde{T}$ を次のように定める。 $\tilde{T}(\omega, u) = (T\omega, u - \log \frac{dPT}{dP}(\omega))$ 。
このとき、 $(\Omega \times \mathbb{R}, P \times du)$ から Lebesgue space (X, m) 上への可測写像で次の (1)(2)(3) をみたすものが存在する。

(1) Π は non-singular property をみたす。

(2) π は $\tilde{T}$ 不変である。すなわち $\pi \tilde{T}(\omega, u) = \pi(\omega, u)$ 。

(3) $\tilde{T}$ 不変可測関数 $f(\omega, u)$ は $\pi(\omega, u)$ の関数とみなせる。
 このような π は次の意味で一意的に存在する: π' および (X', m') を同様のものとすれば, (X, m) から (X', m') への isomorphism φ で $\varphi \pi \omega = \pi' \omega$ をみたすものが存在する。 X は全ての $\tilde{T}$ ergodic 成分からなる空間とみなせばよい。

$(\Omega \times \mathbb{R}, P \times du)$ 上の flow $T_s(\omega, u) = (\omega, u+s)$, $-\infty < s < \infty$ を考えると, $\{T_s\}$ は $\tilde{T}$ と可換であるから, $(\{T_s\})$ の π による像として X 上の ergodic flow $\{A_s\}$ で $A_s \pi(\omega, u) = \pi T_s(\omega, u)$ をみたすものが定まる。 $\{A_s\}$ のことを T の associated flow とよぶことにする。これは ergodic automorphism の弱同値に関する不変量になっている。[4]

定義. ergodic automorphism T をその associated flow $\{A_s\}$ により次のように分類する。 $\{A_s\}$ が $\mathbb{R}$ 上の translation: $u \rightarrow u+s$ と同型るとき, T は II 型という。II 型でないときを III 型という。 $\{A_s\}$ が区間 $[0, \log \frac{1}{\lambda})$ 上の translation: $u \rightarrow u+s \pmod{\log \frac{1}{\lambda}}$ (ただし $0 < \lambda < 1$) と同型るとき, T は III_λ 型という。 $\{A_s\}$ が一点集合上の trivial flow であるとき, T は III_1 型という。 $\{A_s\}$ が非周期的かつ再帰的な ergodic flow であるとき, T は III_0 型という。

W. Krieger は associated flow が Lebesgue space 上の

Ⅲ型の automorphism の弱同値類から Lebesgue space 上の再帰的 ergodic flow の同型類の上への 1対1 対応を与えることを示した。[6]

ここで von Neumann algebra の理論との関係をのべる。ergodic automorphism T から measure space construction によって factor $M(T)$ がつくられる。 T の型は $M(T)$ の型に対応しているし、 T の associated flow は Connes-Takesaki [3] の flow of weight に対応している。さらに Connes の結果 ([1] 等) によると、Ⅲ型をのぞいた (未解決!) hyperfinite factor は Lebesgue space 上の ergodic automorphism からつくられる factor と $*$ -isomorphic である。従って hyperfinite factor を考える限り ergodic automorphism からつくられた factor を考えれば充分ということになる。

3. normalizer の outer conjugacy.

定義. (Ω, P) 上の ergodic automorphism T に対して、同じ測度空間上の automorphism R が $RCoh_T(\omega) = Coh_T(R\omega)$ をみたすとき、 R を T の normalizer といい、 T の normalizer の全体のなす群を $N[T]$ で表わすことにする。

定義. $R \in N[T]$ と $R' \in N[T']$ が outer conjugate であるとは (Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で $\varphi Coh_T(\omega) = Coh_{T'}(\varphi\omega)$ かつ $\varphi R Coh_T(\omega) = R' Coh_{T'}(\varphi\omega)$

をみたすものが存在することである。

定義. $R \in N[T]$ および自然数 n について,

$$R^i \text{Orb}_T(\omega) \cap \text{Orb}_T(\omega) = \emptyset \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \text{ かつ}$$

$R^n \text{Orb}_T(\omega) = \text{Orb}_T(\omega)$ をみたすとき, R は outer period n をもつという。またこのような n が存在しないとき, R は outer aperiodic であるという。 T の outer period 1 の normalizer の全体を $[T]$ で表わし, $[T]$ の元を inner normalizer という。

(Ω, P) 上の $R \in N[T]$ に対して, $\Omega \times R$ 上の automorphism $\tilde{R} : \tilde{R}(\omega, u) = (\omega, u - \log \frac{dPR}{dP}(\omega))$ を考える。 $\tilde{R}$ は $\tilde{T}$ の normalizer になっていることより, $(\tilde{R}$ の π による像として) X 上の automorphism S で $S\pi(\omega, u) = \pi\tilde{R}(\omega, u)$ をみたすものが存在する。 $\tilde{R}$ と $\{T_s\}$ は可換だから, S と $\{A_s\}$ は可換である。 S のことを mod R と表わすことにする。

normalizer の outer period と mod は outer conjugacy の不変量になっている。 Connes-Krieger [2] はさしに II 型の場合について, これらが完全不変量であることを示した。

確率分布 $\{P_0, P_1\}$, $P_0 + P_1 = 1$ を与えた 2 点集合 $\{0, 1\}$ の片側無限直積測度空間 $(\prod_{i=1}^{\infty} \{0, 1\}, \prod_{i=1}^{\infty} \{P_0, P_1\})$ 上で有限 k の座標をかえることによってえられる automorphism の全体から群を $\Gamma(P_0, P_1)$ で表わすことにする。

定理[5]. 任意の ergodic automorphism T と任意の n に対して, T の normalizer R で $\text{mod } R$ は恒等写像でかつ R の outer period が n となるものが存在する.

証明. $(\prod_{i=1}^{\infty} \{0, 1\}, \prod_{i=1}^{\infty} \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})$ 上の変換 σ_n を次で定義する.
 $(\sigma_n w)_i = w_{i+1} \quad (i = ln+1, \dots, ln+l+1) \quad (\sigma_n w)_{ln} = w_{(l-1)n+1}, \quad l=1, 2, \dots$
 σ_n は $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の normalizer でかつ outer period n である.
 Ω の恒等変換と σ_n の直積変換は $\{T^n\} \times \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の normalizer で mod は恒等変換でかつ outer period n である. $\{T^n\} \times \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と T が弱同値であることから結論をえる. 証明終

$N[T]$ に次のような位相を考える. $R_k \in N[T]$ が $k \rightarrow \infty$ で $R \in N[T]$ に収束するとは, $\lim_{k \rightarrow \infty} P(w, R_k^{-1} T R_k w \neq R^{-1} T R w) = 0$ かつ R_k は R に弱収束すること, すなわち任意の可積分関数 $f(w)$ について, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f(R_k w) \frac{dP_{R_k}(w)}{dP} - f(R w) \frac{dP_R(w)}{dP}| dP(w) = 0$ かなりたつことである.

定理[5] $\text{mod } R$ が恒等写像であるための必要十分条件は R が $[T]$ の閉包に属することである.

ergodic flow $\{T_s\}$ に対して, $\{T_s\}$ と可換な automorphism の全体のなす群を $C(T_s)$ で表わすことにする. $C(T_s)$ 上には弱収束の位相を考えることにする.

定理 (Hamachi [4]) III型の automorphism T について mod は $N[T]$ から $C(A_S)$ 上への写像であり, さらに $N[T]/[T]$ と $C(A_S)$ は位相をこめて同型である。

証明. 定理の前半は II_∞ , III_λ ($0 < \lambda < 1$), III 型のときは [5] で証明されたが, III 型を含む一般の形では最近 Hamachi が与えた。ここでは Hamachi のものを少しかえた形で証明する。
 $\log \lambda$ と $\log \eta$ が rationally independent になるような正数 λ, η を考え, 直積変換群 $\Gamma(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}) \times \Gamma(\frac{1}{1+\eta}, \frac{\eta}{1+\eta})$ を G で表わし, 直積測度空間 $(\prod_{i=1}^{\infty} \{0,1\} \times \prod_{i=1}^{\infty} \{0,1\}, \prod_{i=1}^{\infty} \{\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\} \times \prod_{i=1}^{\infty} \{\frac{1}{1+\eta}, \frac{\eta}{1+\eta}\})$ を (W, μ) で表わすことにする。このとき次が成り立つ。

- (i) $\{g \in [G] ; \frac{d\mu_g}{d\mu}(w) = 1\}$ は ergodic である。
- (ii) $\{\frac{d\mu_g}{d\mu}(w) ; w \in W, g \in G\} = \{\lambda^n \eta^m\}$ は $\mathbb{R}$ で稠密である。
- (iii) $g \in G$ に対して, $\tilde{g}(w, u) = (gw, u - \log \frac{d\mu_g}{d\mu}(w))$ で与えられる変換 $\tilde{g}$ の全体 $\tilde{G}$ は ergodic である。

Lebesgue space (X, m) 上の ergodic flow $\{T_s\}$ に対して, $(W \times W \times X \times \mathbb{R}, \mu \times \mu \times m \times e^u du)$ 上の変換 (g, g') ($g, g' \in G$) を $(g, g')(w, w', x, u) = (gw, gw', T_{\log \frac{d\mu_g}{d\mu}(w)} x, u - \log \frac{d\mu_{g'}}{d\mu}(w') - \log \frac{dm T_{\log \frac{d\mu_g}{d\mu}(w)}(x)}{dm})$ で定義し, (g, g') の全体のつくる群を $\tilde{\mathcal{J}}$ で表わすことにする。
 $\pi(w, w', x, u, v) = T_v x$ によって $W \times W \times X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から X 上への写像 π を定義すれば, π は non-singular property をみたし, かつ π は $\tilde{\mathcal{J}}$ 不変である。さらに $f(w, w', x, u, v)$ を $\tilde{\mathcal{J}}$ 不変な関

数とすれば, $f(w, g/w', x, u - \log \frac{d\mu_g}{d\mu}(w), v) = f(w, w', x, u, v)$

だから (iii) より $f(w, w', x, u, v) = f(w, x, v)$ と表わせる。

$\frac{d\mu_g}{d\mu}(w) = 1$ をみたす $g \in [G]$ について, $f(gw, x, v) = f(w, x, v)$

だから (i) より, $f(w, x, v) = f(x, v)$ と表わせる。

$f(T_{\log \frac{d\mu_g}{d\mu}(w)} x, v - \log \frac{d\mu_g}{d\mu}(w)) = f(x, v)$ だから (ii) より

$f(T_s x, v - s) = f(x, v)$ が全ての s についてなりたつ。従

って $f(x, v) = f(T_v x)$ と表わせる。

$U \in C(T_s)$ に対して, $R_U(w, w', x, u) = (w, w', Ux, u - \log \frac{d\mu_U}{d\mu}(x))$

とすれば, $R_U \in N[\tilde{J}]$ かつ $\pi \tilde{R}_U(w, w', x, u, v) = T_v Ux = U \pi(w, w', x, u, v)$ 。

以上より $\tilde{J}$ の associated flow は $\{T_s\}$ で, $\text{mod } R_U = U$ 。 $\tilde{J}$ は 1

つの ergodic automorphism からつくられる群と (弱同型の意味で) みなせるから結論を得る。 証明終

この定理により $N[\tilde{T}]/[\tilde{T}]$ の構造を見るには $C(A_s)$ を調べればよいことになる。最近 Hamachi は次のような結果を得ている。

① $C(T_s)$ が compact になるための必要十分条件は $\{T_s\}$ が有限不変測度をもちかつ純点スペクトルをもつことである。従って $N[\tilde{T}]/[\tilde{T}]$ が compact になるための条件が T の associated flow $\{A_s\}$ の条件で与えられた。

② $C(T_s) = \{T_s\}$ をみたすような ergodic flow $\{T_s\}$ が存在

ある。従って $N[T]/\overline{[T]}$ が R と同型となるような T がある。

③ $C(T_S)$ が非可換群となるような ergodic flow $\{T_S\}$ が存在する。従って $N[T]/\overline{[T]}$ が非可換群となるような T がある。

REFERENCES

1. CONNES, A. : Classification of Injective factors
2. CONNES, A., and KRIEGER, W. : Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness.
3. CONNES, A., and TAKESAKI, M. : The flow of weights of factors of type III. Tohoku Math. J. 29 (1977), 473-575.
4. HAMACHI, T., OKA, Y., and OSIKAWA, M. : Flows associated with Ergodic Non-singular transformation groups. Publ. RIMS 11 (1975), 31-50.
5. HAMACHI, T. and OSIKAWA, M. : Fundamental homomorphism of normalizer group of ergodic transformation. (To appear in Springer Lecture notes, Proceeding of Conference on Ergodic Theory at Oberwolfach in 1978)
6. KRIEGER, W. : On ergodic flows and isomorphism of factors. Math. Ann. 223 (1976), 19-70.