

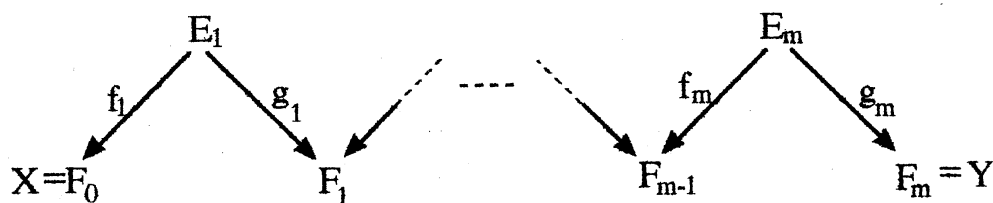
相対 UV^{k+1} 群と写像

知念 直紹 (Naotsugu Chinen)

筑波大学院

0. 序論

ここで扱う空間はすべて、局所コンパクト可分距離空間とし、写像は連続とする。空間 X が *cell-like* あるいは *CE* であるとは、 X をある ANR の部分空間と思って、 X の任意の近傍に対して X はこの近傍の中で可縮になるときにいう。写像 $g: E \rightarrow F$ の各ファイバーが *cell-like* コンパクトのとき、 g を *cell-like* 写像あるいは *CE*-写像という。また空間 X が UV^n であるとは、 X をある ANR の部分空間と思って、 X の任意の近傍 U に対してある X の近傍 V が存在して、 $V \subset U$ であって任意の自然数 $k \leq n$ と k 次元球面 S^k から V への写像は $(k+1)$ 次元球体 D^{k+1} から U への写像に拡張できるときにいう。同様にして UV^n -写像も定義できる。空間 X と Y は ANR、 $f: X \rightarrow Y$ をホモトピー同値写像とする。 f が *simple* ホモトピー同値写像であるとは、ANR Z と *CE*-写像 $g: Z \rightarrow X$, $h: Z \rightarrow Y$ が存在して $f \circ g \sim h$ を満たすときにいう。この定義を *shape* カテゴリーに一般化して、*shape* 同値なコンパクト空間 X と Y が *CE*-同値であるとは、コンパクト空間列 $\{E_i\}_{1 \leq i \leq m}$, $\{F_i\}_{0 \leq i \leq m}$ と *CE*-写像列 $\{f_i: E_i \rightarrow F_{i-1}\}_{1 \leq i \leq m}$, $\{g_i: E_i \rightarrow F_i\}_{1 \leq i \leq m}$ が得られ、 $F_0 = X$, $F_m = Y$ を満たすときにいう。*CE*-写像列の代わりに UV^n -写像列に置き換えたとき、 X と Y が UV^n -同値であるという。



最初に Ferry [Fe2] が S^1 と *shape* 同値なコンパクト空間であって、 S^1 と *CE*-同値でない例をみつけた。しばらくして Daverman と Venema [D-V] が、任意の整数 $n \geq 1$ に対して S^1 と *shape* 同値なコンパクト局所 $(n-2)$ -連結空間であって、 S^1 と UV^{n-1} -同値でない例をみつけた。さらに Mroziak [Mr2] は一般に、任意の局所 $(n+1)$ -連結連続体 X に対して、もし X の基本群が無限ならば、 X と UV^{n+1} -同値でない局所 n -連結連続体を構成した。そのとき彼は *CE*-同値と UV^n -同値の判定をするために、 k -次 *CE*-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$ 、 k -次 UV^n -ホモトピー群 $\pi_k^{(n)}(X)$ を導入した。つまり

定理0.1 任意の *CE*-写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、 f は同型写像 $f_*: \pi_k^{CE}(X) \rightarrow \pi_k^{CE}(Y)$

を導く。さらに、もし f が UV^m -写像ならば、任意の $k \leq n$ に対して f は同型写像 $f_* : \pi_k^{(m)}(X) \rightarrow \pi_k^{(m)}(Y)$ を導く。よって、空間 X と Y が CE-同値 (UV^m -同値) ならば、 $\pi_k^{CE}(X)$ と $\pi_k^{CE}(Y)$ (任意の $k \leq n$ に対して $\pi_k^{(m)}(X)$ と $\pi_k^{(m)}(Y)$) は同型になる。

また k -次ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$ と k -次 UV^m -ホモトピー群 $\pi_k^{(m)}(X)$ は k -次ホモトピー群 $\pi_k(X)$ の拡張になっている。すなわち、

定理0.2 任意の局所 n -連結空間 X 、 $n, m \geq k$ に対して、 k -次ホモトピー群 $\pi_k(X)$ と k -次 UV^m -ホモトピー群 $\pi_k^{(m)}(X)$ と k -次 CE-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$ は同型になる。

実際には自然な準同型写像 $t^{CE} : \pi_k(X) \rightarrow \pi_k^{CE}(X)$ 、 $t^m : \pi_k(X) \rightarrow \pi_k^{(m)}(X)$ が存在して、上述の場合にはこの写像が同型になっている。

一般に UV^m -ホモトピー群と CE-ホモトピー群は計算するのは難しいので、少し計算できるようにしたい。そのために空間対 (X, A) に対して相対 k -次 UV^m -ホモトピー群 $\pi_k^{(m)}(X, A)$ と相対 k -次 CE-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X, A)$ を自然に定義し、完全系列

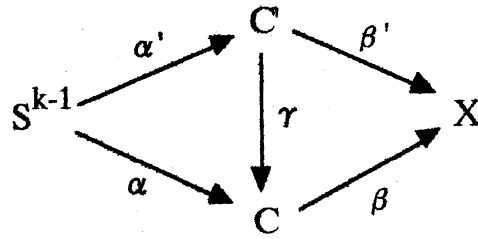
$$\cdots \rightarrow \pi_k^{(m)}(A, x_0) \rightarrow \pi_k^{(m)}(X, x_0) \rightarrow \pi_k^{(m)}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}^{(m)}(A, x_0) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \pi_k^{CE}(A, x_0) \rightarrow \pi_k^{CE}(X, x_0) \rightarrow \pi_k^{CE}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}^{CE}(A, x_0) \rightarrow \cdots$$

得よう。

1. 相対 UV^m -ホモトピー群と相対 CE-ホモトピー群の定義

まず Mrozik が定義した空間 X の k -次 UV^m -ホモトピー群 $\pi_k^{(m)}(X)$ と k -次 CE-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$ を思い出してみよう。 x_0 を基点として選んでおく。任意の自然数 $k \geq 1$ に対して、集合 $UV_k^m(X, x_0)$ を次のように決める。今 C を UV^m コンパクト、 α を $(k-1)$ 次元球面 S^{k-1} から C への、 β を C から X への写像とする。さらに $\beta \circ \alpha(S^{k-1}) = \{x_0\}$ を満たすとする。このとき3つの組 (C, α, β) を Δ と書く。上述の条件を満たす Δ の全体を $UV_k^m(X, x_0)$ とする。次に $UV_k^m(X, x_0)$ に同値関係 $\equiv$ を入れよう。任意の $UV_k^m(X, x_0)$ の2つの元 $\Delta = (C, \alpha, \beta)$ と $\Delta' = (C', \alpha', \beta')$ に対して $\Delta' \geq \Delta$ であるとは、写像 $\gamma : C' \rightarrow C$ が存在して $\gamma \circ \alpha' = \alpha$ と $\beta \circ \gamma = \beta'$ を満たすことをいう。



$UV^m_k(X, x_0)$ の元の列 $\Delta_1 = \Delta, \Delta_2, \dots, \Delta_{2r+1} = \Delta'$ が存在して、任意の $i=1, \dots, r$ に対して $\Delta_{2i} \geq \Delta_{2i+1}$ を満たすとき $\Delta' \equiv \Delta$ と書く。明らかに $\equiv$ は同値関係になっている。

$\pi_k^{(m)}(X, x_0)$ を $UV^m_k(X, x_0)/\equiv$ とする。ホモトピー群 $\pi_k(X, x_0)$ の任意の元は、 k -次元球体 D^k から X への写像 β で $\beta(S^{k-1}) = \{x_0\}$ を満たすものとすれば、そのホモトピー類 $[\beta]$ と表わせる。 $i: S^{k-1} \rightarrow D^k$ を包含写像とすれば、 $\pi_k(X, x_0)$ から $\pi_k^{(m)}(X, x_0)$ への対応 $\imath^m$ が考えられる、すなわち $\imath^m([\beta]) = [D^k, i, \beta]$ 。ここで $[D^k, i, \beta]$ は (D^k, i, β) の同値類とする。またこの対応は定義可能になっていることに注意する。このことから $\pi_k^{(m)}(X, x_0)$ は普通のホモトピー群 $\pi_k(X, x_0)$ の k -次元球体 D^k を UV^m コンパクトに変えてつくったものと思えることができる。

次に $\pi_k^{(m)}(X, x_0)$ に演算をいれたい。しかも $\pi_k(X, x_0)$ の演算の拡張になるように、つまり $\imath^m$ が準同型になるようにしたい。今 $k \geq 2$ とする。写像 $\kappa: S^{k-1} \rightarrow (S^{k-1}, *) \vee (S^{k-1}, *)$ を $\kappa(S^{k-2}) = \{*\}$ とする自然な写像とする。また $\mu: (X, x_0) \vee (X, x_0) \rightarrow X, x \in (X, x_0) \subset (X, x_0) \vee (X, x_0)$ を $x \in X$ に対応させる自然な写像とする。任意の 2 つの元 $[\Delta_1] = [C_1, \alpha_1, \beta_1] \in \pi_k^{(m)}(X, x_0)$ ($i=1, 2$) に対して $[\Delta_1] \parallel [\Delta_2]$ を次のように決める。

$$[\Delta_1] \parallel [\Delta_2] = [(C_1, \alpha_1(*)) \vee (C_2, \alpha_2(*)), (\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \kappa, \mu \circ (\beta_1 \vee \beta_2)]$$

$[\Delta_1] \parallel [\Delta_2]$ は定義可能で、これは群の演算を与える。上述と同様にしてこの演算はホモトピー群の演算を拡張したものになっていることがわかる。 $k=1$ の場合とくわしいことは [Mr2] を参照してほしい。

この章の最後に (X, A, x_0) の相対 UV^m -ホモトピー群 $\pi_k^{(m)}(X, A, x_0)$ を定義しよう。 $\pi_k^{(m)}(X, x_0)$ と同様にして、普通の相対ホモトピー群 $\pi_k(X, A, x_0)$ の拡張になるようにしたい。さらに $\pi_k^{(m)}(X, \{x_0\}, x_0)$ と $\pi_k^{(m)}(X, x_0)$ は同型になるようにもしたい。任意の自然数 $k \geq 1$ に対して、集合 $UV^m_k(X, A, x_0)$ を次のように決める。今 C_X を UV^m コンパクト、 C_A を C_X の空集合でない部分空間で UV^m コンパクトとする。 $\alpha: (D^{k-1}, S^{k-2}) \rightarrow (C_X, C_A)$ と $\beta: (C_X, C_A) \rightarrow (X, A)$ を写像とし $\beta \circ \alpha(D^{k-1}) = \{x_0\}$ を満たすとする。ここで S^{-1} は空集合とする。4 つの組 $(C_X, C_A, \alpha, \beta)$ を Δ と書き、上述の条件を満たす Δ の全体を $UV^m_k(X, A, x_0)$ とする。 $UV^m_k(X, x_0)$ のとき同様にして $UV^m_k(X, A, x_0)$ に同値関係 $\equiv$ を入れる。すなわち任意の $UV^m_k(X, A, x_0)$ の 2 つの元 $\Delta = (C_X, C_A, \alpha, \beta)$ と $\Delta' = (C_X', C_A', \alpha', \beta')$ に対して $\Delta' \geq \Delta$ であるとは、写像 $\gamma: (C_X', C_A') \rightarrow (C_X, C_A)$ が存在

して $\gamma \circ \alpha' = \alpha$ と $\beta \circ \gamma = \beta'$ を満たすことをいう。 $UV^m_k(X, A, x_0)$ の元の列 $\Delta_1 = \Delta, \Delta_2, \dots, \Delta_{2r+1} = \Delta'$ が存在して、任意の $i=1, \dots, r$ に対して $\Delta_{2i} \geq \Delta_{2i+1}$ を満たすとき $\Delta' \equiv \Delta$ と書く。 $\pi_k(X, A, x_0)$ を $UV^m_k(X, A, x_0)/\equiv$ とする。

今 $k \geq 2$ とする。 相対ホモトピー群 $\pi_k(X, A, x_0)$ の任意の元は、 $\beta : (I^k, I^{k-1} \times \{0\}, J_k) \rightarrow (X, A, \{x_0\})$ のホモトピー類 $[\beta]$ と表わせる。 ここで $(I^k, I^{k-1} \times \{0\}, J_k) = ([0, 1]^k, [0, 1]^{k-1} \times \{0\}, ([0, 1]^{k-1} \times \{1\}) \cup (\partial[0, 1]^{k-1} \times [0, 1]))$ とする。 対応 $t_k^m : \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_k^{(m)}(X, A, x_0)$ を $t_k^m([\beta]) = [I^k, I^{k-1} \times \{0\}, \text{incl}, \beta]$ と決める。 ここで $\text{incl} : (D^{k-1}, S^{k-2}) = (J_k, \partial I^{k-1} \times \{0\}) \rightarrow (I^k, I^{k-1} \times \{0\})$ は包含写像とする。 すると t_k^m は定義可能であることがわかる。 同様に $k=1$ のとき t_1^m を定義したい。 $\pi_1(X, A, x_0)$ の任意の元は、 $\beta : (I, \{0, 1\}, \{1\}) \rightarrow (X, A, \{x_0\})$ のホモトピー類 $[\beta]$ と表わせる。 対応 $t_1^m : \pi_1(X, A, x_0) \rightarrow \pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ を $t_1^m([\beta]) = [I, \{0\}, \alpha, \beta]$ と決める。 ここで $\alpha : \{0\} \rightarrow [0, 1]$ は包含写像とする。

次に $\pi_k^{(m)}(X, A, x_0)$ に演算をいれたい。 しかも $\pi_k(X, A, x_0)$ の演算の拡張になるように、つまり m が準同型になるようにしたい。 今 $k \geq 3$ とする。 写像 $\kappa : D^{k-1} \rightarrow (D^{k-1}, *) \vee (D^{k-1}, *)$ を $\kappa(D^{k-2}) = \{*\}$ となる自然な写像とする。 任意の2つの元 $[\Delta_1] = [C_{X,1}, C_{A,1}, \alpha_1, \beta_1] \in \pi_k^{(m)}(X, A, x_0)$ ($i=1, 2$) に対して $[\Delta_1][\Delta_2]$ を次のように決める。

$$[\Delta_1][\Delta_2] = [(C_{X,1}, \alpha_1(*)) \vee (C_{X,2}, \alpha_2(*)), \\ (C_{A,1}, \alpha_1(*)) \vee (C_{A,2}, \alpha_2(*)), \\ (\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \kappa, \mu \circ (\beta_1 \vee \beta_2)]$$

$[\Delta_1][\Delta_2]$ は定義可能で、これは群の演算を与える。 次に $k=2$ とする。 写像 $\kappa : D^1 = [-1, 1] \rightarrow (D^1, *) \vee (D^1, *) = [-1, 1]$ を $\kappa(t) = 2t+1$ ($t \in [-1, 0]$), $\kappa(t) = 2t-1$ ($t \in [0, 1]$) と定義する。 後は $k \geq 3$ のときと同様に $[\Delta_1][\Delta_2]$ を定義することができ、

$\pi_2^{(m)}(X, A, x_0)$ に群の演算を与える。 $k=1$ のときは普通の相対ホモトピー群と同じく一般に群の演算は入らない。

UV^m コンパクト C, C_X と C_A をそれぞれ CE コンパクトに変えれば、同様にして CE -ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X, x_0)$ と相対 CE -ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X, A, x_0)$ が定義できる。

2. UV^m -ホモトピー群と CE -ホモトピー群の完全系列

この章では UV^m -ホモトピー群と CE -ホモトピー群の完全系列を構成しよう。 $\pi : D^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ は $\pi(S^{k-2}) = \{*\}$ を満たす自然な写像とする。 すると任意の写像 $\alpha_X : S^{k-1} \rightarrow C_X$ に対して、 $\alpha_X \circ \pi = \dot{\alpha}$ を満たす写像 $\dot{\alpha} : (D^{k-1}, S^{k-2}) \rightarrow (C_X, \alpha_X(*))$ が得られる。 (X, A) を空間列、 $i : A \rightarrow X$ をその包含写像とする。 今 $k \geq 2$ とし、次の3つの準同型写像を定義しよう。

$$i_{*k} : \pi_k^{(m)}(A, x_0) \rightarrow \pi_k^{(m)}(X, x_0), \quad i_{*k}([C_A, \alpha_A, \beta_A]) = [C_A, \alpha_A, i \circ \beta_A]$$

$$S^{k-1} \xrightarrow{\alpha^A} C_A \xrightarrow{\beta^A} A \xrightarrow{i} X$$

$$\sigma_k : \pi_k^{(m)}(X, x_0) \rightarrow \pi_k^{(m)}(X, A, x_0), \quad \sigma_k([C_X, \alpha_X, \beta_X]) = [C_X, \alpha_X(*), \alpha, \beta_X]$$

$$(D^{k-1}, S^{k-2}) \xrightarrow{\pi} (S^{k-1}, *) \xrightarrow{\alpha^X} (C_X, \alpha_X(*)) \xrightarrow{\beta^X} (X, A)$$

$$\partial_k : \pi_k^{(m)}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}^{(m)}(A, x_0), \quad \partial_k([C_X, C_A, \alpha, \beta]) = [C_A, \alpha | S^{k-2}, \beta | C_A]$$

$$S^{k-2} \xrightarrow{\alpha|} C_A \xrightarrow{\beta|} A$$

とすると、この準同型写像は次の補題を満たす。

補題2.1. 任意の整数 $k \geq 2$ に対して、3つの等式 $\text{Image}(\sigma_k) = \text{Ker}(\partial_k)$ 、 $\text{Image}(i_{*k}) = \text{Ker}(\sigma_k)$ 、 $\text{Image}(\partial_{k+1}) = \text{Ker}(i_{*k})$ が成立する。

$k=1$ のとき、同様にして $i_{*1} : \pi_1^{(m)}(A, x_0) \rightarrow \pi_1^{(m)}(X, x_0)$ は定義でき、 $\sigma_1 : \pi_1^{(m)}(X, x_0) \rightarrow \pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ は次のように決める。任意の写像 $\alpha_X : S^0 \rightarrow C_X$ に対して写像 $\alpha'_X : D^0 \rightarrow C_X$ を $\alpha'_X(D^0) = \alpha_X(\{1\})$ とすれば、 $\pi_1^{(m)}(X, x_0)$ の元 $[C_X, \alpha_X, \beta_X]$ に対して $\sigma_1([C_X, \alpha_X, \beta_X]) = [C_X, \alpha_X(-1), \alpha'_X, \beta_X]$ と定義できる。

$\pi_0^{(m)}(A, x_0)$ と $\pi_0^{(m)}(X, x_0)$ はそれぞれ、 A と X の UV^m 連結成分全体とする（詳しいことは [Mr1] を参照せよ）。 A の UV^m 連結成分 C に対して C を含む X の UV^m 連結成分に対応させる対応を $i_{*0} : \pi_0^{(m)}(A, x_0) \rightarrow \pi_0^{(m)}(X, x_0)$ とする。また $\pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ の元 $[C_X, C_A, \alpha, \beta]$ を $\beta(C_A)$ を含む X の UV^m 連結成分に対応させる対応を $\partial_1 : \pi_1^{(m)}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_0^{(m)}(A, x_0)$ とする。一般に $\pi_0^{(m)}(A, x_0)$ 、 $\pi_0^{(m)}(X, x_0)$ と $\pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ は群ではないので、 x_0 を含む A の UV^m 連結成分を C' 、 x_0 を含む X の UV^m 連結成分を C'' として、

$$\text{Ker}(i_{*0}) = (i_{*0})^{-1}(C''),$$

$$\text{Ker}(\partial_1) = (\partial_1)^{-1}(C')$$

とすると、

補題2.2. $\text{Image}(i_{*1}) = \text{Ker}(\sigma_1)$ 、 $\text{Image}(\sigma_1) = \text{Ker}(\partial_1)$ 、 $\text{Image}(\partial_1) = \text{Ker}(i_{*0})$ 。

が示せる。補題2.1と補題2.2と Mrozik [Mr2] の結果から次の定理が得られる。

定理2.3. 空間対 (X, A) に対して、次の UV^m -ホモトピー群の完全系列が存在する。

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow \pi_{m+1}^{(m)}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial^{m+1}} \pi_m^{(m)}(A, x_0) \xrightarrow{i_*^m} \pi_m^{(m)}(X, x_0) \rightarrow \dots \\
\dots &\rightarrow \pi_k^{(m)}(A, x_0) \xrightarrow{i_*^k} \pi_k^{(m)}(X, x_0) \xrightarrow{\sigma^k} \pi_k^{(m)}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial^k} \pi_{k-1}^{(m)}(A, x_0) \rightarrow \dots \\
\dots &\rightarrow \pi_1^{(m)}(X, x_0) \xrightarrow{\sigma^1} \pi_1^{(m)}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial^1} \pi_0^{(m)}(A, x_0) \xrightarrow{i_*^0} \pi_0^{(m)}(X, x_0)
\end{aligned}$$

同様にしてCE-ホモトピー群に対しても、

定理2.4. 空間対 (X, A) に対して、次の CE-ホモトピー群の完全系列が存在する。

$$\begin{aligned}
\dots &\rightarrow \pi_k^{\text{CE}}(A, x_0) \rightarrow \pi_k^{\text{CE}}(X, x_0) \rightarrow \pi_k^{\text{CE}}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}^{\text{CE}}(A, x_0) \rightarrow \dots \\
\dots &\rightarrow \pi_1^{\text{CE}}(X, x_0) \rightarrow \pi_1^{\text{CE}}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_0^{\text{CE}}(A, x_0) \rightarrow \pi_0^{\text{CE}}(X, x_0).
\end{aligned}$$

が得られる。

3. 応用

Mrozik は [Mr2] の中で $\pi_k^{(m)}(X, x_0) = 1$ ($k > m$) を示した。UV^m-ホモトピー群の完全系列からすぐに

命題3.1. 空間対 (X, A, x_0) 、自然数 m, k に対して、もし $k - m \geq 2$ を満たすならば、 $\pi_k^{(m)}(X, A, x_0) = 1$ 。

がわかる。また (X, A, x_0) を (D^k, S^{k-1}, s_0) とすれば、 $\pi_k^{(k-1)}(X, A, x_0) \neq 1$ がわかる。さらに Venema [Ve] がすべての連続体 X に対して $\pi_k^{(k+1)}(X) = \pi_k^{(k+2)}(X) = \dots = \pi_k^{\text{CE}}(X)$ を示した。よって UV^m-ホモトピー群と CE-ホモトピー群の完全系列を使って、

命題3.2. 空間対 (X, A) 、自然数 k に対して、

$$\pi_k^{(k+1)}(X, A, x_0) = \pi_k^{(k+2)}(X, A, x_0) = \dots = \pi_k^{\text{CE}}(X, A, x_0)$$

を得ることができる。また定理0.2 とホモトピー群と UV^m-ホモトピー群と CE-ホモトピー群の完全系列より、

命題3.3. 任意の局所 n -連結空間対 (X, A, x_0) 、 $n, m \geq k \geq 2$ に対して、 $\pi_k(X, A, x_0)$ と $\pi_k^{(m)}(X, A, x_0)$ と $\pi_k^{\text{CE}}(X, A, x_0)$ は同型になる。 $k=1$ のときは3つの集合 $\pi_1(X, A, x_0)$ と $\pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ と $\pi_1^{\text{CE}}(X, A, x_0)$ は同じものになる。

ある空間 X の k -次 shape 群を $\underline{\pi}_k(X)$ 、 k -次 strong shape 群を $\underline{\pi}_k(X)$ と表わす。連続体 X の $\text{pro-}\pi_1(X)$ が pro-finite であるとは、 X を CW 複体の射影系 $\{K_i, \alpha_i\}$ の射影極限 $\varprojlim (K_i, \alpha_i)$ で表わしたとき、任意の自然数 i に対してある自然数 $j > i$ が存在して、

$\alpha_{i+1} \circ \cdots \circ \alpha_j \cdot (\pi_1(K_j)) \subset \pi_1(K_i)$ が有限のときをいう。

[Ch] の中で $\pi_k^{(k+1)}(X)$ から $\underline{\pi}_k(X)$ への準同型写像 $\underline{s}_k: \pi_k^{(k+1)}(X) \rightarrow \underline{\pi}_k(X)$ が存在することがわかり、

定理3.4. もし連続体 X の $\text{pro-}\pi_1(X)$ が pro-finite ならば、任意の整数 $k \geq 0$ に対して $\underline{s}_k: \pi_k^{(k+1)}(X) \rightarrow \underline{\pi}_k(X)$ は同型写像になる。

同様に、 $\pi_k^{(k)}(X)$ から $\underline{\pi}_k(X)$ への準同型写像 $\underline{s}_k: \pi_k^{(k)}(X) \rightarrow \underline{\pi}_k(X)$ が定義できる。次の可換図

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_k^{(k+1)}(X) & \rightarrow & \pi_k^{(k)}(X) \\
 \downarrow \underline{s}_k & \nearrow & \downarrow \underline{s}_k \\
 & \pi_k(X) & \\
 \downarrow \underline{s}_k & \searrow & \downarrow \underline{s}_k \\
 \underline{\pi}_k(X) & \rightarrow & \underline{\pi}_k(X)
 \end{array}$$

をみれば、 $\pi_k^{(k)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$ 、 $\pi_k^{(k+1)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$ の中間的な群と考えられる。

Chapman と Ferry は [C-F] の中で次の定理を示した。

定理3.5. $p: E \rightarrow B$ を fibration で p の各ファイバーはコンパクト ANR とする。もし B が局所連結ならば、任意の2つのファイバーは simple ホモトピー同値になっている。

E と B はコンパクト ANR とする。写像 $p: E \rightarrow B$ が approximate fibration であるとは、ホモトピー $f: Z \times I \rightarrow B$ と $p \circ F_0 = f|_{Z \times \{0\}}$ を満たす写像 $F_0: Z \rightarrow E$ 、さらに $\varepsilon > 0$ に対して、写像 $F: Z \times I \rightarrow E$ が存在して、 $F_0 = F|_{Z \times \{0\}}$ と $d(p \circ F, f) < \varepsilon$ を満たすときにいう。もし B が弧状連結ならば、 p の任意の2つのファイバーは shape ホモトピー同値になっている。よって自然に次の問題が考えられる。

問題3.6. 写像 $p: E \rightarrow B$ が approximate fibration で B が弧状連結したとき、 p の任意の2つのファイバーは CE-ホモトピー同値あるいは UV^m -ホモトピー同値か？

しかし一般には成立しない。

例3.7. $R = \{(e^{2\pi i t}, e^{\pi i/t}) \in S^1 \times S^1 : t \geq 1\}$ 、 $C = S^1 \times \{1\}$ 、 $X = C \cup R$ とすると、[Fe1] より空間 X は S^1 と shape ホモトピー同値だが CE-ホモトピー同値でないことに注意する。 $S^1 \times S^1$ での X のコンパクト近傍列 $\{U_n: n \text{ は自然数}\}$ で次のことを満たすとする。任意の自然数 n に対して、 U_n と $\text{Cl}(U_{n+1} - U_n)$ と $\text{Cl}(S^1 \times S^1 - U_n)$ は $S^1 \times I$ と同相で、 $U_{n+1} \subset \text{Int } U_n$ 、 $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ 。このコンパクト近傍列 $\{U_n: n \text{ は自然数}\}$ から写像 $p: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ を導くことができる。このとき $p^{-1}(\{1\}) = X$ 、 $p(U_n) = \{e^{\pi i t} : -1/2n \leq t \leq 1/2n\}$ 、 $p|_{S^1 \times S^1 - p^{-1}(\{1\})}: S^1 \times S^1 - p^{-1}(\{1\}) \rightarrow S^1 - \{1\}$ は $S^1 \times (0, 1) = S^1 \times S^1 - p^{-1}(\{1\})$ から $(0, 1) = S^1 - \{1\}$ への射影写像になっている。また写像 p は局所自明なバンドルの極限になっているので、写像 p は approximate fibration である。

$S^1 - \{1\}$ の点 x のファイバーは S^1 だから、 $p^{-1}(\{1\})$ と $p^{-1}(x)$ は CE-ホモトピー同値でない。

写像 $p : E \rightarrow B$ が approximate fibration で p の各ファイバーは連結とする。 b を B の基点として、 $F = p^{-1}(b)$ とおく。 $s : \underline{\pi}_k(F, e) \rightarrow \underline{\pi}_k(F, e)$ を自然な準同型写像とすれば、次のことがすぐにわかる。 $s \circ s_k : \pi_k^{(k+1)}(F, e) \rightarrow \underline{\pi}_k(F, e)$ が同型写像であるための必要十分条件は、 p の CE-ホモトピー完全系列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_k^{CE}(F, e) \rightarrow \pi_k^{CE}(E, e) \rightarrow \pi_k^{CE}(B, b) \rightarrow \pi_{k-1}^{CE}(F, e) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1^{CE}(F, e) \rightarrow \pi_1^{CE}(E, e) \rightarrow \pi_1^{CE}(B, b) \rightarrow \pi_0^{CE}(F, e) \rightarrow \pi_0^{CE}(E, e) \end{aligned}$$

が得られることである。よって例3.7で挙げた写像 $p : E \rightarrow B$ の CE-ホモトピー完全系列は得られないことになる。上述と問題3.6を合わせて考えれば、

問題3.8. 写像 $p : E \rightarrow B$ が approximate fibration とする。もし p の任意の2つのファイバーは CE-ホモトピー同値であれば、 $p : E \rightarrow B$ の CE-ホモトピー完全系列は得られるか？

が考えられる。また

定理3.9. 連続体 X の $\text{pro-}\pi_1(X)$ が pro-finite とする。連続体 Y は X と shape 同値ならば、任意の自然数 n に対して、 Y と X は UV^n -同値。

が知られているので ([Fe3]を参照)、問題3.8をもう少し簡単にして

問題3.10. 写像 $p : E \rightarrow B$ が approximate fibration で、 p のファイバー F は連結とし、 $\text{pro-}\pi_1(F)$ が pro-finite とする。このとき $p : E \rightarrow B$ の CE-ホモトピー完全系列は得られるか？

また [Fe1] から

定理3.11. X と Y はコンパクトとする。 X と Y がホモトピー同値ならば、 X と Y は CE-同値。

が知られているので、

問題3.12. 写像 $p : E \rightarrow B$ が fibration で、 E と B はコンパクトとする。このとき $p : E \rightarrow B$ の CE-ホモトピー完全系列は得られるか？

も考えることができる。また $\pi_k^{(k)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$ 、 $\pi_k^{(k+1)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$ の中間的な群と考えれば、この問題は正しいと思われる。それぞれの問題の部分解が次のように得られた。

定理3.13. 写像 $p : E \rightarrow B$ が shape fibration で、 E と B はコンパクトとする。さらに p のファイバー F は連結とし、 $\text{pro-}\pi_1(F)$ と $\text{pro-}\pi_1(E)$ が pro-finite とする。このとき $p : E \rightarrow B$ の CE-ホモトピー完全系列は得られる。

定理3.14. 写像 $p : E \rightarrow B$ が fibration で、 E と B はコンパクトとする。もし B が ANR ならば、このとき $p : E \rightarrow B$ の CE-ホモトピー完全系列は得られる。

参考文献

- [Ch] Chinen, N., A relation between k -th UV^{k+1} groups and k -th strong shape groups, to appear.
- [C-F] Chapman, T. A. and Ferry, S., Hurewicz fiber maps with ANR fibers, *Topology* 16 (1977), 131-143.
- [C-D] Coram, D.S. and Duvall, P.F., Approximate fibrations, *Rocky Mountain Journal of Math.* 7 (1977), 275-288.
- [Dr] Dranishnikov, A. N., Universal Menger compacta and universal maps, *Math. USSR-Sb.* 57 (1987), 131-150.
- [D-V] Daverman, R. J. and Venema, G. A., CE equivalence and shape equivalence of 1-dimensional compacta, *Topology and its Appl.* 26 (1987), 131-142.
- [D-S] Dydak, J and Segal, J., Shape theory, *Lecture Notes in Mathematics* 688 (Springer, Berlin, 1978).
- [Fe1] Ferry, S., Homotopy, simple homotopy and compacta, *Topology* 19 (1977), 101-110.
- [Fe2] Ferry, S., Shape equivalence does not imply CE equivalence, *Proc. Amer. Math. Soc.* 80 (1980), 154-156.
- [Fe3] Ferry, S., UV^k -equivalent compacta, *Proceedings of the 1986 Dubrovnik Conference, Lecture Notes in Mathematics* 1283 (Springer, Berlin, 1987), 88-114.
- [Mr1] Mrozik, P., Continua that are shape equivalent but not UV^1 -equivalent, *Topology and its Appl.* 30 (1988), 199-210.
- [Mr2] Mrozik, P., CE equivalence and shape equivalence of LC^n compacta, *Topology and its Appl.* 50 (1993), 11-33.
- [M-S] Mardesic, S. and Rushing, T.B., Shape fibration I, *Gen. Topology and its Appl.* 9 (1978), 193-215.
- [M-S] Mardesic, S. and Segal, J., *Shape Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [Ve] Venema, G. A., Cell-like images and UV^m groups, *Topology and its Appl.* 50 (1993), 35-46.