

変数変換によって得られる積分公式

東大理 高橋 秀俊

京大数研 森 正武

§ 1 序

被積分関数が端点に特異性を持つ積分、いわゆる *improper integral* は、それが可積分であっても数値的に積分しようとすると一般にやっかいである。しかし積分変数に適当な変数変換を行うとこれを比較的容易に可能にすることができる。特に、解析関数の無限区間の積分に対しては、標本点を等間隔にとった台形則が最良の結果を与えるので¹⁾、はじめに与えられた積分区間を無限区間 $(-\infty, \infty)$ に写像する変数変換を選ぶことが、誤差の点からも、また計算の単純さからいっても得策であろう。ここではまずこのような考え方によって導かれる *improper integral* に対する数値積分公式について述べ、次に無限区間における減衰の遅い関数を数値積分するのに効果的な公式を、やはり適当な変数変換によって導くことにする。誤差解析は、積分誤差の特性関数の考え方に基づいて行う。

§ 2 原理

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2-1)$$

なる積分に、変数変換

$$x = \varphi(u) \quad (2-2)$$

を行うと

$$I = \int_c^d f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_c^d g(u) du \quad (2-3)$$

$$g(u) = f(\varphi(u)) \varphi'(u) \quad (2-4)$$

となる。もとの積分区間 (a, b) は写像 $x = \varphi(u)$ により区間 (c, d) に写されるものとする。ここで $g(u)$ に関する積分(2-3)にある適当な近似積分公式を適用したとしよう。

$$I_A = \sum_k A_k g(a_k) \quad (2-5)$$

これをもとの変数に戻せば(2-1)に対する一つの近似積分公式が得られる²⁾。

$$I_A = \sum_k A_k \varphi'(a_k) f(\varphi(a_k)) = \sum_k B_k f(b_k) \quad (2-6)$$

$$b_k = \varphi(a_k), \quad B_k = A_k \varphi'(a_k) \quad (2-7)$$

このとき、誤差

$$\Delta I = \int_c^d g(u) du - \sum_k A_k g(a_k) \quad (2-8)$$

に対する特性関数は、³⁾ u を複素平面に拡張して

$$w = u + iv \quad (2-9)$$

とおくと、例えば

$$\hat{\Phi}(w) = \int_c^d \frac{du}{w-u} - \sum_k \frac{A_k}{w-a_k} \quad (2-10)$$

で与えられ、 ΔI は

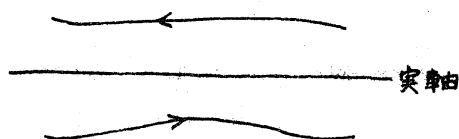
$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\hat{c}} \hat{\Phi}(w) g(w) dw \quad (2-11)$$

によって計算することができる。積分路 $\hat{c}$ は積分区間 (c, d) を半時計まわりに囲む路である。

積分区間が $(-\infty, \infty)$ の場合には、

w -平面の実軸の上下をそれぞれ

左右に走る路をとればよい(オ1回)。



オ 1 図

誤差式 (2-11) の積分変数 w を

$$z = g(w) \quad (2-12)$$

によって z に変換すると

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \Phi(z) f(z) dz \quad (2-13)$$

が得られる。積分路 c は $\hat{c}$ を $z = g(w)$ によって w -平面から z -平面に写像したものであり、また

$$\Phi(z) = \Phi(g(w)) = \hat{\Phi}(w) \quad (2-14)$$

である。変換 (2.2) と (2.12) を比較すればわかるように、積分 (2-1) は z -平面の実軸上の区間 (a, b) において定義されたものである。すなわち (2-13) は、積分 (2-1) を和 (2-6) で近似したときの誤差を、直接 z -平面内における複素積分で表現したものに他ならない。したがって (2-14) によって与えられる関数 $\Phi(z)$ を、 z -平面における誤差の特性関数と定義する。このように定義すれば、 z -平面における $|\Phi(z)| = \varepsilon$ を満足する等高線は、 w -平面における曲線 $|\hat{\Phi}(w)| = \varepsilon$ を $z = g(w)$ によって z -平面に写像することにより得られる。実際の誤差は、場合に応じて (2-11) または (2-13) のうちから計算の容易な方を選択して使用すればよい。

§ 3 improper integral に対する公式 (1) TANH-公式

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (3-1)$$

に変数変換

$$x = \tanh u \quad (3-2)$$

を行うと

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tanh u) \frac{1}{\cosh^2 u} du \quad (3-3)$$

となるが、これにキサミルの台形則を適用すると次の近似公

式が得られる。

$$I_A = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tanh nh) \frac{1}{\cosh^2 nh} \quad (3-4)$$

これを TANH- 公式と呼ぶことにする。この公式の誤差は

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{c}} \hat{\Phi}(w) f(\tanh w) \frac{1}{\cosh^2 w} dw \quad (3-5)$$

で与えられ、誤差の特性関数 $\hat{\Phi}(w)$ はいまの場合

$$\hat{\Phi}(w) = \begin{cases} \frac{-2\pi i}{1 - \exp(-2\pi i w/h)} & ; \Im w > 0 \\ \frac{2\pi i}{1 - \exp(2\pi i w/h)} & ; \Im w < 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

である³⁾。積分路 $\hat{c}$ は才 1 図に示すものである。積分 (3-5) を

$$z = \tanh w \quad (3-7)$$

によって変数変換すると、誤差は

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_c \Phi(z) f(z) dz \quad (3-8)$$

$$\Phi(z) = \Phi(\tanh w) = \hat{\Phi}(w)$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{\pi}{h} i} & ; \Im z > 0 \\ -2\pi i \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{-\frac{\pi}{h} i} & ; \Im z < 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

によって与えられ、積分路 C は $\hat{C}$ を $z = \tanh w$ によって w -平面に写像したものである。

この変換の目的は、端点に特異性を持つ関数を積分することにあるので、被積分関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}, \quad \alpha, \beta < 1 \quad (3-10)$$

の形をしていると仮定する。 $f_1(x)$ は積分区間 $[-1, 1]$ を含む適当な領域で解析的な関数であるとする。このとき (3-5) は

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}(w) F(w) dw \quad (3-11)$$

$$F(w) = \frac{f_1(\tanh w)}{(1 - \tanh w)^\alpha (1 + \tanh w)^\beta \cosh^2 w} \quad (3-12)$$

となる。 $w = \pm \frac{\pi}{2}i$ は関数 $F(w)$ の実軸に最も近い特異点であり、積分路 $\hat{C}$ はこの特異点を越えて実軸から遠ざけることはできない。一方

$$|\hat{\Phi}(w)| \approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\Im w|\right), \quad |\Im w| \gg h \quad (3-13)$$

からわかるように、 $|\hat{\Phi}(w)|$ の減少は $|\Im w| \rightarrow \infty$ と共に急激であるので、誤差のオーダーは $F(w)$ の特異点の位置に支配されてくる。実際、関数 $|\hat{\Phi}(w)F(w)|$ は $w = \pm \frac{\pi}{2}i$ の極く近く原点側に鞍点を持つから、誤差の積分 (3-11) の積分路 $\hat{C}$ をこの鞍

実を通過するようにとると、誤差のオーダーはほぼ次式で与えられる。

$$\varepsilon(\hbar) = \left| \hat{\Phi} \left(\frac{2\pi i}{\hbar} \times \frac{\pi i}{2} \right) \right| = 2\pi \exp \left(-\frac{\pi^2}{\hbar} \right) \quad (3-14)$$

これは TANH-公式を使用する限り免れることのできない誤差である。被積分関数が $\log(1-x^2) f_1(x)$ の形を持つときも同様である。

被積分関数 $f(z)$ が z -平面に単純な極を持つ場合などには、 z -平面における特性関数の絶対値の等高線図が与えられていれば便利である。 w -平面において

$$|\hat{\Phi}(w)| \cong 2\pi \exp(-2\pi |\operatorname{Im} w|/\hbar) = \varepsilon \quad (3-15)$$

を満足する曲線は実軸に平行な直線群であるが、これを $z = \tanh w$ によって z -平面に写像すると、(3-9) からわかるように、 $|\Phi(z)| = \varepsilon$ なる曲線は実 $z = \pm 1$ を通る円

$$x^2 + (y + \cot 2C_0)^2 = \frac{1}{\sin^2 2C_0}$$

$$C_0 = \pm \frac{\hbar}{2\pi} \log \frac{2\pi}{\varepsilon} \quad (3-16)$$

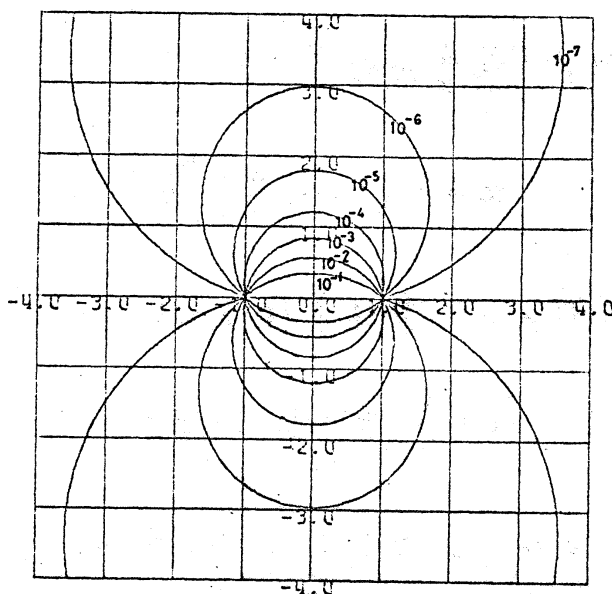


図 2

TANH-公式の $|\Phi(z)|$ の等高線図 $\hbar = 0.5$

になる。ただし C_0 の正負に応じて円の実軸より上側あるいは下側をとる。第2図に $h=0.5$ のときの $|\Phi(z)|$ の等高線図を示す。

この公式の標本点の位置および重みは、積分の過程で簡単に計算することができる。すなわち、まず $S_0 = \mu = e^{-2h}$ を計算しておき、積分のステップ毎に $S_k = \mu S_{k-1}$ を計算すれば、それらは $\tanh nh = (1 - S_n)/(1 + S_n)$, $1/\cosh^2 nh = 4S_n/(1 + S_n)^2$ で計算できる。

§ 4 improper integral に対する公式 (2) ERF-公式

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (4-1)$$

を、誤差関数

$$x = \operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \quad (4-2)$$

によって変数変換すると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\operatorname{erf} u) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du \quad (4-3)$$

となる。これをキサミの台形則で積分したものを ERF-公式と呼ぶことにする。

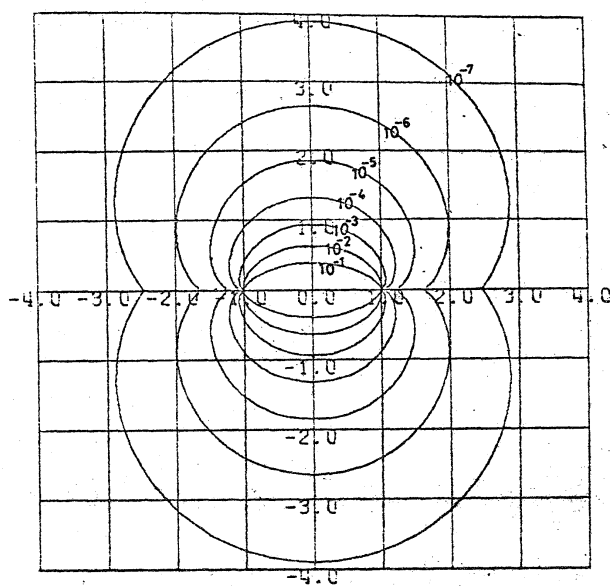
$$I_A = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\operatorname{erf} nh) \exp(-n^2 h^2) \quad (4-4)$$

このとき誤差は

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}(w) f(\operatorname{erf} w) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} dw \quad (4-5)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z) f(z) dz \quad (4-6)$$

で与えられる。 $\hat{\Phi}(w)$ および積分路 $\hat{C}$ はTANH-公式のものと全く同じである。 $\Phi(z)$ は $\hat{\Phi}(w)$ を $z = \operatorname{erf} w$ により変換したものであり、積分路



オ 3 図

ERF-公式の $|\Phi(z)|$ の等高線図 $n=0.5$

C は $\hat{C}$ を $z = \operatorname{erf} w$ で z -平面に写像したものである。オ3図に $n=0.5$ のときの $|\Phi(z)|$ の等高線図を示す。

TANH-公式の場合と同様、被積分関数に(3-10)の形を仮定すると、誤差は

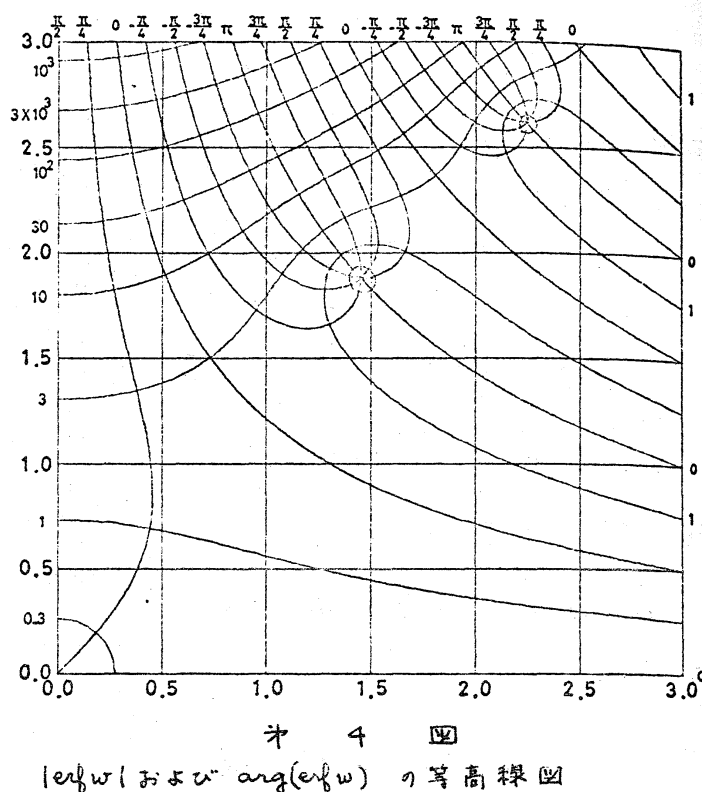
$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}(w) \frac{f_1(\operatorname{erf} w) \operatorname{erf}(-w^2)}{(1-\operatorname{erf} w)^\alpha (1+\operatorname{erf} w)^\beta} dw \quad (4-7)$$

となるが、この積分の被積分関数において $\operatorname{erf} w = \pm 1$ となる点が特異点になっている。オ4図に複素平面のオ1象限における $\operatorname{erf} w$ の絶対値および偏角の等高線図を示した。この図から $\operatorname{erf} w = -1$ 、すなわち絶対値1、偏角 π なる点が $\operatorname{erf} w$ の零点の近くに存在することがわかる。これらのうち実軸に最も近いものは

$$w_0 = 1.35 + 1.99i$$

(4-8)

に存在する。この他にも原臭および虚軸にも対称に $\operatorname{erf} w = \pm 1$ なる臭が存在する。積分路はこれらの臭を越えて実軸から遠ざけることは不可能で、結局誤差のオーダーは



$$E(n) = 2\pi |\hat{\Phi}(w_0)| \cong 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi \times 1.99}{n}\right) \cong 2\pi \exp\left(-\frac{12.5}{n}\right) \quad (4-9)$$

で与えられる。

TANH-公式および ERF-公式を使用する際、被積分関数の持つ $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ なる因子において、 $x = \pm 1$ 近くで桁落を生じないように注意する必要がある。例えば $x=1$ の近くでは $1 - \tanh u = 2e^{-2u}/(1+e^{-2u})$, $1 - \operatorname{erf} u = \operatorname{erfc} u$ などを直接代入するよう工夫すべきである。

§5 TANH-公式および ERF-公式の数値例

積分(3-3)および(4-3)の上限を、その打ち切による誤差の

オーダーがほぼ $\varepsilon(n)$ に等しくなるように打切ると、誤差のオーダー ε を、計算に要した標本数の数 N によって表わすことができる。(3-10) において $\alpha \geq \beta$ と仮定すると、結果は

$$\text{TANH-公式: } \varepsilon(N) = 2\pi \exp(-\pi \sqrt{1-\alpha} N^{1/2})$$

$$\text{ERF-公式: } \varepsilon(N) = 2\pi \exp(-3.4 \sqrt[3]{1-\alpha} N^{2/3})$$

となる。したがって ERF-公式の方が TANH-公式よりずっと少ない標本数で高い精度の結果を与えることがわかる。また、伊理-森ロ-高沢の公式²⁾ においては

$$\varepsilon(N) = 2\pi \exp(-\sqrt{4\pi(1-\alpha)} N^{1/2})$$

であるから、これはほぼ TANH-公式と同程度の精度の結果を与えることが期待される。

表 1 に、 $\int_{-1}^1 (1-x)^{-\alpha} dx$, $\alpha=0.5, 0.75$ をキザミ $n=0.5$ で積分した結果を示す。

表 1 積分 $\int_{-1}^1 (1-x)^{-\alpha} dx$ の計算誤差					
α	I	公式	計算誤差	$\varepsilon(0.5)$	N
0.5	2.8284...	TANH	9.7×10^{-8}	1.7×10^{-8}	69
"	"	ERF	7.3×10^{-11}	8.7×10^{-11}	29
0.75	4.7568...	TANH	2.8×10^{-8}	1.7×10^{-8}	137
"	"	ERF	1.2×10^{-10}	8.7×10^{-11}	41

表 2 に、 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$ を、キザミ $n=0.5$ で積分した結果を示す。この積分においては、被積分関数の極 $z = \pm i$ に

起因する誤差が支配的である。

オ2表 積分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$ の計算誤差

公式	計算誤差	$ \Phi(i) $	N
TANH	2.3×10^{-4}	3×10^{-4}	35
ERF	4.5×10^{-4}	5×10^{-4}	15

§ 6 減衰の遅い関数の積分公式 (1) SINH-公式

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (6-1)$$

に、変数変換

$$x = \sinh u \quad (6-2)$$

をほどこすと

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sinh u) \cosh u du \quad (6-3)$$

となる。この積分にキサミルの台形則を適用すれば次の公式が得られる。

$$I_A = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\sinh nh) \cosh nh \quad (6-4)$$

これを SINH-公式と呼ぶことにする。この公式の誤差の特性関数は (3-6) で与えられ、誤差は

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{c}} \hat{\Phi}(w) f(\sinh w) \cosh w dw \quad (6-5)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \Phi(z) f(z) dz \quad (6-6)$$

によって計算される。ここで z -平面での誤差の特性関数の表示は、(3-6) を $z = \sinh w$ により変数変換すれば

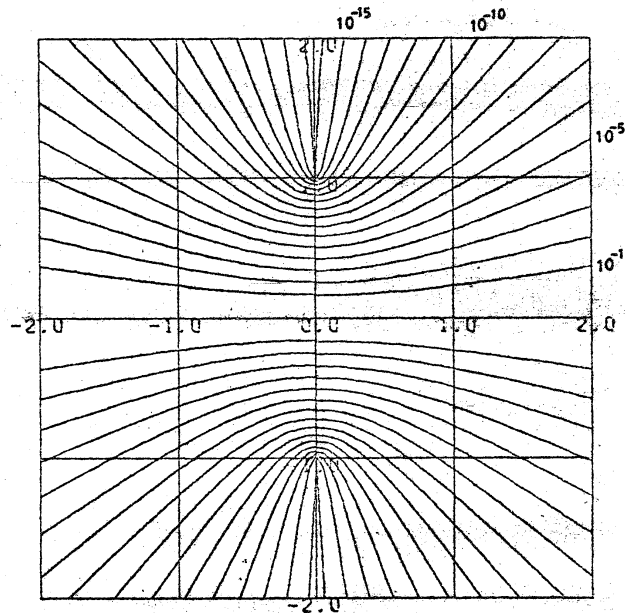
$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi(\sinh w) = \hat{\Phi}(w) \\ &= \begin{cases} 2\pi i (z + \sqrt{z^2 + 1})^{2\pi i / h} & ; \Im z > 0 \\ -2\pi i (z + \sqrt{z^2 + 1})^{-2\pi i / h} & ; \Im z < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6-7)$$

となる。したがって、 $|\Phi(z)| = \varepsilon$ を満す曲線は $z = \pm i$ を焦点とする双曲線

$$-\frac{x^2}{\cos^2 c_0} + \frac{y^2}{\sin^2 c_0} = 1, \quad c_0 = \frac{h}{2\pi} \log \frac{2\pi}{\varepsilon} \quad (6-8)$$

である。オ 5 図に $h = 0.25$ のときの $|\Phi(z)|$ の等高線図を示す。

この公式の目的は、 $|z| \rightarrow \infty$ のとき減衰の遅い関数 $f(x)$ の積分を効率的にすることにある。またオ 5 図からわかるように、この公式を使用したとき避けられない誤



オ 5 図

SINH-公式の $|\Phi(z)|$ の等高線図 $h = 0.25$

差は、 $z = \pm i$ が特異点になっているような関数を積分したときの誤差によって見積ることができる。そこで被積分関数に

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{(1+x^2)^\alpha}, \quad \alpha > \frac{1}{2} \quad (6-9)$$

なる形を仮定しよう。ただし $f_1(x)$ は実軸を含む適当な領域で解析的であるものとする。このとき誤差は

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}(w) \frac{f_1(\sinh w)}{(1+\sinh^2 w)^\alpha} \cosh w dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}(w) \frac{f_1(\sinh w)}{\cosh^{2\alpha-1} w} dw \quad (6-10)$$

で計算されるので、誤差のオーダーは $\cosh w$ の実軸に最も近い零点 $w = i\frac{\pi}{2}$ における $|\hat{\Phi}(w)|$ の値に支配される。したがって、SINH-公式を使用するとき

$$\varepsilon(h) = 2\pi \exp\left(-\frac{\pi^2}{h}\right) \quad (6-11)$$

程度の誤差は免れることはできない。

この公式の標本点の位置および重みは、TANH-公式と同様に積分の過程において簡単に計算することができる。

§7 減衰の遅い関数の積分公式 (2) TAN-公式

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (7-1)$$

なる積分において、 $f(x)$ が $x = \infty$ において解析的であれば、

$$x = \tan u$$

(7-2)

なる変換が、 $x = \sinh u$ よりも良い結果を与える。変換(7-2)

により(7-1)は

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan u) \frac{1}{\cos^2 u} du \quad (7-3)$$

となる。この被積分関数 $f(\tan u)/\cos^2 u$ は周期 π の解析的周期関数であるが、このとき(7-3)の積分に対しては等間隔なキザミを持つ台形則が最良の結果を与える⁴⁾。区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を N 等分して台形則を適用した次の公式を、TAN-公式と呼ぶことにする。ただし N は偶数であるとする。

$$I_A = h \sum'_{n=-N/2}^{N/2} f(\tan nh) \frac{1}{\cos^2 nh} \quad , h = \frac{\pi}{N} \quad (7-4)$$

$\sum'$ は $n = \pm N/2$ のとき、関数値に $1/2$ を乗ずることを意味する。この公式の誤差は

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_c \hat{\Phi}(w) f(\tan w) \frac{1}{\cos^2 w} dw \quad (7-5)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \Phi(z) f(z) dz \quad (7-6)$$

で与えられる。誤差の特性関数は $h = \pi/N$ とすれば(3-6)と全く同じものであり⁴⁾、積分路 c は図6に示すものである。また $\Phi(z)$ は $\hat{\Phi}(w)$ を $z = \tan w$ により変

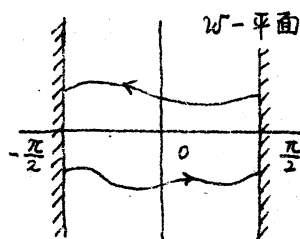


図6 積分路 c

数変換すれば

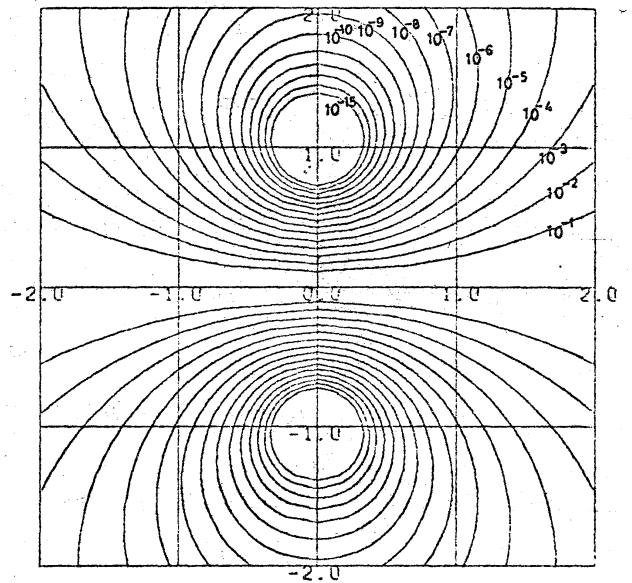
$$\Phi(z) = \begin{cases} 2\pi i \left(\frac{i-z}{i+z} \right)^N & ; \operatorname{Im} z > 0 \\ -2\pi i \left(\frac{i-z}{i+z} \right)^{-N} & ; \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \quad (7-7)$$

となるが、これから $|\Phi(z)| = \varepsilon$ を満す曲線は

$$x^2 + (y - \coth 2C_0)^2 = \frac{1}{\sinh^2 2C_0}, \quad C_0 = \frac{1}{2N} \log \frac{2\pi}{\varepsilon} \quad (7-8)$$

なる円であることがわかる。オ 7 図に $N=20$ のときの $|\Phi(z)|$ の等高線図を示す。

この公式は、はじめに述べたように、単純な有理関数など $x=\infty$ で解析的な関数にのみ適用できる。 $x=\infty$ で解析的でなく、しかも減衰の遅い $(1+x^4)^{-2/5}$ などに対しては、この公式は良い結果を与えない。また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$



オ 7 図
TAN-公式の $|\Phi(z)|$ の等高線図 $N=20$

$= C \neq 0$ になる場合には、積分にこの極限の値 C が必要になる (SINH-公式においてはこのようなことは起きない)。このようなときは、(7-4)の代りに、中貞則

$$I_A = h \sum_{n=1}^{N/2} \left\{ f(\tan(n-\frac{1}{2})h) + f(-\tan(n-\frac{1}{2})h) \right\} \frac{1}{\cos^2(n-\frac{1}{2})h} \quad (7-9)$$

が適当であろう。しかし中点則は、精度が不足でキガミを $h/2$ にしたとき、キガミ h のときの関数値が全く役に立たなくなるという欠点を持つ。

§ 8 SINH-公式および TAN-公式の数値例

$x=\infty$ のとき解析的な関数を積分するときには TAN-公式より効率は落ちるが、SINH-公式は、与えられた積分が可積分である限り、 $x=\infty$ における特異性に拘りなく適用できるという長所を持っている。SINH-公式においては、(6-3)の被積分関数の減衰と、予想される誤差とを比較して適当なところで上限を打ち切る必要がある。

表 3 に、 $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\alpha} dx$, $\alpha = 5/4, 1$ を積分したときの誤差を示す。

表 3 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\alpha} dx$ の計算誤差

α	I	公式	h	計算誤差	$\epsilon(h)$	N
5/4	2.3962...	SINH	0.5	1.3×10^{-7}	8.5×10^{-8}	45
"	"	TAN	—	1.1×10^{-3}	—	160
1	3.1415...	SINH	0.5	3.4×10^{-8}	8.5×10^{-8}	69
"	"	TAN	—	0	—	2

表4に $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\alpha} dx$, $\alpha=1, 2/5$ を積分したときの誤差を示す。このときは $z = \pm e^{\pm \frac{\pi}{2}i}$ における特異点の存在が誤差を支配する。

表4 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) dx$ の計算誤差						
α	I	公式	n	計算誤差	$ \Phi(e^{\frac{\pi}{2}i}) $	N
1	2.2214...	SINH	0.25	3.3×10^{-6}	5×10^{-6}	33
"	"	TAN	—	9.8×10^{-8}	1×10^{-7}	20
$2/5$	5.0835...	SINH	0.25	5.7×10^{-7}	5×10^{-6}	193
"	"	TAN	—	1.4×10^{-1}	—	320

参考文献

- 1) H. Takahasi and M. Mori: Error Estimation in the Numerical Integration of Analytic Functions: Report of the Computer Centre, Univ. of Tokyo, 3 (1970), 41-108.
- 2) 伊理・森口・高次: ある数値積分公式について: 京都大学数理解析研究所講究録 91, p. 82-118
- 3) 高橋・森: 解析関数の数値積分の誤差評価: 京都大学数理解析研究所講究録 115, p. 222-269
- 4) 森: Fourier係数の数値計算とその誤差解析: 日本数学会 1971年秋季応用数学会分科会講演予稿 p. 117-129