

S^3 判定の Algorithm について

東工大 理学部 本間龍雄

§ 1. Introduction

3次元閉多様体 M^3 が与えられたとき、 M^3 が3次元球面 S^3 であるかどうかを判定する一般的な algorithm は未だ知られていない。Poincare は最初 homology 群により判定できると予想したが、反例が存在するのだから予想は否定された。続いて Poincare は「homotopy 群が S^3 の homotopy 群と同型な3次元閉多様体 M^3 は、 S^3 である」という有名な Poincare の予想をたてたが、これはもちろん未解決である。

たとえ Poincare 予想が解決したとしても、 S^3 判定の algorithm が決定できるとは限らない。Poincare 予想が否定された場合は勿論であるが、肯定された場合でも、生成元と関係で表示された群が trivial であるかないかを判定する一般的 algorithm が存在しない以上何とも言えない。

しかし Poincare 予想が肯定的に解決された場合は同時に S^3 判定の algorithm も完成される可能性は強い。

この稿で Heegaard 分解 (すなわち単体分割) を用いて判定の algorithm を作ることを試みる。正確に言うと与えられた Heegaard 分解から, irreducible な Heegaard 分解を作る algorithm である。Heegaard 分解が irreducible であるという概念は §4 で定義するが, M^3 が irreducible であるとは異なる概念である。「 S^3 の irreducible な Heegaard 分解は標準形に限る」とことが予想されるので, この予想が正しいければ, S^3 判定の algorithm となる。genus n の場合はこの予想は肯定的に証明されるので, genus n の Heegaard 分解に対しては S^3 判定の algorithm となる。しかし genus n の場合は Birman - Hilden^[2], 高橋元雄^[3], Haken^[1] の結果によっても algorithm の存在は保証されている。

M^3 が orientable であるかないかは簡単に判定できるので M^3 は orientable であると初めから仮定しておく。

§2 Heegaard 分解の genus を減らす algorithm

M^3 は genus n の Heegaard 分解 $M^3 = M_1 \cup M_2$ をもつものとする。すなわち M_1, M_2 は genus n の solid torus で

$$\partial M_1 = \partial M_2 = M_1 \cap M_2$$

を満足するものとする。

$\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ をそれぞれ M_1 と M_2 の meridian disc の系とする。すなわち

$$C_i \cap \partial M_1 = \partial C_i, \quad D_i \cap \partial M_2 = \partial D_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$C_i \cap C_j = D_i \cap D_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

であって, $M_1 - (C_1 \cup \dots \cup C_n)$, $M_2 - (D_1 \cup \dots \cup D_n)$ は連結である。

$$M_1 \cap M_2 = \underline{N}, \quad \partial C_i = \underline{A_i}, \quad \partial D_i = \underline{B_i}$$

と書く。 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ はそれぞれ M_1 , M_2 の meridian 系となる。二つの meridian 系の交わり $(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ は常に 有限個の点 として差支えない。

Heegaard 分解を $T = \{N \mid A_1, \dots, A_n; B_1, \dots, B_n\}$ と書くことにする。 A_i と B_i が一点で交わり, $i=1, \dots, n$, $A_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ であるとき, T は標準形であるという。 M^3 が標準形の Heegaard 分解をもてば, M^3 はもちろん S^3 である。meridian 系の合併集合を

$$G(T) = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$$

と書き, Heegaard 分解 T の genus を $n(T)$, meridian 系の交わりの点の個数を $\#(T)$ と書くことにする。

3次元球 B^3 をとり, B^3 の境界である 2次元球面 ∂B^3 上に n 個の互いに交わらない 2次元球 $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1n}, C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n}$ をとり, B^3 から M_1 の上への写像 $F_1: B^3 \rightarrow M_1$ をつぎのように作る。

a) $F_1|_{B^3 - (C_{11} \cup \dots \cup C_{1n} \cup C_{21} \cup \dots \cup C_{2n})}$ は $M - (C_1 \cup \dots \cup C_n)$ 上への同相写像である。

b) $F_1|_{C_{1i}}, F_2|_{C_{2i}}$ は共に C_i 上への同相写像である。
 $i = 1, 2, \dots, n$ 。

同様に $F_2: B^3 \rightarrow M_2$ を定義する。

定理 1. $F_1^{-1}(G(\Gamma))$ (または $F_2^{-1}(G(\Gamma))$) が連結でない場合, M^3 に含まれる 2次元球面 S^2 が存在し, $S^2 \cap M_1, S^2 \cap M_2$ はそれぞれ M_1, M_2 の proper な 2次元球で, $S^2 \cap N$ は N で homotop 0 でない 1次元球面となり

$$S^2 \cap (C_1 \cup \dots \cup C_n \cup D_1 \cup \dots \cup D_n) = \emptyset$$

を満足する。

証明 F_1 の場合に証明する。条件 b) より

$$F_1(\partial C_{1i}) = F_1(\partial C_{2i}) = A_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

であるから,

$$F_1^{-1}(G(\Gamma)) = F_1^{-1}(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_n)$$

$$= (\partial C_{11} \cup \dots \cup \partial C_{1n} \cup \partial C_{21} \cup \dots \cup \partial C_{2n}) \\ \cup F_1^{-1}(B_1 \cup \dots \cup B_n)$$

となる。 $F_1^{-1}(G(\Gamma))$ は n 次元球面 ∂B^3 上の連結でない graph であるから、 ∂B^3 上に 1 次元球面 $\tilde{S}$ が存在して、

$$\tilde{S} \cap F_1^{-1}(G(\Gamma)) = \emptyset$$

で、 $\tilde{S}$ を境界とする ∂B^3 の二つの領域は共に $F_1^{-1}(G(\Gamma))$ と交わる。 $C_{11}, \dots, C_{1n}, C_{21}, \dots, C_{2n}$ は互いに交わらない n 次元球であるから、

$$\tilde{S} \cap (C_{11} \cup \dots \cup C_{1n} \cup C_{21} \cup \dots \cup C_{2n}) = \emptyset$$

である。従って $\underline{S^1} = F(\tilde{S})$ とおくと、 S^1 は N の 1 次元球面で、 $\tilde{S} \cap F^{-1}(G(\Gamma)) = \emptyset$ より

$$S^1 \cap G(\Gamma) = \emptyset$$

である。 S^1 は M_1 の meridian 系 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と交わらないから、 M_1 の meridian disc の系 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ と交わらない M_1 の proper な n 次元球 C^z が存在し、 $\partial C^z = S^1$ となる。同様に S^1 は $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ と交わらないから、 $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ と交わらない M_2 の proper な n 次元球 D^z が存在し、 $\partial D^z = S^1$ となる。

$$S^z = C^z \cup D^z$$

とおくと、 $S^z \cap M_1 = C^z$, $S^z \cap M_2 = D^z$ であるからそれぞれ M_1, M_2 の proper な n 次元球である。

$$\begin{aligned}
& S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup D_1 \cup \cdots \cup D_m) \\
&= (S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n)) \cup (S^2 \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_m)) \\
&= (C^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n)) \cup (D^2 \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_m)) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

また $\tilde{S}$ を境界とする ∂B^3 の二つの領域は共に $F_1^{-1}(G(T))$ と交わるから, $S^1 (= F(\tilde{S}))$ が $N (= \partial M_1 = \partial M_2)$ において *homotop* 0 (すなわち N の n 次元球の境界) となることはない。

証明終り

系 1 $G(T)$ が連結でなければ, 定理 1 の条件を満たす S^2 が存在する。

証明 $G(T)$ が連結でないから, $F^{-1}(G(T))$ は連結でない。

定理 1 において, $S^1 = S^2 \cap N$ が N で *homolog* 0 の場合と, *homolog* 0 でない場合に分かれるが, S^1 が *homolog* 0 でない場合は M^3 は n 次元 handle をもつことになるから, 次の系が成り立つ。

系 2 定理 1 の条件のもとで, $S^1 = S^2 \cap N$ が N で *homolog* 0 でないときは, M^3 は n 次元 handle をもつ, 従って M^3

は 2次元球面と1次元球面の直積と3次元閉多様体の connected sum となる。故に M^3 は3次元球面でない。

S^1 が N で homolog 0 でない場合は、つぎの系が成り立つ。

系 3 定理1の条件のもとで、 $S^1 (= S^2 \cap N)$ が N で homolog 0 ならば、 S^2 は M^3 で homolog 0 となり、Heegaard 分解 は S^2 により二つの Heegaard 分解 T_1 と T_2 に分かれ

$$n(T_1), n(T_2) > 0$$

$$n(T) = n(T_1) + n(T_2)$$

$$\#(T) = \#(T_1) + \#(T_2)$$

を満足する。

故に $H_1^{-1}(G(T))$ または $H_2^{-1}(G(T))$ が連結でない場合は S^3 判定の algorithm はもっと genus の低い場合に帰着できる。

§3 meridian 系の交点数を減らす algorithm

前章で $H_1^{-1}(G(T))$, $H_2^{-1}(G(T))$ が連結でない場合は Heegaard 分解の genus を減らすことが出来ること が判

明したので、この章では $F_1^{-1}(G(T))$, $F_2^{-1}(G(T))$ が共に連結であることを仮定する。

定理 又 ある i, j , $i=1, 2, j=1, 2, \dots, n$, が存在して, $F_1^{-1}(G(T)) - \partial C_{ij}$ (または $F_2^{-1}(G(T)) - \partial D_{ij}$) が連結でないならば, M^3 の Heegaard 分解 $\tilde{\gamma}$ が存在して,

$$\#(\tilde{\gamma}) < \#(T)$$

$$n(\tilde{\gamma}) = n(T)$$

を満足する。

証明 $F_1^{-1}(G(T)) - \partial C_{ij}$ が連結でない場合に証明する。
 $F_1^{-1}(G(T))$ は 2 次元球面 ∂B^3 から $2n$ 個の開 2 次元球 $\overset{\circ}{C}_{11}, \dots, \overset{\circ}{C}_{1n}, \overset{\circ}{C}_{21}, \dots, \overset{\circ}{C}_{2n}$ を除いた 2 次元多様体 X に含まれていて, $\partial X = \partial C_{11} \cup \dots \cup \partial C_{1n} \cup \partial C_{21} \cup \dots \cup \partial C_{2n}$ がある。 $F_1^{-1}(G(T))$ は連結で, $F_1^{-1}(G(T)) - \partial C_{ij}$ は連結でないのであるから, X 上に proper な 1 次元球 A が存在して,

$$A \cap \partial X = A \cap \partial C_{ij} = \partial A$$

$$A \cap F_1^{-1}(G(T)) = \partial A$$

を満足し, A によって分けられる X の二つの領域は共に, $F_1^{-1}(G(T)) - \partial C_{ij}$ と交わる。

$\partial A = p \cup q$ と書くことにする。 A_i は M_1 の meridian だから, N で homolog 0 でない。 p と q によって定まる ∂C_{ij} の二つの一次元球の適当な一方 R をとり, $\tilde{A}_i = F_1(A \cup R)$ とおくと $\tilde{A}_i$ は N の一次元球面で, N で homolog 0 でない。しかし $A \cup R$ は X の一次元球面であるから, $\tilde{A}_i$ は M_1 の proper な i 次元球 $\tilde{C}_i$ の境界であり,

$$\tilde{C}_i \cap (C_1 \cup \dots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_n) = \emptyset$$

として良い。 $M_1 - (C_1 \cup \dots \cup C_n)$ は連結であるから

$$M_1 - (C_1 \cup \dots \cup C_{i-1} \cup \tilde{C}_i \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_n)$$

も連結である。故に $\{C_1, \dots, C_{i-1}, \tilde{C}_i, C_{i+1}, \dots, C_n\}$ は M_1 の meridian disc の系であり, $\{A_1, \dots, A_{i-1}, \tilde{A}_i, A_{i+1}, \dots, A_n\}$ は M_1 の meridian 系である。 $F_1^{-1}(G(T))$ は連結で, $F_1^{-1}(G(T)) - C_{ij}$ が連結でなく, A が $F_1^{-1}(G(T)) - C_{ij}$ を分けていることより, $\partial C_{ij} - R$ は $F_1^{-1}(B_1 \cup \dots \cup B_m)$ と交わる。故に $A_i - F_1(R)$ は $B_1 \cup \dots \cup B_m$ と交わる。 $\tilde{A}_i$ と $B_1 \cup \dots \cup B_m$ の交点数は A_i と $B_1 \cup \dots \cup B_m$ の交点数より, $A_i - F_1(R)$ と $B_1 \cup \dots \cup B_m$ の交点数の分だけ少なくなる。 M^3 の新しい Heegaard 分解として,

$$\tilde{\Gamma} = \{N \mid A_1, \dots, A_{i-1}, \tilde{A}_i, A_{i+1}, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$$

を選べば, 明らかに

$$\#(\tilde{\Gamma}) < \#(\Gamma)$$

$$n(\tilde{\Gamma}) = n(\Gamma)$$

である。

証明終り

§4 判定の algorithm

3次元閉多様体 M_1^3 , M_2^3 の Heegaard 分解を Γ_1, Γ_2 とするとき, Γ_1 と Γ_2 の connected sum は自然に定義することができ, (§2 の系を参照) それを $\Gamma_1 \# \Gamma_2$ と書くことにする。もちろん $\Gamma_1 \# \Gamma_2$ は M_1^3 と M_2^3 の connected sum $M_1^3 \# M_2^3$ の Heegaard 分解になっている。

定義 Heegaard 分解 Γ において, 任意の $i=1, 2, j=1, 2, \dots, n$ に対して, $F_1^{-1}(G(\Gamma)) - C_{ij}$, $F_2^{-1}(G(\Gamma)) - D_{ij}$ が連結ならば Γ は α -irreducible であると呼ぶことにする。さらに Γ がいくつかの α -irreducible な Heegaard 分解の connected sum となるとき, Γ を irreducible であると呼ぶことにする。

定理 3 M^3 が π -handle をもたない 3次元閉多様体であれば, M^3 の irreducible な Heegaard 分解を作る algorithm が存在する。

証明 M^3 の勝手な Heegaard 分解 Γ をとり, 定理 1 と定理 2 を繰り返し用いて, genus がもっと小さい Heegaard 分解の connected sum に分けることと, meridian 系の交点数 $\#(\Gamma)$ を低くする algorithm を反復して, これ等の algorithm が進行できなくなるまで実施する。最後に irreducible な Heegaard 分解を得る。

証明終り

以上の algorithm が S^3 判定の algorithm となるという保証はないが下記の予想をたてている。

予想 「 S^3 の irreducible な Heegaard 分解は標準形だけである。」

この予想は genus 2 の場合だけしか証明できていないが, もしも genus が一般の場合に正しければ, S^3 判定の algorithm が存在することとなる。

- [1] Haken. Wolfgang
 Theorie der Normalflächen
 Acta Math. 105 (1961), 245~376
- [2] Birman J. S. & Hilden H. M.
 The homeomorphism problem for S^3 .
 Bulletin of the A.M.S. vol. 79 No. 5
 (1973), 1006~1010
- [3] 高橋 元男
 種数 n の Heegaard 分解についての Birman-Hilden
 の定理の別証
 数理解析研究所講究録
- [4] 本間 龍雄
 Heegaard 分解と曲面上の曲線系について
 数理解析研究所講究録