

外力項を伴う非線形波の方程式について

九大応力研 船越満明 (Mitsuaki Funakoshi)

§1. 序

流体中の波動はさまざまな外力によって作り出されるが、そのなかには波の非線形性が挙動を理解する上で重要であるものも多い。このレビューではそのようなもののうち、水面波に関するもので、比較的簡単な非線形発展方程式系で記述できるいくつかの例を紹介する。

§2. 共鳴的鉛直加振によって細長い容器内に作られる水面波

図 1 のように水を深さ h まで入れた幅 W 長さ L の細長い ($L \gg W$) 長方形容器を考え、水平方向の座標を長さ方向に x , 幅方向に y とし、鉛直方向座標を z とする。この容器内の定在水面波は、線形理論では自由表面変位 $z = \zeta$ に対して

$$\zeta = \zeta_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(\omega_{m,n}t - \varphi_0), \quad (1)$$

と書ける。ここで m, n はそれぞれ容器の長さ方向、幅方向のモード数をあらわす整数であり、 $\omega_{m,n}$ は (m, n) モードの固有振動数、 t は時間、 φ_0 は定数である。そしてとくに $(0, 1)$ モードに対しては、その固有振動数 $\omega_1 (= \omega_{0,1})$ は次のように書ける。

$$\omega_1 = \sqrt{gk \tanh kh}, \quad (2)$$

ここで $k = \pi/W$, g は重力加速度である。

この長方形容器を鉛直方向に、その変位が $z = \hat{a}_0 \cos 2\omega t$ となるように正弦波的に加振する場合を考え、

$$\omega \sim \omega_1, \quad (3)$$

であると仮定すると、パラメータ共鳴により $(0, 1)$ モードの水面波が主に励起されうる。このような場合に対して、(水面波の波高)/ W が $O(\varepsilon)$ で $\varepsilon \ll 1$ とし、また $\hat{a}_0/W = O(\varepsilon^2)$, $\omega - \omega_1 = O(\varepsilon^2)$ と仮定する。そして

$$X = \varepsilon x/W, \quad \tau = \varepsilon^2 \omega t, \quad (4)$$

によってひきのばされた無次元化 x 方向座標、無次元化時間を定義し、 $L \gg W$ ということから $(0, 1)$ モードの x 方向へのゆっくりした変調を許して、

$$\zeta/W = \varepsilon[p(X, \tau) \cos \omega t + q(X, \tau) \sin \omega t] \cos ky, \quad (5)$$

とおくと、複素振幅

$$A(X, \tau) = p(X, \tau) + iq(X, \tau), \quad (6)$$

に対して、次の非線形発展方程式が導かれる。

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + b \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + (\beta + i\alpha)A + c|A|^2 A + \gamma A^* = 0, \quad (7)$$

ここで $*$ は複素共役を示し、 β は

$$\beta = (\omega^2 - \omega_1^2)/\varepsilon^2 \omega_1^2, \quad (8)$$

で定義される $O(1)$ の量である。また α を含む項は、容器の側壁等での散逸効果をあらわすためにあとから人工的に付加したもので、 α は正定数としている。(7) の左辺の最後の項はパラメータ共鳴による外力を表わすもので、 γ は $\hat{a}_0$ に比例する正の定数である。また $T = \tanh kh$ としたとき、分散項の係数 b は $T + kh(1 - T^2)$ に比例する定数で、つねに正である。しかし非線形項の係数 c は $6T^4 - 5T^2 + 16 - 9T^{-2}$ に比例し、その符号は kh の値によって変化する。すなわち、 $kh > 1.022$ をみたす比較的深い場合は $c > 0$ であり、 $kh < 1.022$ をみたす比較的浅い場合は $c < 0$ となる。

Larraza & Putterman¹⁾ は理論的にこの細長い容器の鉛直加振の問題を調べ、(7) で $\alpha = \gamma = 0$ とした方程式 (nonlinear Schrödinger 方程式 [以後 NLS 方程式と呼ぶ]) を導出して、その解を $c > 0$ の場合について調べた。また Miles²⁾ は方程式 (7) の解を $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $c > 0$ の場合について調べ、Guthart & Wu³⁾ は $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $c < 0$ の場合の解を調べた。これらの結果をまとめると次のようになる。

まず $\alpha = \gamma = 0$ の場合には、NLS 方程式についてよく知られているように、(7) は c の符号に関係なく静止解

$$A \equiv 0, \quad (9)$$

および一様振幅解

$$A = A_0 \exp[i\{(\beta + cA_0^2)\tau + \varphi\}], \quad (A_0, \varphi \text{ は任意}) \quad (10)$$

をもち、前者は波のまったく励起されていない状態、後者は振幅が容器の長さ方向に全く変化しない幅方向の定在波に対応している。また $c > 0$ の場合には b と c が同符号なので、よく知られた孤立波解（で速さ 0 のもの）

$$A = A_0 \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{c}{2b}} A_0 X\right) \exp[i\{(\beta + \frac{c}{2} A_0^2)\tau + \varphi\}], \quad (A_0, \varphi \text{ は任意}) \quad (11)$$

が存在する。この解は容器の長さ方向に局在した定在波に対応している。また $c < 0$ の場合は、kink 解

$$A = A_0 \tanh\left(\sqrt{-\frac{c}{2b}} A_0 X\right) \exp[i\{(\beta + cA_0^2)\tau + \varphi\}], \quad (A_0, \varphi \text{ は任意}) \quad (12)$$

が存在する。

一方、方程式 (7) で $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ の場合には、静止解 (9) は依然として存在するが、一様振幅解は $\gamma \geq \alpha$ すなわち外力の強さが散逸効果の強さより充分大きいときに限って存在し、その形は

$$A = A_0 \exp(i\varphi), \quad (13)$$

ただし

$$A_0 = \pm \sqrt{\frac{-\beta \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{c}}, \quad (14)$$

$$\cos 2\varphi = \mp \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}}, \quad (15)$$

である。ここで (14) の $\sqrt{\quad}$ の中の複号と (15) の複号は同順である。この解は、 $\alpha = \gamma = 0$ のときの解 (10) とちがって A_0 と φ が任意でなく、 τ 依存性もない。そして、 $c > 0$ のときを考えると、(14) の形からわかるように、 $\beta > 0$ (すなわち $\omega > \omega_1$) の場合は、

$\gamma \geq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ のときにのみ一組 ((14) の $\sqrt{\quad}$ の中で $+$ の方を選んだ正と負の A_0) の解が存在し、 $\beta < 0$ (すなわち $\omega < \omega_1$) の場合は、 $\alpha \leq \gamma \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ では二組 ((14) の $\sqrt{\quad}$ の中が $+$ と $-$ の両方) の解、 $\gamma > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ では一組の解が存在する。さらに $c > 0$ のときには、 $\gamma \geq \alpha$ の条件下で孤立波解

$$A = A_0 \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{c}{2b}} A_0 X \right) \exp(i\varphi), \quad (16)$$

も存在する。ここで

$$A_0 = \pm \sqrt{\frac{-\beta \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{c/2}}, \quad (17)$$

$$\cos 2\varphi = \mp \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}}, \quad (18)$$

であり、(17) の $\sqrt{\quad}$ の中の複号と (18) の複号は同順である。(14) と (17) の形の類似性からわかるように、孤立波解の存在する (α, β, γ) の値の範囲は一樣振幅解のときと全く同じである。一方 $c < 0$ のときには、kink 解

$$A = A_0 \tanh \left(\sqrt{-\frac{c}{2b}} A_0 X \right) \exp(i\varphi), \quad (19)$$

が存在する。ここで A_0, φ は (14), (15) をみたとす。

$c > 0$ のときの方程式 (7) の解 (9), (13), (16) の安定性については Laedke & Spatschek⁴⁾ が調べており、それによると、 $\gamma \leq \alpha$ のときには β の値にかかわらず静止解 (9) は安定である。一方 $\gamma > \alpha$ の場合には、 β の符号によって挙動が異なり、 $\beta > 0$ では解 (9), (13), (16) はいずれも不安定である。また $\gamma > \alpha, \beta < 0$ では、 $\alpha < \gamma \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ に対しては静止解 (9), 孤立波解 (16) がともに安定であり (複数個の安定状態)、 $\gamma > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ に対してはどの解も不安定である。なお、一樣振幅解 (13) はその存在するパラメータ領域のほとんどすべてにおいて不安定である。一方 $c < 0$ のときの解の安定性については詳しくは調べられていない。

また、方程式 (7) の X 方向に周期的な解は一般に楕円関数で表わされ、 $c > 0$ のときに cn 型の解 (cnoidal wave)、dn 型の解が存在しうることが、それぞれ Miles²⁾ と Umeki⁵⁾ によって示された。一方、 $c < 0$ のときには sn 型の解が存在しうる⁶⁾。Laedke & Spatschek⁴⁾

は $c > 0$ の場合について、 $\gamma/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1.13$, $\beta = -1$ のときの不安定な孤立波解 (16) を初期値として (7) の数値積分を行ない、解が最終的に安定な cnoidal wave に漸近していく、という結果を得た。

次に、この問題に対する実験は Wu ら⁷⁾ によって最初に行なわれ、彼らは $c > 0$ に相当する比較的深い場合について、孤立波解 (16) に対応する水面波が実際に観測できることを示した。ただしその自由表面変位の y 方向の形は $\cos$ 型からかなりずれており、山の方が高く鋭く、谷の方が低くてなだらかになっている。これは高次の非線形性の効果であると思われる。一方 $c < 0$ に相当する比較的浅い場合の実験は最近 Denardo ら⁶⁾ によって行なわれ、ほぼ kink 解 (19) に近いものが得られている。ただし、 $|A|$ が X 依存性をもたない部分でのプラス側の振幅がマイナス側の振幅よりかなり大きく、また $|A|$ の最小値が完全には 0 にならない、という違いがある。

また、Wu ら⁷⁾ は $c > 0$ のときの実験において、2 つ以上の孤立波を同時に作り出し、その相互作用も調べている。それによると、2 つの孤立波が同位相（各瞬間での y 依存性が同じ。言いかえると (17) の A_0 が同符号）のときには両者の間に引力的な相互作用がおこり、逆位相（ y 依存性が逆符号）のときには斥力的な相互作用がおこる。そして同位相の場合には、引力的相互作用による 2 つの孤立波の振動的なふるまいが観測された。

Umeki⁵⁾ は X 方向に周期的であるという境界条件の下で $c > 0$ のときの (7) の解を詳しく調べ、上の振動的なふるまいが cnoidal wave の解のホップ分岐によって生じる時間的に周期的な解として説明できるとした。また彼は充分大きい γ の値に対してカオス的な解の存在も示した。

§3. 造波機の共鳴的運動によって作られる水面波

図 2 のように幅 W の大変長い水槽（水深 h ）の一端に造波機があるとし、水槽の長さ方向、幅方向の座標を x, y , 鉛直方向座標を z とする。そして造波機の時間平均位置を $x = 0$ とする。この水槽において、§2 の最初で述べた線形の定在水面波のうち $(0, n)$ モード（横方向の定在波）を共鳴的に励起するような造波機の動き方には 2 種類ある。その一つは図 3 (a) のように、造波機的位置が y 依存性を全くもたずに

$$x = \hat{a}_0 f(z) \sin 2\omega t, \quad (20)$$

の形をしており、かつ $\omega \sim \omega_n$ の場合である。ここで ω_n は $(0, n)$ モードの固有振動数で

$$\omega_n = \sqrt{g k_n \tanh k_n h}, \quad k_n = n\pi/W, \quad (21)$$

である。また $f(z)$ は $O(1)$ の無次元量である。このときには造波機の運動により平面波 (y 依存性を全くもたない波) が直接的に作り出される他に、パラメータ共鳴により $(0, n)$ モードが励起され、後者の波は通常 cross wave と呼ばれる。一方、図 3 (b) のように、造波機がいくつかの部分からなっていてそれぞれが ω_n に近い振動数 ω で動き、その各部分の動き方の関係が $(0, n)$ モードと対応するようなものであれば、このモードが直接的な共鳴により励起される。このような波についてははっきりと定まった名前はないが、sloshing wave と呼ばれる場合もあるので、このレビューではそう呼ぶことにする。

§3.1 Cross wave

Cross wave についての理論的研究は Mahony⁸⁾ が最初に行なったと思われるが、その後 Jones⁹⁾ が弱非線形性の仮定に基き、支配方程式としての NLS 方程式及び造波機での境界条件を導出した。しかし彼は散逸の効果を全く無視したので、実験結果とよく合う解を得ることはできなかった。そこでその後多くの研究者たちが NLS 方程式や境界条件への散逸効果の入れ方、入れたときの解の特徴などについて詳しく調べた^{10~16)}。これらの結果をまとめると以下のようなになる。

まず (20) の形の造波機の運動で $\varepsilon \equiv \hat{a}_0/W \ll 1$, $(\omega - \omega_n)/\omega_n = O(\varepsilon^2)$ と仮定すると、この運動によって直接作り出される平面波は $O(\varepsilon)$ の無次元化振幅をもち、その自由表面変位 ζ は次のように書ける。

$$\zeta = a_p \{ \cos(\kappa x - 2\omega t) + G(x) \sin 2\omega t \}, \quad (22)$$

ここで κ は

$$2\omega = \sqrt{g \kappa \tanh \kappa h}, \quad (23)$$

をみだし、(22) の右辺第一項は振動数 2ω の進行波を表わす。一方 $G(x)$ は $f(z)$ の形に

よって決まる $O(1)$ の関数であり、 $G(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) をみたす。従って (22) の右辺第 2 項は造波機付近に局在した平面波を表わす。

一方、cross wave に対応する ζ は

$$\zeta = a_c \{-p(X, \tau) \sin \omega t + q(X, \tau) \cos \omega t\} \cos k_n y, \quad (24)$$

と書いて、 $a_c/W = O(\varepsilon)$ であるとする。ここで、 p, q はひきのばされた無次元化 x 方向座標 $X = \varepsilon x/W$ と無次元化時間 $\tau = \varepsilon^2 \omega t$ の $O(1)$ の関数である。このとき cross wave の複素振幅

$$A = p + iq, \quad (25)$$

に対する支配方程式として、NLS 方程式に類似した

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + b \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + (\beta + i\tilde{\alpha})A + c|A|^2 A = 0, \quad (26)$$

が導かれ、また造波機のところでの境界条件として、斉次型の

$$\frac{\partial A}{\partial X} = i\tilde{L}A^* - i\tilde{\delta}A, \quad \text{at } X = 0, \quad (27)$$

が得られる。ここで $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\delta}$ を含む項はあとから人工的に付加されたものであり、 $\tilde{\alpha}$ は水槽の側壁での粘性の効果等をあらわす複素数、 $\tilde{\delta}$ は造波機のところでの粘性等の効果をあらわす複素数である。そして $\tilde{\alpha}, \tilde{\delta}$ の実部はいずれも 0 以上である。また β は

$$\beta = \frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\varepsilon^2 \omega_n^2} - F, \quad (28)$$

で定義される $O(1)$ の量であるが、その中の F は平面波の存在による効果をあらわし $f(z)$ の形と $k_n h$ の値から決まる定数である。また $\tilde{L}$ は、 $\hat{a}_0$ に比例しており $k_n h$ と $f(z)$ から決まる実定数であり、(27) の $\tilde{L}$ を含む項が外力項となる。また、 b, c は (7) における b, c と同様に定義されるが、 k のかわりに k_n を使う必要がある。従って b はつねに正であり、 c は $k_n h > 1.022$ に対して正、 $k_n h < 1.022$ に対して負である。

粘性等による散逸効果のない場合 ($\tilde{\alpha} = \tilde{\delta} = 0$) の (26), (27) の解としては、まず

$$A \equiv 0, \quad (29)$$

がある。これは cross wave が励起されていなくて平面波のみの状態に対応する。また一様振幅解

$$A = A_0 \exp(i\tilde{L}X), \quad (30)$$

も存在しうる。ここで

$$A_0 = \pm \sqrt{\frac{b\tilde{L}^2 - \beta}{c}}, \quad (31)$$

である。また、

$$c > 0, \quad \beta < 0, \quad |\tilde{L}| < \sqrt{-\frac{\beta}{b}}, \quad (32)$$

の条件をみたすときは、造波機の付近にトラップされた定常解

$$A = A_0 \operatorname{sech} \left(\sqrt{-\frac{\beta}{b}} X + \theta \right) \exp(i\varphi) \quad (33)$$

も存在する¹⁰⁾。ここで

$$A_0 = \pm \sqrt{-\frac{2\beta}{c}}, \quad \tanh \theta = \pm \tilde{L} / \sqrt{-\frac{\beta}{b}}, \quad \varphi = \mp \frac{\pi}{4}, \quad (34)$$

であり、後の2つの複号は同順である。

一方、散逸効果のある場合 ($\tilde{\alpha} \neq 0, \tilde{\delta} \neq 0$) には、cross wave の励起なしの解 (29) は依然としてつねに存在するが、一様振幅解は存在しない。そして解 (29) の安定性は Bernoff ら¹⁶⁾ によって調べられ、

$$\beta + i\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} + i\alpha, \quad (\alpha, \tilde{\beta} \text{ は実数}, \alpha \geq 0) \quad (35)$$

によって $\tilde{\beta}$ と α を定義したとき、 $\alpha = \tilde{\delta} = 0$ ならば、

$$\tilde{L}^2 > \frac{1}{b}\tilde{\beta} \quad (\tilde{\beta} > 0 \text{ のとき}), \quad \tilde{L}^2 > -\frac{1}{b}\tilde{\beta} \quad (\tilde{\beta} < 0 \text{ のとき}), \quad (36)$$

に対して (29) が不安定であることが示された。彼らはまた $\alpha > 0, \tilde{\delta} \neq 0$ のときの (29) の安定条件も数値的に求め、どの $\tilde{\beta}$ に対しても充分 $|\tilde{L}|$ を大きくすれば (29) が不安定になることを示した。また造波機の付近にトラップされた定常解 ($X \rightarrow \infty$ で $A \rightarrow 0$) は、解析的には表現できないもののたしかに存在することが $c > 0, \alpha > 0, \tilde{\delta} = 0$ の場合に対し

て Miles & Becker¹²⁾ の数値計算によって示されている。それによると、造波機のところ ($X = 0$) から $|A|$ が単調に減少していく解のほかに、パラメータの値によっては、 $X > 0$ のところで1個あるいは複数個の $|A|$ の極大値をもつような解も存在する。さらに $c > 0$ に対する (26), (27) の直接数値積分によって、造波機のところではほぼ周期的に作られたソリトンが順次そこから離れて水槽内を伝播していく、という挙動に対応する解が比較的大きい $|\tilde{L}|$ に対して得られている^{11, 14)}。

次に cross wave に関する実験としては Barnard & Pritchard¹⁷⁾ によるものが先駆的であるが、その後より精密な実験がいくつかなされている^{14, 18, 19)}。それによると充分小さい $\hat{a}_0$ (造波機の振幅) に対しては、(29) に対応する cross wave の励起されない状態が観測され、 ω を固定して $\hat{a}_0$ を増加させていくと cross wave が出現し、トラップされた定常解に対応する状態がみられる。この際パラメータの値によっては造波機から少しはなれたところで振幅の極大値をもつようなものも存在する。またもう少し $\hat{a}_0$ を大きくすると、ほぼ周期的なソリトン生成の状態が観測される。さらに大きな $\hat{a}_0$ ではカオス的な振幅変化もみられる。これらの挙動の大部分は $\tilde{\alpha}, \tilde{\delta}$ の値を適当に選んだときの方程式系 (26), (27) の解として説明できるが、カオス的な振幅変化に相当する解については、まだ明確には示されていない。

§3.2 Sloshing wave

これについてはごく簡単に紹介するにとどめるが、要点は次のとおりである。すなわち、(24), (25) によって定義される sloshing wave の複素振幅 A は適当にひきのばされた無次元化 x 方向座標 X と無次元化時間 τ に対して、(26) の形の方程式に支配されるが、(27) とちがって、造波機のところでは

$$\frac{\partial A}{\partial X} = i\hat{L} - i\tilde{\delta}A, \quad \text{at } X = 0, \quad (37)$$

の境界条件を満足する。ここで $\hat{L}$ は造波機の振幅に比例した量で、(37) の右辺第一項は非斉次型の外力項となっている。(26), (37) は cross wave のときと異なり $A \equiv 0$ の解をもたない。しかし、造波機の付近にトラップされた定常解や周期的なソリトン生成に対応する解、さらに正弦波的な振幅変調を行なう解が存在する。実験においてもこれらの3つの解

に相当するものは観測されている。しかしカオス的な振幅変化については、理論、実験とも一応それらしいものは見つかっているが、まだ明確に示されたとは言い難い。Sloshing wave に関する実験、理論両面からの研究としては文献 20～22 があり、理論のみの研究としては文献 23,24 がある。

§4. まとめ

流体中の波動現象に関係した非線形発展方程式系に対する外力項の比較的簡単な入り方としては、§2 で紹介した「支配方程式中の斉次形外力項」、§3.1 の「境界条件中の斉次形外力項」、§3.2 の「境界条件中の非斉次形外力項」の他に、「支配方程式中の非斉次形外力項」がある。この代表的なものは、流体層に対して共鳴的な相対速度 V をもつ底の地形変化や自由表面での圧力変化によって作り出される長波を記述する forced K-dV 方程式

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} + \hat{b} \frac{\partial^3 B}{\partial X^3} + \hat{c} B \frac{\partial B}{\partial X} + \hat{\beta} \frac{\partial B}{\partial X} + \hat{\kappa} \frac{\partial H}{\partial X} = 0, \quad (38)$$

である²⁵⁾。ここで共鳴的な速度とは $V \sim c_p$ (長波の位相速度) を意味し、 B は長波に伴う自由表面変位である。また X, τ は適当にひきのばされた水平方向座標、時間であり、 $\hat{\beta}$ は $V - c_p$ に比例した量である。さらに H は底の地形変化等に相当する量で、 H の入った項が非斉次形外力項となっている。なお $\hat{b}, \hat{c}, \hat{\kappa}$ は定数である。

流体中の波動を記述する方程式への外力の効果の入り方は、一般にはここで述べたようには簡単ではないが、このレビューで紹介した方程式系の研究は、直接関連した問題の考察だけでなく、外力の効果を含むより複雑な問題を考えるときの手がかりとしての意味も充分あると思われる。

参 考 文 献

- 1) Larraza, A. & Putterman, S., Theory of non-propagating surface-wave solitons, (1984), J. Fluid Mech., Vol.148, pp.443-449.
- 2) Miles, J. W., Parametrically excited solitary waves, (1984), J. Fluid Mech., Vol.148, pp.451-460.
- 3) Guthart, G. S. & Wu, T. Y., Observation of a standing kink cross wave parametrically excited, (1991), Proc. Roy. Soc. Lond. A, Vol.434, pp.435-440.
- 4) Laedke, E. W. & Spatschek, K. H., On localized solutions in nonlinear Faraday resonance, (1991), J. Fluid Mech., Vol.223, pp.589-601.
- 5) Umeki, M., Parametric dissipative nonlinear Schrödinger equation, (1991), J. Phys. Soc. Japan, Vol.60, pp.146-167.
- 6) Denardo, B., Wright, W., Putterman, S., and Larraza, A., Observation of a kink soliton on the surface of a liquid, (1990), Phys. Rev. Lett., Vol.64, pp.1518-1521.
- 7) Wu, J., Keolian, R., and Rudnick, I., Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton, (1984), Phys. Rev. Lett., Vol.52, pp.1421-1424.
- 8) Mahony, J. J., Cross-waves, part 1, theory, (1972), J. Fluid Mech., Vol.55, pp.229-244.
- 9) Jones, A. F., The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance, (1984), J. Fluid Mech., Vol.138, pp.53-74.
- 10) Miles, J. W., Note on a parametrically excited, trapped cross-wave, (1985), J. Fluid Mech., Vol.151, pp.391-394.
- 11) Lichter, S. & Chen, J., Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves, (1987), J. Fluid Mech., Vol.183, pp.451-465.
- 12) Miles, J. & Becker, J., Parametrically excited, progressive cross-waves, (1988), J. Fluid Mech., Vol.186, pp.129-146.
- 13) Lichter, S. & Bernoff, A. J., Stability of steady cross waves : theory and experiment, (1988), Phys. Rev. A, Vol.37, pp.1663-1667.

- 14) Shemer, L. & Kit, E., Long-time evolution and regions of existence of parametrically excited nonlinear cross-waves in a tank, (1989), J. Fluid Mech., Vol.209, pp.249-263.
- 15) Kit, E. & Shemer, L., On the neutral stability of cross-waves, (1989), Phys. Fluids A, Vol.1, pp.1128-1132.
- 16) Bernoff, A. J., Kwok, L. P., and Lichter, S., Viscous cross-waves : an analytical treatment, (1989), Phys. Fluids A, Vol.1, pp.678-688.
- 17) Barnard, B. J. S. & Pritchard, W. G., Cross-waves, part 2, experiments, (1972), J. Fluid Mech., Vol.55, pp.245-255.
- 18) Lichter, S. & Shemer, L., Experiments on nonlinear cross waves, (1986), Phys. Fluids, Vol.29, pp.3971-3975.
- 19) Shemer, L. & Lichter, S., Identification of cross-wave regimes in the vicinity of a cut-off frequency, (1987), Phys. Fluids, Vol.30, pp.3427-3433.
- 20) Barnard, B. J. S., Mahony, J. J., and Pritchard, W. G., The excitation of surface waves near a cut-off frequency, (1977), Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, Vol.286, pp.87-123.
- 21) Kit, E., Shemer, L., and Miloh, T., Experimental and theoretical investigation of nonlinear sloshing waves in a rectangular channel, (1987), J. Fluid Mech., Vol.181, pp.265-291.
- 22) Shemer, L., & Kit, E., Study of the role of dissipation in evolution of nonlinear sloshing waves in a rectangular channel, (1988), Fluid Dyn. Res., Vol.4, pp.89-105.
- 23) Miles, J., Guided surface waves near cutoff, (1988), J. Fluid Mech., Vol.189, pp.287-300.
- 24) Shemer, L., On the directly generated resonant standing waves in a rectangular tank, (1990), J. Fluid Mech., Vol.217, pp.143-165.

25) たとえば

Wu, T. Y., Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances, (1987),
J. Fluid Mech., Vol.184, pp.75-99.

Lee, S., Yates, G. T., and Wu, T. Y., Experiments and analyses of upstream-advancing
solitary waves generated by moving disturbances, (1989), J. Fluid Mech., Vol.199,
pp.569-593.

また 内部波に関するものとして

Grimshaw, R. H. J. & Smyth, N., Resonant flow of a stratified fluid over topography,
(1986), J. Fluid Mech., Vol.169, pp.429-464.

などもある。

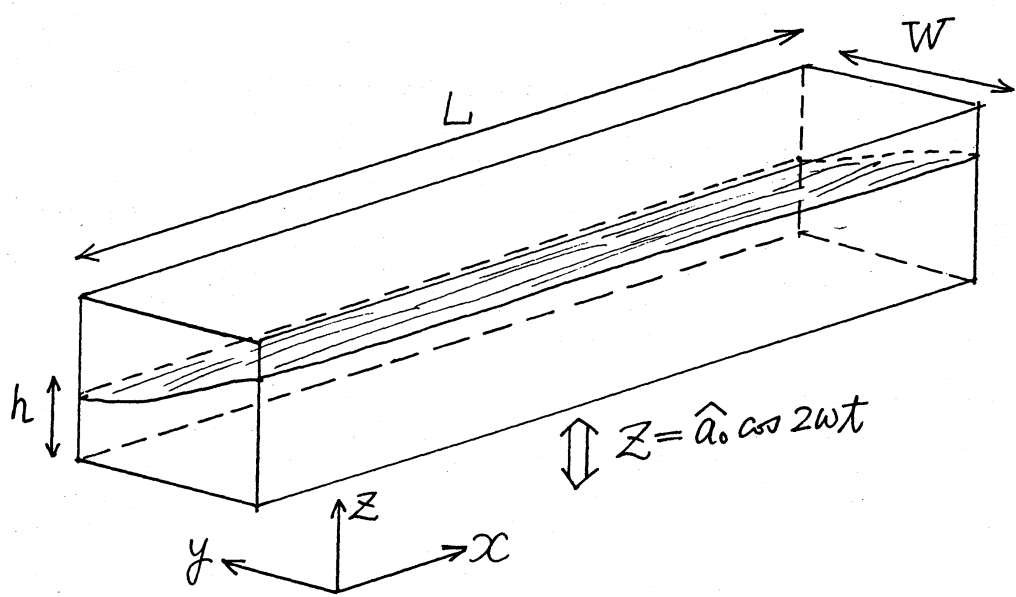


図 1

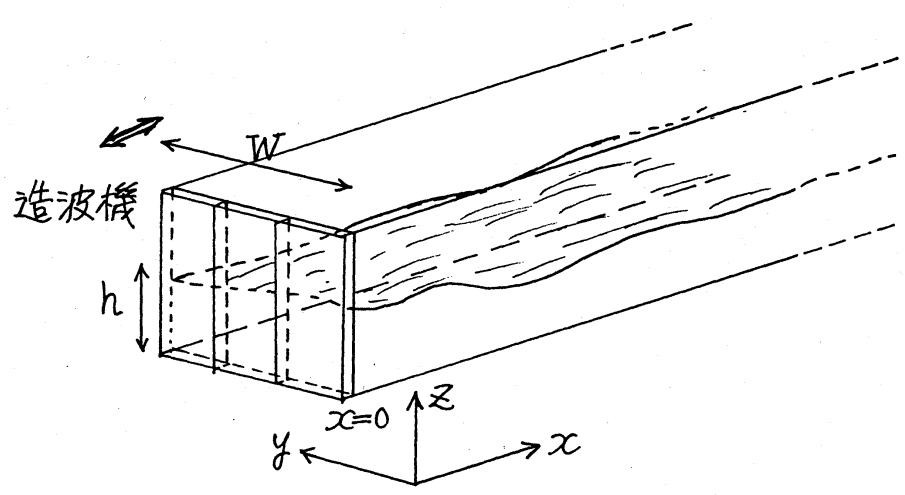


図 2

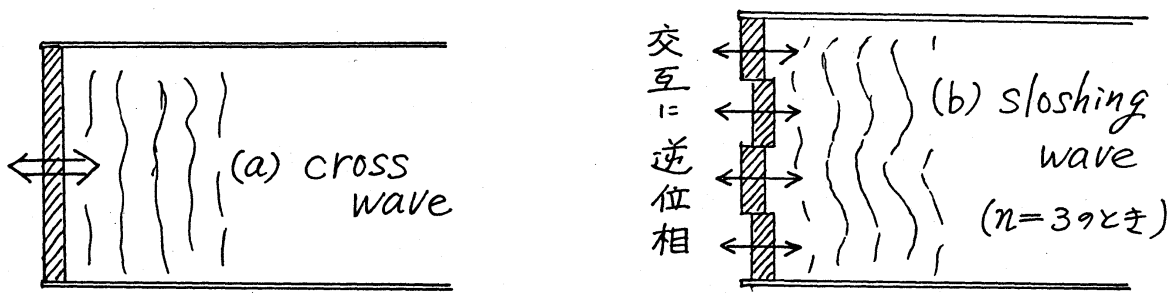


図 3