

極小部分多様体の次数について

筑波大 数学研究科 間下 克哉

序. (M, g) を既約なコンパクト対称空間とする。 (M, g) の
 ラプラシアン Δ の第 k 固有値を λ_k , $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, λ_k に対
 応する固有空間を V^k で表わす。 V^k の正規直交基底により,
 $(M, (\lambda_k/m)g)$ の V^k の単位球面内への極小はめこみ $\underbrace{X_k}_{X_k}$ が定められ
 る。do Carmo and Wallach [2] は M が球面 S^n の場合に X_k の次数
 が k であることを示した。 $M = S^n$ の場合 V^k の元は, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の斉
調和 k 次多項式を S^n 上に制限して得られる [1]。従って X_k のは
 めこみの次数は V^k の元を引き起こす多項式の次数と一致して
 いる。Wallach [9] は M が複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ ($n \geq 2$) のとき
 X_1 の次数は 2 であると述べている。 S^{2n+1} を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の単位球面
 とし, $\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ を Hopf fibration とする。 $M = \mathbb{CP}^n$ のと
 き V^k の元は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の (k, k) 型の調和多項式を S^{2n+1} 上に制限し
 たものから π によって引き起こされる [1]。よって $M = \mathbb{CP}^n$ の
 ときも X_1 のはめこみの次数は, V^1 の元を引き起こす多項式の

次数と一致している。上述のことから $M = \mathbb{C}P^n$ のとき X_k のはめこみの次数は $2k$ であることが予想される。一般に球面を除くコンパクトな階数 1 の対称空間について次の定理が得られる。

定理. M を実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ ($n \geq 1$), 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ ($n \geq 2$), 四元数射影空間 $\mathbb{Q}P^n$ ($n \geq 2$), またはケーリー-射影平面 $\text{Cay}P^2$ とする。このとき X_k の次数は $2k$ である。

四元数体 $\mathbb{Q}$ の直積 $\mathbb{Q}^{n+1}$ を自然な方法で $\mathbb{C}^{2n+2}$ と同一視する。 S^{4n+3} を $\mathbb{Q}^{n+1}$ 内の単位球面とし, $\pi: S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{Q}P^n$ を Hopf fibration とする。 $M = \mathbb{Q}P^n$ のとき, V^k の元は $\mathbb{C}^{2n+2}$ 上の $S_{\mathbb{Q}}(1)$ -不変な (k, k) 型調和多項式を S^{4n+3} 上に制限したものから π によって引き起こされるから, この場合にも X_k のはめこみの次数は V^k の元を引き起こす多項式の次数と一致している。

本稿では定理を $M = \mathbb{C}P^n$ ($n \geq 2$) の場合について証明する。

§. 1 標準的な極小はめこみ

(M, g) を既約なコンパクト対称空間とする。 (M, g) のラプラシアン Δ の第 k 固有値を λ_k , $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, λ_k に対応する固有空間を V^k で表わす。自然数 k を一つ固定する。 $d\mu$ を M 上

の計量 g から定まる自然な測度で, $\int_M d\mu = \dim V^k = m(k)+1$ となるように正規化されたものとし, V^k の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$\langle f, h \rangle = \int_M f \cdot h \, d\mu, \quad \forall f, h \in V^k$$

により定義する。 $f_0, f_1, \dots, f_{m(k)}$ を V^k の正規直交基底とすれば

$$x_k: M \rightarrow \mathbb{R}^{m(k)+1}; \quad p \mapsto (f_0(p), f_1(p), \dots, f_{m(k)}(p))$$

は, $(M, (\lambda_k/m)g)$ の $\mathbb{R}^{m(k)+1}$ の原点を中心とした単位球 $S_1^{m(k)}$ 内への極小等長は m に m を引き起こしている [8]。 x_k を標準的な極小は m に m とよぶことにする。

(G, K) を M に対応する対称対とする。 G は V^k に

$$(\sigma \cdot f)(p) = f(\sigma^{-1} \cdot p), \quad \forall \sigma \in G, \quad \forall p \in M,$$

により作用する。 $v = \sum_{i=0}^{m(k)} f_i(e_k) f_i$ (e は G の単位元) と

おけば v は K -不変単位ベクトルである。 $\mathbb{R}^{m(k)+1}$ の標準的な基

座 $e_0, e_1, \dots, e_{m(k)}$ をとれば, x_k は $(\mathbb{R}^{m(k)+1})$ 内への写像として

$x_k(p) = \sum_{i=0}^{m(k)} f_i(p) e_i$ と書ける。 $A: \mathbb{R}^{m(k)+1} \rightarrow V^k$ を, $A(e_i) = f_i$

となる等長写像とすれば

$$\begin{aligned}
 A \circ x_k(\sigma K) &= A\left(\sum_{i=0}^{m(k)} f_i(\sigma K) e_i\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{m(k)} (\sigma^{-1} \cdot f_i)(e_k) f_i.
 \end{aligned}$$

σ が V^k 上に引き起こす直交変換の行列を (σ_{ij}) とすれば,

$$\begin{aligned}
 A \circ x_k(\sigma K) &= \sum_{i=0}^{m(k)} \sum_{j=0}^{m(k)} \sigma_{ji} f_j(e_k) f_i \\
 &= \sum_{j=0}^{m(k)} f_j(e_k) \sigma \cdot f_j \\
 &= \sigma \cdot v.
 \end{aligned}$$

A は $\mathbb{R}^{m(k)+1}$ 内の単位球 $S_1^{m(k)}$ と, V^k 内の原点を中心とした単位球 S_1 との等長同型を引き起こすから, 以下我々は x_k を S_1 へのはめこみ

$$x_k: M \longrightarrow S_1; \sigma \cdot K \longmapsto \sigma \cdot v$$

と考えることにする。

§.2 はめこみの次数

この節では equivariant な等長はめこみの次数を定義し, 序で述べた定理を証明するための準備をする。

$x: M^m = G/K \rightarrow \tilde{M}^{n_{cc}}$ を等質空間 M の定曲率空間 $\tilde{M}$ への equivariant な等長はめ込みとする。ここで x が equivariant であるとは、 G から $\tilde{M}$ への等長変換群 $I(\tilde{M})$ への準同型 P で

$$x(\sigma \cdot p) = P(\sigma) \cdot x(p), \quad \forall \sigma \in G, \quad \forall p \in M$$

を満たすものが存在するとき、いう。前節で定義した標準的な極小はめ込みは equivariant であることを注意しておく。

∇ [resp. $\tilde{\nabla}$] を M [resp. $\tilde{M}$] の共変微分としよう。 $x_{*1p}(T_p M) = O_p^1(M)$ とし、 N_{21p} を $T_{x(p)} \tilde{M}$ から $T_{x(p)} \tilde{M}$ における $O_p^1(M)$ の直交補空間への直交射影 $N_{11p}: T_{x(p)} \tilde{M} \rightarrow (O_p^1(M))^\perp$ とする。このとき $p \in M$ における x の第2基本形式 $B_{21p}: T_p M \times T_p M \rightarrow N_p M$ は次式で定められる:

$$B_{21p}(x, y) = [\tilde{\nabla}_x x_* y]^{N_{11p}}, \quad \forall x, y \in T_p M,$$

但 Y は y の M 上での局所的な拡張。この考え方を一般化して $p \in M$ における高次の基本形式 B_{j1p} を次のように帰納的に定義する。 $B_{j1p}: \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{j \text{ 個}} \rightarrow N_p M$ が定義されているものとし

よう。 $O_p^j(M)$ を B_{j1p} の像の生成する線型空間とし、 N_{j1p} を直交射影 $N_{j1p}: T_{x(p)} \tilde{M} \rightarrow (O_p^1(M) + \cdots + O_p^j(M))^\perp$ とする。このとき

$$B_{j+1/p}(u_0, u_1, \dots, u_j) = [\tilde{\nabla}_{u_0}(B_j(u_1, \dots, u_j))]^{N_{j+1/p}}, \quad \forall u_0, u_1, \dots, u_j \in T_p M$$

但 U_i ($1 \leq i \leq j$) は u_i の M 上での局所的な拡張。 B_j ($j \geq 2$) が法束 $N(M)$ に値を持つ $(0, j)$ -テンソル場であることは帰納的に証明できる。さらに次のことがわかる。

補題 1. (1) $B_{j/p} : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{j\text{-個}} \rightarrow N_p M, \quad j \geq 2,$

は対称な多重線型写像。

(2) B_j は G -不変, 即ち

$$B_{j/p}(\sigma \cdot u_1, \dots, \sigma \cdot u_j) = \rho(\sigma) \cdot B_{j/p}(u_1, \dots, u_j)$$

$$\forall \sigma \in G, \quad \forall u_1, \dots, u_j \in T_p M.$$

証明は省略する。例えば [5] p.136 参照。

$O_p^d(M) \neq 0, \quad O_p^{d+1}(M) = 0$ となる d が存在する。 x が equivariant

であることから d は $p \in M$ のとり方によらない。 d をはめこみ x の 次数 とよぶ。次数の定義は $p \in M$ のとり方によらないから、以下我々は原点 $0 = e_K$ における基本形式 $B_{j/ek}$ のみを考える。

補題 1 (1) によって $B_{j/ek}$ は $T_{ek} M$ の対称積 $S^j(T_{ek} M)$ 上に拡張される。 $T_{ek} M$ への K のイソトロピー作用を $S^j(T_{ek} M)$ 上に自然に拡張すれば補題 1 (2) から次の補題を得る。

補題 2. $B_{j/ek} : S^j(T_{ek} M) \rightarrow O_{ek}^j(M)$ は K -準同型。

は μ を α が full, 即ち $\alpha(M)$ が $\tilde{M}$ の全測地的な真の部分多様体には含まれないとする。このとき Erbacher [3] の定理を用いることによって次の補題を得る。

補題 3. d を full, equivariant な μ を α の次数とすれば,

$$(2.1) \quad T_{\alpha(e_k)} \tilde{M} = O_{e_k}^1(M) + O_{e_k}^2(M) + \cdots + O_{e_k}^d(M).$$

ここで前節の標準的な極小 μ が full, equivariant であることを注意してみよう。

さらに α が極小 μ であるとしよう。 $E_1, E_2, \dots, E_m$ を原点のまわりの直交枠の場としよう。 $E_i(e_k) = e_i$ とおく。 α が極小だから $\sum_{i=1}^m B_2(E_i, E_i) = 0$ 。 X_j ($j=1, 2, \dots$) を 0 のまわりの任意のベクトル場とする。 $\sum_{i=1}^m B_2(E_i, E_i) = 0$ を逐次微分することにより次を得る:

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^m B_k(X_1, \dots, X_{k-2}, X_i, X_i) = 0, \quad k \geq 2.$$

(2.2) から直ちに次の補題が導かれる。

補題 4. α を equivariant な極小 μ とする。 $e_1, \dots, e_m$ を $T_p M$ の直交枠とし, $r = \sum_{i=1}^m e_i \cdot e_i \in S^2(T_p M)$ とする。このとき

$$(2.3) \quad \text{Ker } B_{j(e_k)} \supset r \cdot S^{j-2}(T_{e_k} M), \quad j \geq 2.$$

$P_j(\text{Tek } M) \ (j \geq 0)$ を $\text{Tek } M$ 上の齊 j 次多項式全体のなる空間とする。 K の $P_j(\text{Tek } M)$ への作用を次のように定める:

$$(\sigma \cdot P)(x) = P(\sigma^{-1} \cdot x), \quad \forall \sigma \in G, \quad \forall x \in T_{\text{ek}} M.$$

α のとき $x \in T_{\alpha}M$ に対して $P_j(T_{\alpha}M)$ の元 P_x , $P_x(y) = g(x, y)$,
 を対応させる写像は K -同型である。この同型を拡張して
 $S^j(T_{\alpha}M)$ と $P_j(T_{\alpha}M)$ との K -同型を得る。 $H_j(T_{\alpha}M)$ を $T_{\alpha}M$ 上の
 各 j 次調和関数全体のなる空間とし、上の K -同型により、

$$= \sum_{i=1}^m e_i \cdot e_i \in S^2(T_{\alpha}M)$$
 に対応する多項式を $\tilde{r}$ で表わすことに
 する。このとき $P_j(T_{\alpha}M)$ は K -不変部分空間の直和

$$(2.4) \quad P_j(\text{Tek } M) = \begin{cases} H_j(\text{Tek } M) & , \quad j = 0, 1 \\ H_j(\text{Tek } M) + \tilde{r} \cdot P_{j-2}(\text{Tek } M) & , \quad j \geq 2 \end{cases}$$

に分解される。

§.3 調和多項式の空間 $S^j(\tau_{ek}(\mathbb{C}P^n))$ の分解.

この節では M が複素射影空間のときの $H_j(T_{\text{ex}} M)$ の分解について述べる。§.3, §.4 を通して次の記号を用いる。

$$G = SU(n+1)$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\det \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \mid \sigma \in U(n) \right\}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \mid \sigma \in SU(n) \right\}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1)$$

$$\mathfrak{K} = \left\{ \begin{pmatrix} -\text{trace } X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \mid X \in \mathfrak{u}(n) \right\}$$

$$\mathfrak{l} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \mid X \in \mathfrak{u}(n) \right\}$$

$$\mathfrak{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{z}_1 & \cdots & -\bar{z}_n \\ z_1 & & & \\ \vdots & & \bigcirc & \\ z_n & & & \end{pmatrix} \mid z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathfrak{f} = \left\{ \begin{pmatrix} F_1 x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_1 x_{n+1} \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}$$

$$\mathfrak{f}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & F_1 x_2 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & F_1 x_{n+1} \end{pmatrix} \mid x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}, \sum_{i=2}^{n+1} x_i = 0 \right\}$$

ここで G/K は複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ と同型で、 $\mathfrak{f}$ は $\mathbb{CP}^n$ の原点における接空間と自然に同一視される。 $\mathfrak{f}$ [resp. $\mathfrak{f}'$] 上の 1 形

式 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ [resp. $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$] を次のように定める:

$$\lambda_i \left(\begin{bmatrix} Fx_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Fx_{n+1} \end{bmatrix} \right) = x_i \quad [\text{resp. } \lambda'_i \left(\begin{bmatrix} 0 & Fx_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & & Fx_{n+1} \end{bmatrix} \right) = x_{i+1}].$$

$\mathfrak{g}$ [resp. $\mathfrak{g}'$] 上の 1 形式全体の空間に次のような併書式順序を導入する。

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0 > \lambda_{n+1} \quad [\text{resp. } \lambda'_1 > \lambda'_2 > \dots > \lambda'_{n-1} > 0 > \lambda'_n]$$

$\mathfrak{g}$ の元 $\begin{bmatrix} 0 & -\bar{z}_1 & \dots & -\bar{z}_n \\ z_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ z_n & & & \end{bmatrix}$ に $\mathbb{C}^n$ の元 $(z_1, \dots, z_n)$ を対応させる写像は, K の $\mathfrak{g}$ の イソトロピー作用が随伴作用に等しいことに注意すれば,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^t \bar{z} \\ \hline z & 0 \end{array} \right) \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t \bar{z} \\ \hline z & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma^{-1} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t \bar{z} \sigma^{-1} \\ \hline \sigma z & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

だから, $SU(n)$ 同型である。そこで我々は $H_j(\text{Tek } \mathbb{C}P^n)$ のかわりに, $\mathbb{C}^n$ 上の調和多項式の空間 $H_j(\mathbb{C}^n)$ の $SU(n)$ -既約分解を考える。

$\mathbb{C}^n$ 上の多項式 P が (p, q) 型であるというの

$$(3.1) \quad P(cz_1, \dots, cz_n, \overline{cz_1}, \dots, \overline{cz_n}) = c^p \overline{c}^q P(z_1, \dots, z_n, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}),$$

$$\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

をみたすことである。 $H_j(\mathbb{C}^n)$ の元で (p, q) 型であるものの全体を $H_j^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ とおこう。ここで明らかに $p+q=j$ である。 W^c で実ベクトル空間 W の複素化を表わすことにする。

補題 5. $(H_j^{p,q}(\mathbb{C}^n))^c$ は $SU(n)$ -既約で、その最高ウェイトは $q\lambda_1 - p\lambda_n$ である。

証明は [7] §.14 参照。

$\mathbb{CP}^n$ のラプラシアン Δ の第 k 固有値に対応する固有空間 V^k は、 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の (k, k) 型の調和多項式全体のなす空間 $H_{2k}^{k,k}(\mathbb{C}^{n+1})$ と G -同型 [1] だから、 $(V^k)^c$ は G -既約でその最高ウェイトは $k(\lambda_1 - \lambda_{n+1})$ である。

$H_j^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ に L -同型な $H_j(\text{TekCP}^n)$ の部分空間を $H_j^{p,q}(\text{TekCP}^n)$ と書くことにしよう。このとき (2.4) と補題 5 から次を得る。

補題 6. $(P_j(\text{TekCP}^n))^c$ は、 L -不変部分空間の直和

$$(P_j(\text{TekCP}^n))^c = \begin{cases} H_0^{0,0}(\text{TekCP}^n), & j=0 \\ H_1^{1,0}(\text{TekCP}^n) + H_1^{0,1}(\text{TekCP}^n), & j=1 \\ \sum_{p+q=j, p,q \geq 0} H_j^{p,q}(\text{TekCP}^n) + \tilde{r} \cdot (P_{j-2}(\text{TekCP}^n))^c, & j \geq 2 \end{cases}$$

に分解される。但、 $H_j^{p,q}(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n)$ は L -既約でその最高ウェイトは $q\lambda_1' - p\lambda_n'$ である。

§.4 定理の証明

この節では序に述べておいた定理を複素射影空間の場合について証明する。

$S^j(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n)$ と $P_j(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n)$ とは K -同型であったからこの同型により我々は基本形式 $B_{j|\text{ek}}$ を $P_j(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n)$ から $O_{\text{ek}}^j(\mathbb{CP}^n)$ への K -準同型と見なすことにする。以下我々はこれを複素化した $B_{j|\text{ek}} : (P_j(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}} \rightarrow (O_{\text{ek}}^j(\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}$ を考える。 $(P_j(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}$ は補題6に示したように、 L -不変部分空間に分解されている。補題4から $B_{j|\text{ek}}(\tilde{F} \cdot (P_{j-2}(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}) = 0$ である。 $(H_j^{p,q}(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}$ は L -既約だから、 $B_{j|\text{ek}}$ は $(H_j^{p,q}(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}$ 上恒等的に0かまたは $(O_{\text{ek}}^j(\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}$ の中への同型写像。 j が2以上の整数全体を動くときの、 $B_{j|\text{ek}}((H_j^{p,q}(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}) \neq 0$ となる組 (p, q) の全体を I としよう。このとき I の定義から

$$(4.1) \quad (O_{\text{ek}}^j(\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}} \cong \sum_{(p,q) \in I, p+q=j} (H_j^{p,q}(T_{\text{ek}}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}, \quad j \geq 2$$

となることがわかる。 $O_{\text{ek}}^j(\mathbb{CP}^n)$, $j \geq 1$, は V^k 内の単位球 S_1

$\underbrace{= v}$
 の $x_k(e_k)$ における接空間の部分空間だから、これを自然に v^k の部分空間と見なせば、補題3から次が得られる:

$$(4.2) \quad (v^k)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}v + (O_{ek}^1(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + (O_{ek}^2(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + \cdots + (O_{ek}^d(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$$

但 d は x_k の次数とする。 $(O_{ek}^1(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ は $(T_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ と $x_k * 1_{ek}$ により L -同型だから、それはまた $(P_1(T_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}})$ と同型。よって補題6により

$$(4.3) \quad (O_{ek}^1(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} \cong (H_1^{1,0}(T_{ek}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}} + (H_1^{0,1}(T_{ek}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}}.$$

従って (4.1), (4.2), 及び (4.3) から $(v^k)^{\mathbb{C}}$ の L -既約分解

$$(4.4) \quad (v^k)^{\mathbb{C}} \cong (H_0^{0,0}(T_{ek}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}} + (H_1^{1,0}(T_{ek}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}} \\ + (H_1^{0,1}(T_{ek}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}} + \sum_{(p,q) \in I, p+q=j} (H_j^{p,q}(T_{ek}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}}$$

を得る。ここで $d = \max_{(p,q) \in I} (p+q)$ であることは明らかである。Ikeda and Taniguchi [4] の結果によつて $(v^k)^{\mathbb{C}}$ の K -既約分解を知ることができる。それによつて $\max_{(p,q) \in I} (p+q)$ を計算することができるが、ここでは別証明を与えよう。まず次の(*)を示そう。

$$(*) \quad \max_{(p,q) \in I} (p+q) \geq 2k.$$

(*) の証明. $\exp tH$ を $H = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}\lambda_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{-1}\lambda_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}'$ の生

成する L の 1 径数部分群と取る。このとき $w = (\bar{z}^2)^k (z^{n+1})^k \in (V^k)^{\mathbb{C}}$ に対して

$$\begin{aligned} H \cdot w &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp tH \cdot w) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e^{\sqrt{-1}\lambda_2 t} \bar{z}^2)^k (e^{\sqrt{-1}\lambda_{n+1} t} z^{n+1})^k \\ &= \sqrt{-1} k (\lambda'_1 - \lambda'_n) (H) w. \end{aligned}$$

$\pi_{p,q}$ を直和分解 (4.4) に関する射影 $\pi_{p,q}: (V^k)^{\mathbb{C}} \rightarrow H_j^{p,q}(T_{\mathbb{C}K}(\mathbb{C}P^n))$ とする。 $\pi_{p,q}$ は L -準同型だから

$$(4.5) \quad H \cdot \pi_{p,q}(w) = \pi_{p,q}(H \cdot w) = \sqrt{-1} k (\lambda'_1 - \lambda'_n) (H) w.$$

$w \neq 0$ だから $\pi_{p,q}(w) \neq 0$ となる $(p,q) \in I$ が存在する。この (p,q) に対する L -既約空間 $(H_j^{p,q}(T_{\mathbb{C}K}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}}$ の最高ウェイトは $\underbrace{= (p+q)\lambda'_1 + p\lambda'_2 + \dots + p\lambda'_{n-1}}_{q\lambda'_1 - p\lambda'_n}$ である。 (4.5) は $k(\lambda'_1 - \lambda'_n) = 2k\lambda'_1 + k\lambda'_2 + \dots + k\lambda'_{n-1}$ が $(H_j^{p,q}(T_{\mathbb{C}K}(\mathbb{C}P^n)))^{\mathbb{C}}$ のウェイトであることを示しているから、

$$2k \leq p+q \leq \max_{(p,q) \in I} (p+q)$$

よ、て(*)が示された。定理の証明のためには次の(**)を示せばよい。

$$(**) \quad \max_{(p,q) \in I} (p+q) \leq 2k$$

(**)の証明. $(V^k)^G$ の G -加群 [resp. L -加群] としてのウェイトの全体を Λ [resp. M] とし, $(V^k)^G$ の G -加群 [resp. L -加群] としてのウェイト空間分解を

$$(V^k)^G = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{V}_\lambda \quad [\text{resp. } (V^k)^G = \sum_{\mu \in M} \tilde{V}_\mu]$$

とする。かつ、 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\lambda|_{\mathfrak{g}'} \in M$ で、 $\tilde{V}_{\lambda|_{\mathfrak{g}'}} \supset \tilde{V}_\lambda$ は明らかである。逆に、 $\mu \in M$ に対して $\mu = \lambda|_{\mathfrak{g}'}$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。もしそうでないとするれば $\tilde{V}_\mu$ は $(V^k)^G$ に含まれないことになり矛盾となる。

$d_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$) とおけば、任意の $\lambda \in \Lambda$ は非負整数 m_i を係数として

$$(4b) \quad \lambda = \lambda_0 - \sum_{i=1}^n m_i d_i, \quad \text{但 } \lambda_0 = k(\lambda_1 - \lambda_{n+1})$$

と一意的に書ける。任意にとった $(p,q) \in I$ に対して $\lambda \in \Lambda$ を

$$\lambda | f' = q \lambda'_1 - p \lambda'_n = (p+q) \lambda'_1 + p \lambda'_2 + \cdots + p \lambda'_{n-1}$$

となるようにとる。(4.6)により

$$\begin{aligned} \lambda | f' &= (\lambda_0 - \sum_{i=1}^n m_i d_i) | f' \\ &= (k+m_1-m_2-m_n) \lambda'_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (k+m_i-m_{i+1}+m_n) \lambda'_i. \end{aligned}$$

λ のとり方から

$$(4.7) \quad k + m_1 - m_2 - m_n = p + q.$$

$\hat{S}_{d_1}$ を d_1 に関する f^* の鏡映とする。 $\hat{S}_{d_1}$ は $\mathfrak{g}$ のワイル群の元だから, $\hat{S}_{d_1}(\lambda)$ はまた Λ に含まれる。簡単な計算により

$$\hat{S}_{d_1}(\lambda) = \lambda_0 - (k - m_1 + m_2) d_1 - \sum_{i=2}^n m_i d_i$$

を得る。 $\hat{S}_{d_1}(\lambda)$ の上の表現における d_1 の係数 $k - m_1 + m_2$ は,

$\hat{S}_{d_1}(\lambda) \in \Lambda$ より $k - m_1 + m_2 \geq 0$ 。(4.7)とあわせて

$$p + q \leq 2k - m_n \leq 2k.$$

(p.9) は $\mathbb{R}$ の任意の元だから (**) が示された。

以上で序に述べた定理の複素射影空間の場合の証明が終った。四元数射影空間及びケーリー射影平面についても同様な方法で証明できる。補題6に対応する分解は Smith [6] により与えられている。

参考文献

- [1] Berger, M., Gauduchon, P. et Mazet, E., Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math., 194, Springer, 1971.
- [2] do Carmo, M. P. and Wallach, N., Minimal immersions of spheres into spheres. Ann. of Math., 93 (1971), 43-62.
- [3] Erbacher, J., Reduction of the codimension of an isometric immersions. J. Diff. Geometry, 5 (1971), 333-350.
- [4] Ikeda, A. and Taniguchi, Y., Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$. Osaka J. Math., 15 (1978), 515-546.
- [5] Mashimo, K., Degree of the standard isometric minimal immersions of complex projective spaces into spheres. Tsukuba J. Math., 4 (1980), 133-145.

- [6] Smith, R. T., The spherical representations of groups transitive on S^n . Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 307-325.
- [7] Takeuchi, M., 現代の球関数. 岩波書店, 1974.
- [8] Takahashi, T., Minimal immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan., 18 (1966), 380-385.
- [9] Wallach, N., Minimal immersions of symmetric spaces into spheres. Pure and Applied Math. Series, 8, Marcel Dekker, 1972.