

双対単体法によって生成される基底解の数の 上界について*

北原知就[†]，水野眞治[‡]

2011 年 11 月

概要

本稿では，Dantzig の規則を採用した双対単体法によって生成される異なる実行可能基底解の個数の上界を与える．得られた上界は北原-水野 [3] による主単体法の上界に対応している．得られた上界を最大流問題に適用すると，強多項式の上界となる．

1 導入

線形計画問題 (LP) に対する単体法は Dantzig[1] によって提案された．単体法は実用的には非常に効率的な解法であることが知られているが，その反復回数の良い上界は長い間知られていない．この方面の研究があまり行われてこなかった最大の理由は，Klee-Minty[6] による研究である．彼らは，特殊な LP に対し，単体法が指数回の反復を要することを示した．

北原-水野 [3] は Dantzig の規則を採用した主単体法によって生成される異なる実行可能基底解の数の上界を示した．彼らはマルコフ決定問題に対する Ye[7] の解析を一般の LP に拡張し，上界

$$n \lceil m^{\frac{\gamma}{\delta}} \log(m^{\frac{\gamma}{\delta}}) \rceil$$

を得た．ここで， m は問題の等式制約の数， n は非負変数の個数を表し， δ と γ はそれぞれすべての実行可能基底解の 0 でない要素の最小値と最大値を表す．また

*本稿は [5] の内容を再構成・加筆してまとめたものである．

[†]東京工業大学大学院社会理工学研究科 〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W9-62
kitahara.t.ab@m.titech.ac.jp

[‡]東京工業大学大学院社会理工学研究科 〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W9-58
mizuno.s.ab@m.titech.ac.jp

実数 $r \in \mathbb{R}$ に対して $\lceil r \rceil$ は r より大きい最小の整数を表す. 問題が非退化であるとき, 得られた上界は反復回数の上界となる. 北原ら [2] は上界が

$$(n - m) \lceil \min\{m, n - m\} \frac{\gamma}{\delta} \log(\min\{m, n - m\} \frac{\gamma}{\delta}) \rceil$$

に改良できることを示した. また, 北原-水野 [4] は生成される実行可能基底解の数が $\frac{\gamma}{\delta}$ であるような問題例を構成し, 得られた上界がかなりタイトであることを明らかにした.

本稿では, Dantzig の規則を採用した双対単体法によって生成される異なる実行可能基底解の数の上界を示す. 得られた上界は

$$m \lceil \min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D} \log(\min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D}) \rceil$$

である. ここで, δ_D, γ_D はそれぞれすべての双対問題の実行可能基底解の正の要素の最小値および最大値を表す. この上界を最大流問題に適用すると,

$$(|V| + |E| - 1) \lceil (|E| - |V| + 2) \log(|E| - |V| + 2) \rceil$$

となる. ここで, E は枝の集合を, V は頂点の集合を表す. これは強多項式の上界であり, 主単体法の上界を適用した場合よりも良いものが得られている.

2 双対単体法

本稿では, 次の線形計画問題 (LP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

を考える. ここで $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ は与えられたデータであり, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が変数ベクトルである. 問題 (1) の双対問題は,

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

となる. ここで, $(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ が変数ベクトルである. 本稿では, 以下の3つの仮定を置く.

1. $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$.
2. 問題 (1) と問題 (2) は最適解を持つ.

3. 問題 (2) の初期実行可能基底解が得られている.

添え字の集合 $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$ が与えられた時, 制約行列 $\mathbf{A}^T$, 制約ベクトル $\mathbf{c}$ および変数ベクトル $\mathbf{s}$ を B とその補集合 $N = \{1, 2, \dots, n\} - B$ によって以下のよう
に分割する.

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^T \\ \mathbf{A}_N^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N \end{bmatrix}.$$

すると問題 (2) は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{A}_B^T \mathbf{y} + \mathbf{s}_B = \mathbf{c}_B, \\ & \quad \mathbf{A}_N^T \mathbf{y} + \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N, \\ & \quad \mathbf{s}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathbf{A}_B$ が正則であるとき, 添え字集合 B を基底といい, その補集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ を非基底という. このとき, B と N に対応する基底解は,

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{c}_B, \quad \mathbf{s}_B = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{c}_B$$

となる. もし $\mathbf{s}_N \geq \mathbf{0}$ であれば上の解は実行可能基底解となる. 本稿では, $(\mathbf{s}_B, \mathbf{s}_N)$ を基底 B と非基底 N に対応した双対実行可能基底解と呼ぶ. すべての双対実行可能基底解の正の要素の最小値と最大値をそれぞれ δ_D と γ_D とする. このとき, 任意の双対実行可能基底解 $(\mathbf{s}_B, \mathbf{s}_N)$ と任意の $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, $s_j \neq 0$ ならば

$$\delta_D \leq s_j \leq \gamma_D$$

が成り立つ. δ_D および γ_D は問題 (2) の実行可能領域を決定する $\mathbf{A}$ と $\mathbf{c}$ に依存する量であるが, 目的関数ベクトル $\mathbf{b}$ には依存しない.

B^t を双対単体法の t 反復目の基底とし, $N^t = \{1, 2, \dots, n\} - B^t$ とする. このとき, 問題 (3) は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathbf{b}^T (\mathbf{A}_{B^t}^T)^{-1} \mathbf{c}_{B^t} - \bar{\mathbf{b}}_{B^t}^T \mathbf{s}_{B^t}, \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{s}_{N^t} = \mathbf{c}_{N^t} - \mathbf{A}_{N^t}^T (\mathbf{A}_{B^t}^T)^{-1} \mathbf{c}_{B^t} + \bar{\mathbf{A}}_{N^t} \mathbf{s}_{N^t}, \\ & \quad \mathbf{s}_{B^t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}_{N^t} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, $\bar{\mathbf{b}}_{B^t} = \mathbf{A}_{B^t}^{-1} \mathbf{b}$ および $\bar{\mathbf{A}}_{N^t} = \mathbf{A}_{B^t}^{-1} \mathbf{A}_{N^t}$ である. この形式は問題 (2) の基底 B^t に対応する辞書と呼ばれる. 目的関数における $\mathbf{s}_{B^t}$ の係数ベクトル $\bar{\mathbf{b}}_{B^t}$ を縮約コストベクトルと呼ぶ. もし $\bar{\mathbf{b}}_{B^t} \geq \mathbf{0}$ ならば, 現在の解が最適解である. そうでない場合はピボットを行う. すなわち, 双対基底変数 (入力変数) s_j ($j \in B^t$) を一つ選び, s_j をある双対非基底変数 (出力変数) s_k ($k \in N^t$) の値が 0 になるまで増加させる. そして, 二つの変数を交換する. 入力変数の選び方にはさまざまあるが,

本稿では Dantzig の規則を採用する. Dantzig の規則では, 縮約コストベクトルの最小要素に対応する基底変数を入力変数に選ぶ. つまり,

$$j^t \in \arg \min_{j \in B^t} \bar{b}_j$$

となる添え字 j^t を選び, s_{j^t} を入力変数とする.

3 双対単体法の解析

本節では, Dantzig の規則を採用した双対単体法について成り立つ性質を紹介する. 詳しい証明は北原-水野 [5] を参照していただきたい.

次の定理は, 単体法の実行により基底解が更新されるとき, 目的関数値と最適値との差が定比率以下で減少することを示している.

Theorem 3.1 z^* を問題 (2) の最適値とし, $\{(\mathbf{y}^t, \mathbf{s}^t)\}$ を Dantzig の規則を採用した単体法によって生成される点列とする. もし $\mathbf{s}^{t+1} \neq \mathbf{s}^t$ ならば,

$$z^* - \mathbf{b}^T \mathbf{y}^{t+1} \leq (1 - \frac{\delta_D}{\min\{m, n - m\} \gamma_D})(z^* - \mathbf{b}^T \mathbf{y}^t)$$

が成り立つ.

次の命題は, 現在の解が最適解でないときに, 正の値を取る非基底変数の中に, その上界が目的関数値と最適値との差に比例して減少するものがあることを示している. 以下では, $(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*)$ を問題 (2) の最適実行可能基底解とし, この解に対応する基底を B^* とする.

Lemma 3.1 $(\mathbf{y}^t, \mathbf{s}^t)$ を Dantzig の規則を採用した単体法によって生成される t 反復目の点とする. $(\mathbf{y}^t, \mathbf{s}^t)$ が最適でないならば, ある添え字 $\bar{j} \in B^* \cap N^t$ が存在して, $s_{\bar{j}}^t > 0$ かつ任意の問題 (2) の実行可能解 $(\mathbf{y}, \mathbf{s})$ に対して,

$$s_{\bar{j}} \leq \min\{m, n - m\} \frac{z^* - \mathbf{b}^T \mathbf{y}}{z^* - \mathbf{b}^T \mathbf{y}^t} s_{\bar{j}}^t$$

が成り立つ.

定理 3.1 と命題 3.1 から, 次の命題が成り立つ.

Lemma 3.2 $(\mathbf{y}^t, \mathbf{s}^t)$ を Dantzig の規則を採用した単体法によって生成される t 反復目の点とする. $(\mathbf{y}^t, \mathbf{s}^t)$ は問題 (2) の最適解ではないとする. このとき, 次の 2 つの条件を満たす添え字 $\bar{j} \in B^* \cap N^t$ が存在する.

1. $s_{\bar{j}}^t > 0$.

2. t 反復目以降に $\lceil \min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D} \log(\min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D}) \rceil$ 個の異なる実行可能基底解が生成されるならば、それ以降 s_j の値は 0 となる。

命題 3.2 で述べられているイベントは B^* に含まれる添え字について高々 1 回しか起こらない。したがって、次の結果が得られる。

Theorem 3.2 問題 (2) が最適解を持つとする。このとき、*Dantzig* の規則を採用した双対単体法を適用すると、生成される異なる実行可能基底解の数は高々

$$m \lceil \min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D} \log(\min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D}) \rceil$$

個となる。

問題 (2) が非退化であるとする、任意の t に対して、 $(\mathbf{y}^{t+1}, \mathbf{s}^{t+1}) \neq (\mathbf{y}^t, \mathbf{s}^t)$ となるので、定理 3.2 の上界は反復回数の上界となる。

Corollary 3.1 問題 (2) が最適解をもち、非退化であると仮定する。このとき、*Dantzig* の規則を採用した双対単体法は高々

$$m \lceil \min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D} \log(\min\{m, n - m\} \frac{\gamma_D}{\delta_D}) \rceil$$

回の反復で終了する。

4 最大流問題

この節では前節の結果を最大流問題に適用し、生成される異なる実行可能基底解の数について強多項式の上界が得られることを示す。

最大流問題では、与えられたグラフに対し、容量制約を満たしながら始点 s から終点 t までの最大流 f を求める。 V が頂点の集合で、 E が枝の集合であるグラフ $G = (V, E)$ が与えられているとする。このとき、最大流問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \max \quad & f, \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{j:(j,s) \in E} x_{js} = f, \\ & \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = 0, \quad \forall i \neq s, t, \\ & \sum_{j:(t,j) \in E} x_{tj} - \sum_{j:(j,t) \in E} x_{jt} = -f, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E. \end{aligned} \tag{5}$$

ここでは各枝の容量 u_{ij} は整数であるとする。最大流問題の双対問題は最小カット問題であることはよく知られている。最小カット問題の実行可能基底解の各要素は 0 か 1 であるので、 $\delta_D = \gamma_D = 1$ となる。スラック変数の導入により問題 (5) を等式標準形に直すと、等式制約の個数は $(|V| + |E| - 1)$ で、非負変数の個数は $2|E| + 1$ となる。以上の事実と定理 3.2 により、次の系が成り立つ。

Corollary 4.1 最大流問題に対して *Dantzig* の規則を採用した双対単体法を適用すると、生成される異なる実行可能基底解の個数は高々

$$(|V| + |E| - 1) \lceil (|E| - |V| + 2) \log(|E| - |V| + 2) \rceil$$

である.

北原ら [2] は最大流問題に対して *Dantzig* の規則を採用した主単体法を適用すると、生成される異なる実行可能基底解の数が高々

$$(|E| - |V| + 2) \lceil (|E| - |V| + 2) u_{\max} \log((|E| - |V| + 2) u_{\max}) \rceil$$

であることを示した. ここで, $u_{\max} = \max_{(i,j) \in E} u_{ij}$ である. $u_{\max}$ が小さくないとき, この上界よりも Corollary 4.1 の上界のほうが良いことがわかる.

謝辞

本研究の一部は, JSPS 科学研究費の若手研究 (B)23710164 と基盤研究 (A)20241038 の補助を受けて行われた.

参考文献

- [1] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, New Jersey, 1963.
- [2] T. Kitahara, T. Matsui, and S. Mizuno, On the Number of Solutions Generated by Dantzig's Simplex Method for an LP with Bounded Variables, to appear in *Pacific Journal of Optimization*.
- [3] T. Kitahara and S. Mizuno, A Bound for the Number of Different Basic Solutions Generated by the Simplex Method, to appear in *Mathematical Programming*.
- [4] T. Kitahara and S. Mizuno, Klee-Minty's LP and Upper Bounds for Dantzig's Simplex Method, *Operations Research Letters* 39, 2011, pp. 88-91.
- [5] T. Kitahara and S. Mizuno, On the Number of Solutions Generated by the Dual Simplex Method, Technical paper, available at http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/SimplexMethod/, 2011.
- [6] V. Klee and G. J. Minty, *How good is the simplex method*, In O. Shisha (ed), Inequalities III, Academic Press, New York, 1972.
- [7] Y. Ye, The Simplex and Policy-Iteration Methods are Strongly Polynomial for the Markov Decision Problem with a Fixed Discount Rate, to appear in *Mathematics of Operations Research*.