

シェル構造の飛移および分岐座屈

東大生研 半谷裕彦

1961年、スパン93.5m、ライズ19m、直径18mの天窓を持つ球形ドームがBucharestに建設された。このドームは、径6cm～10.2cmのパイプを三角形を基本パターンとして網状に配置したもので、配置の形状はLedere's Patternといわれているものであった。1963年、1mの新雪のためにあっけなく座屈崩壊した。この事故は、シェル構造の建設にたずさわる技術者に大きな衝撃を与え、座屈解析の重要性が認識されるとともに多くの研究が開始された。

構造体に静的な外力が作用する場合の荷重-変位曲線（以下、釣合径路と呼ぶ）において、保存系におけ

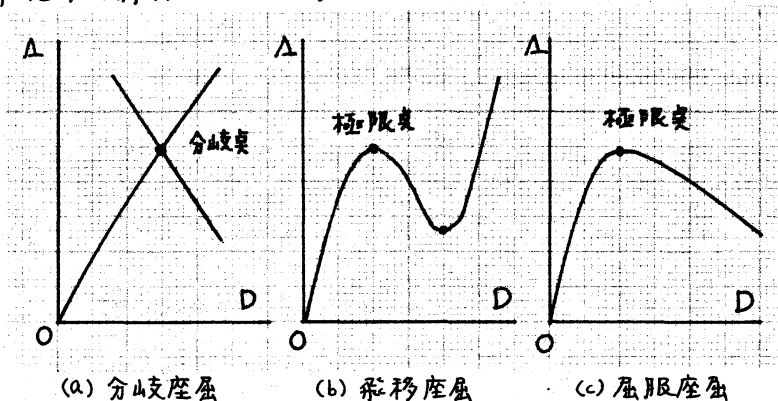


図-1：釣合径路と座屈の種類

る弾性安定問題の対象となる場合を描くと図-1のようになる。実際の構造物の弾性安定問題を解析する場合には、極限点や分岐点についての局所的な内容—発生規準やその性質—などの検討が必要となる。弾性安定解析の釣合径路に沿

った検討事項の主なものを図-2に与える。この図中、 $C(0) \rightarrow$

$C(T)$ への非線形解析は、Karman and Tsienによって端緒が附かれたもので、今日では、コンピュータの処理能力の増大によって、

設計段階においても利用可能な

段階まで到達している。しかし、例えば、図-3に示すように、同じ座屈荷重を持つ場合でも、初期不整の存在などによって、構造物の安全性が極端に異なる場合が発生する。このような事態を検討するためには、図-2に示す $C(T)$ の段階での扱いと座屈後挙動の調査が必要となってくる。Koiter, Thompsonらによって提出、展開された保存系における弾性安

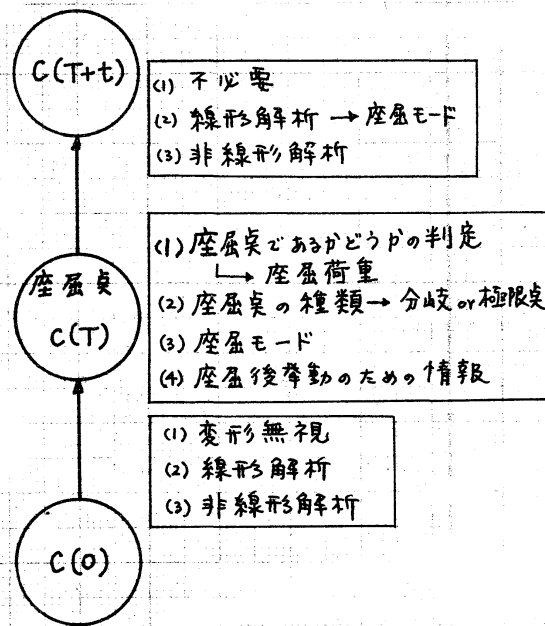


図-2: 釣合径路に沿った弾性安定解析の主な内容

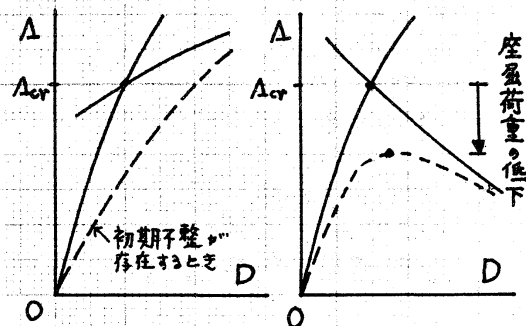


図-3: 初期不整による座屈点の移動

定理論は、上記事項の解析のための基礎を提供している。本講演は、下記文献において発表した弾性安定解析の結果と、解析例を主体に紹介したものである。3.1以下、解法の概略を、係数行列の対角化を含む方法で説明するが、下記文献での解析は、すべて対角化をおこなわない方法を考案しており、実際の数値演算を容易にしている。

- [1] HANGAI, Y. and KAWAMATA, S. : "Nonlinear Analysis of Space Frames and Snap-through Buckling of Reticulated Shell Structures," Proc. IASS Pacific Symposium, 1971, 10.
- [2] HANGAI, Y. and KAWAMATA S. : "Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems by Static Perturbation Method," 生研報告, Vol. 22, No. 5, 1973, 1.
- [3] 半谷, 細野, 国田 : "一般増分法による弾性座屈の解析," 日本建築学会関東支部研究報告集, 1975, 7.
- [4] ENDOU, A., HANGAI, Y. and KAWAMATA, S. : "Post-Bifurcation Analysis of Shallow Spherical Shells under Uniform Pressure," 生産研究, Vol. 26, No. 10, 1977, 10.
- [5] 細野透 : "弧長法による弾性座屈問題の解析," 日本建築学会論文報告集, 第242号, 1976, 4.
- [6] 半谷裕彦 : "構造物の弾性安定解析," 有限要素法の応用, 日本鋼構造協会, 1975, 3. (解説用)

§1 釣合の式とその増分型方程式

構造物に有限要素法、差分法、Galerkin法などを適用して、幾何学的非線形問題における荷重-変位関係式(釣合の式と呼ぶ)を求めると次式となる。

$$f(D, \Lambda) = 0; \quad D: \text{変位ベクトル} \quad (1)$$

Λ : 荷重パラメータ

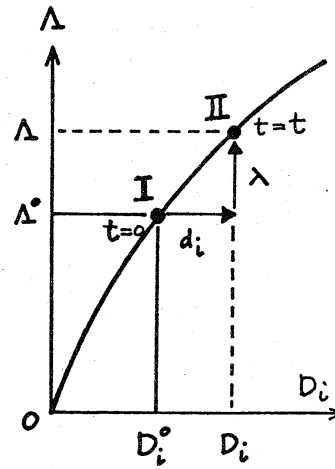


図-4: 釣合経路と増分

図-4に示すように、IおよびIIにおける値を代入すると、

$$f(D^0, \Lambda^0) = 0, \quad f(D^0 + d, \Lambda^0 + \lambda) = 0 \quad (2)$$

Taylor 展開を次のように、IIよりIを引くと、

$$\left[d \frac{\partial}{\partial D} + \lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right] f^0 + \frac{1}{2!} \left[d \frac{\partial}{\partial D} + \lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right]^2 f^0 + \dots = 0 \quad (3)$$

ここで、摂動パラメータ- t を導入し、Iで $t=0$ とおいて d および λ を展開すると

$$d(t) = \dot{d}t + \frac{1}{2!} \ddot{d}t^2 + \dots, \quad \lambda(t) = \dot{\lambda}t + \frac{1}{2!} \ddot{\lambda}t^2 + \dots \quad (4)$$

上式を(3)式に代入し、 t の冪ごとに整理すると

$$\begin{bmatrix} f_{1,1}^0 & f_{1,2}^0 & \dots & f_{1,n}^0 \\ f_{2,1}^0 & f_{2,2}^0 & \dots & f_{2,n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1}^0 & f_{n,2}^0 & \dots & f_{n,n}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \vdots \\ \dot{d}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{1,\lambda}^0 \\ f_{2,\lambda}^0 \\ \vdots \\ f_{n,\lambda}^0 \end{Bmatrix} \dot{\lambda} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} f_{1,1}^0 & f_{1,2}^0 & \dots & f_{1,n}^0 \\ f_{2,1}^0 & f_{2,2}^0 & \dots & f_{2,n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1}^0 & f_{n,2}^0 & \dots & f_{n,n}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \vdots \\ \ddot{d}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{1,\lambda}^0 \\ f_{2,\lambda}^0 \\ \vdots \\ f_{n,\lambda}^0 \end{Bmatrix} \ddot{\lambda} + \begin{Bmatrix} f_{1,i\lambda}^0 \\ f_{2,i\lambda}^0 \\ \vdots \\ f_{n,i\lambda}^0 \end{Bmatrix} \dot{d}_i \dot{\lambda} + 2 \begin{Bmatrix} f_{1,i\lambda}^0 \\ f_{2,i\lambda}^0 \\ \vdots \\ f_{n,i\lambda}^0 \end{Bmatrix} \dot{d}_i \dot{\lambda} + \begin{Bmatrix} f_{1,\lambda\lambda}^0 \\ f_{2,\lambda\lambda}^0 \\ \vdots \\ f_{n,\lambda\lambda}^0 \end{Bmatrix} \dot{\lambda}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

(5)式をマトリクス表示しておくと、

$$[K] \{\ddot{d}\} = \{f\} \ddot{\lambda}, \quad [K] = [k_1, k_2, \dots, k_n] \quad (7)$$

§2 局所線形化による増分法

図-2における $C(0) \rightarrow C(T)$ への非線形解析、および座屈点における情報採集に、(7)式が多用される。本節では、釣合径跡の追跡に用いられる増分法について説明する。

[1] 荷重増分法

パラメータ t とし増分 λ を採用すると、荷重増分型の解析手法となる。

$$t = \lambda : \dot{\lambda} = 1, \ddot{\lambda} = 0, \dots \quad (8)$$

増分区間における線形近似 $\{d\} = \{d\}_\lambda$ と (7) 式より、荷重増分法の基礎式は、

$$[K]\{d\} = \lambda\{f\} \quad (9)$$

$|K| \neq 0$ の時は、 λ に対して $\{d\}$ が決定される ($\{d\} = \lambda[K]^{-1}\{f\}$)。図-5に、荷重増分法による網状シエルの数値解析の結果を示す。荷重増分法では、極限点を越えて釣合径跡を追跡することは不可能である。

[2] 変位増分法

極限点を越えるには、変位増分法が利用出来る。 t とし $\{d\}$ のなかの1個、例えば、 d_1 を選ぶと、

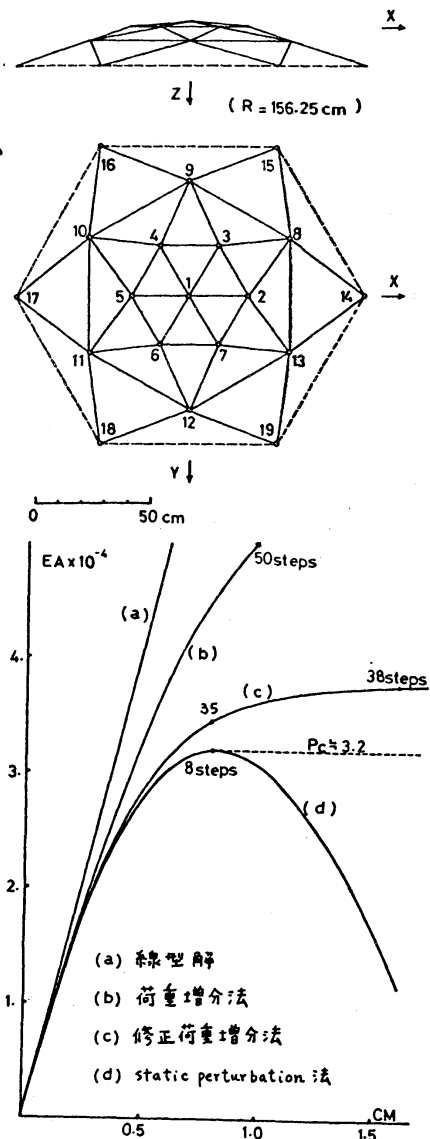


図-5: 1節点Z方向載荷に対する1節点Z方向の変位

$$t=d_1 : \dot{d}_1 = 1, \ddot{d}_1 = 0, \dots \quad (10)$$

が成立するから、(5)式は次の様になる。

$$\begin{bmatrix} f_{1,\lambda} & f_{1,2} & \dots & f_{1,n} \\ f_{2,\lambda} & f_{2,2} & \dots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,\lambda} & f_{n,2} & \dots & f_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \dot{d}_2 \\ \vdots \\ \dot{d}_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{n,1} \end{Bmatrix} \dot{d}_1 \quad (11)$$

簡単に ($\dot{d}_i = \dot{d}_1 d_1, \lambda = \lambda d_1$ を用いる) 、

$$[K_{1,\lambda}] \begin{Bmatrix} \lambda \\ \dot{d}_2 \\ \vdots \\ \dot{d}_n \end{Bmatrix} = \{-k_1\} d_1 \quad (12)$$

上式を解くことにより、変位増分 d_1 に

対応する荷重パラメータの増分 λ と d_1 以外の変位増分 $\{\dot{d}_i\}$

が得られることになる。図-6の網状トラスに、1節点を、そ

れ以外の節点に1の比率のZ方向載荷をすると飛移座屈を発生

する。その解析を変位増分型を利用しておこなった結果を

図-7に示す。(a)は1節点、(b)は2節点のZ方向の動きを示す。

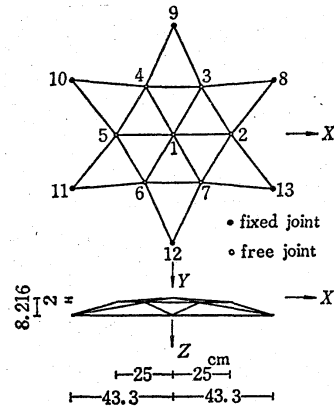
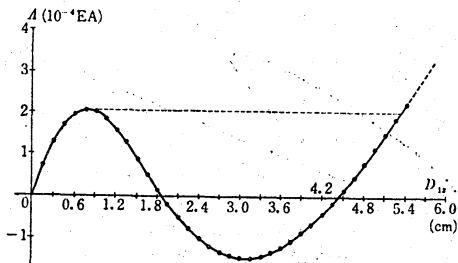
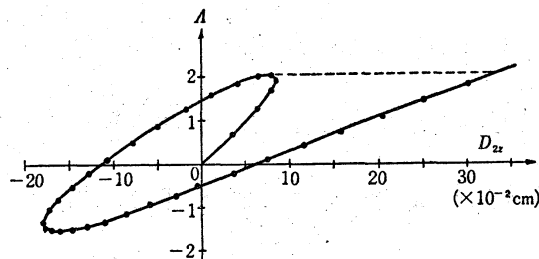


図-6：網状トラス



(a) 1節点の動き



(b) 2節点の動き

図-7：飛移座屈の解析例

[3] 弧長増分法

$|K|=0$ となる特異点を越えて釣合経路を解

析する方法として、 $t=\Delta$ とする、いわゆる

弧長増分法が提案されている。ここでは、復

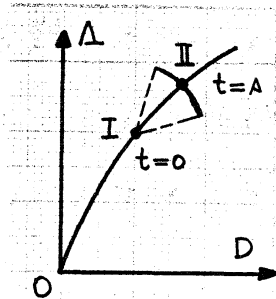


図-8：弧長増分

難な釣合径路の追跡をおこなった具
体例を紹介するにとどめる(図-9)。

[4]-一般増分法

(7)式を次の様に変形する。

$${}^n [K] - f \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \lambda \end{matrix} \right\} = {}^n \{0\} \quad (13)$$

今、 ${}^n [A] = {}^n [K] - f$ とおいて、 $[A]$ の

一般逆行列を $[A^{-1}]$ とし、 $[H] = [A^{-1}][A]$

とみると、(13)式の解は次式となる。

$$\left\{ \begin{matrix} \dot{d} \\ \vdots \\ \lambda \end{matrix} \right\} = [H - E] \{ \alpha \}, \quad \{ \alpha \}: \text{任意ベクトル} \quad (14)$$

上式に $d = \dot{d}t$, $\lambda = \dot{\lambda}t$ を代入すると

$$\left\{ \begin{matrix} d \\ \vdots \\ \lambda \end{matrix} \right\} = [H - E] \{ \alpha \} t \quad (15)$$

となる。この式で、 t の選定は任意
となっている。この解法の特長は、
座屈点においてどの未知数をパラメータ
として選ぶかの困難さから解放され
ることと、複合荷重時 ($m \times (n+2)$ 等
の行列となる) における座屈挙動の調査に容易に拡張可能である
ことである。

§3 座屈桌の分類と座屈モード

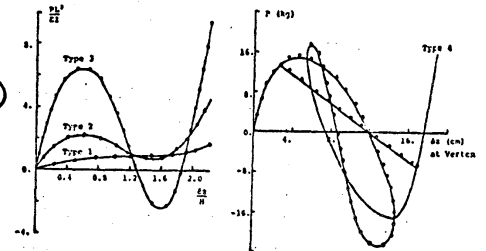
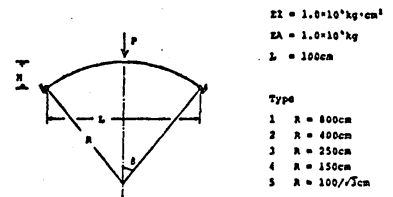


図-9: 7-4の釣合径路

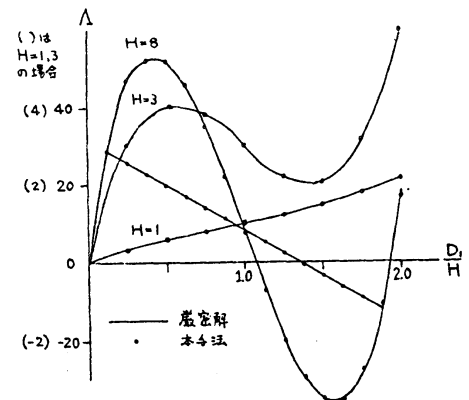
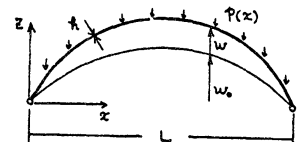


図-10: 一般増分法による結果

本節では、 $[K]$ の対角化を利用して、座屈点の分類と座屈モードの検討をおこなう。対角化には、固有値解析が必要であり、多次元の解析には適さない。文献[1]～[4]では、対角化を必要としない方法を提案している。I の時点における座標軸の変換行列 $[T] = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$ を導入する。

$$\{\dot{d}\} = [T]\{\dot{u}\}, \quad \{f\} = [T]\{g\} \quad (16)$$

$t_1 \dots t_n$ は、 $[K]$ の固有値 $c_1 \dots c_n$ に対応する正規化された固有ベクトルである。(16)式を(7)式へ代入すると、

$$\begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \Delta \dot{u} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \Delta g \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \Delta g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \cdot f \\ t_2 \cdot f \\ \vdots \\ t_n \cdot f \end{Bmatrix} \quad (17)$$

c_1 を $[K]$ の最小固有値とすると $|K| = 0$ となる座屈点では、

$c_1 = 0$, $|\Delta c| \neq 0$ が成立している。 $c_1 = 0$ の時、(17)式が成

り立つためには、 $\lambda g_1 = 0$ が

成立しなければならない。 λ

および g_1 の値によって座屈点

の分類をおこなったのが図-11

である。 $g_1 = 0$ の意

味は、 $g_1 = t_1 \cdot f$ より

c_1 に対応する固有ベ

クトル $\{t_1\}$ と荷重モード

$\{f\}$ とが直交している

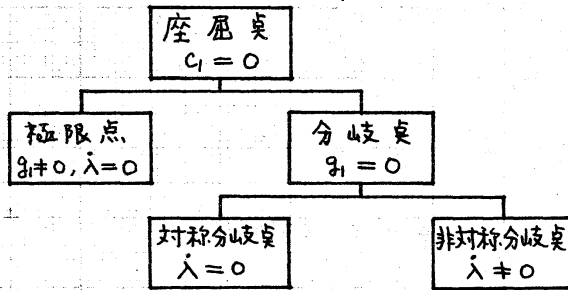


図-11: 座屈点の分類規準

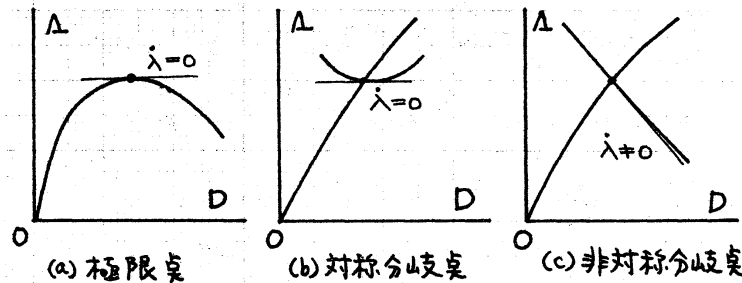


図-12: 座屈点近傍の釣合経路の様子

ことである。以下、便宜上 $t = u_1$ とおいて固有ベクトルと座屈モードとの関係を説明する。 $t = u_1$ より, $\dot{u}_1 = 1$ と(17)式より

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots \\ & \Delta C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \dot{u} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} g_1 \\ \Delta g \end{Bmatrix} \quad (18)$$

[1] 極限点 ($g_1 \neq 0, \dot{\lambda} = 0$)

$\dot{\lambda} = 0$ より(18)式の右辺は $\{0\}$ となる。 $[\Delta C] \{\Delta \dot{u}\} = \{0\}$ より $\{\Delta \dot{u}\} = \{0\}$ となる。座屈モード $\{\dot{d}\}$ は

$$\{\dot{d}\} = [T] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{t_1\} \quad (19)$$

上式より、極限点においては、最小固有値に対応する固有ベクトルが座屈モードとなつてゐることがわかる。

[2] 対称分岐点 ($g_1 = 0, \dot{\lambda} = 0$)

極限点と同様、 $\{\Delta \dot{u}\} = \{0\}$ より座屈モードは $\{\dot{d}\} = \{t_1\}$ となる。極限点と異なる点は、 $g_1 = 0, f = 0$ が成立してゐることである。

簡単な1例を図-13に示す。この例では、 $\{t_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $\{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 。

[3] 非対称分岐点 ($g_1 = 0, \dot{\lambda} \neq 0$)

$\dot{\lambda} \neq 0$ より、(18)式を計算すると $\{\Delta \dot{u}\} = \dot{\lambda} [\Delta C]^{-1} \{\Delta g\}$ が得られる。(16)式へ代入して、座屈モードを求めると

$$\{\dot{d}\} = [t_1; \Delta T] \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \dot{u} \end{Bmatrix} = \{t_1\} + \dot{\lambda} [\Delta T] [\Delta C]^{-1} \{\Delta g\} \quad (20)$$

前2者の違いは、座屈モードに $\dot{\lambda}$ の影響が附加されてゐる

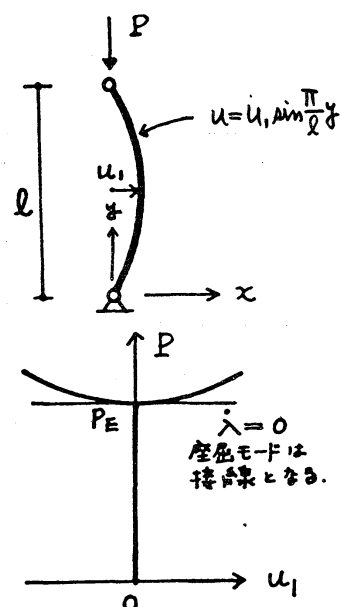


図-13: 柱の対称分岐座屈

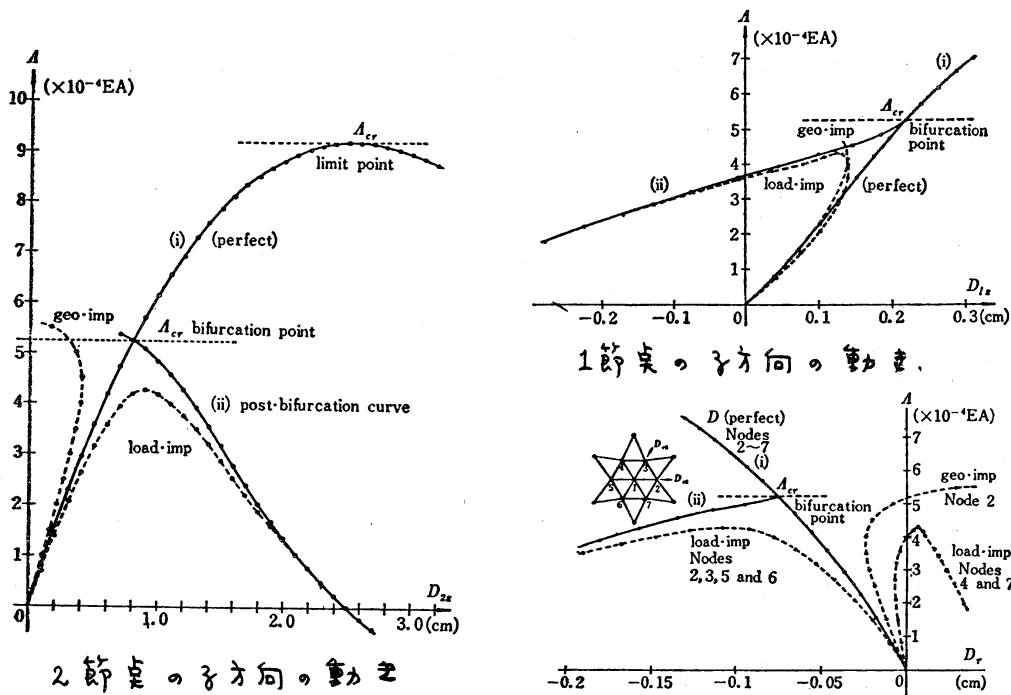
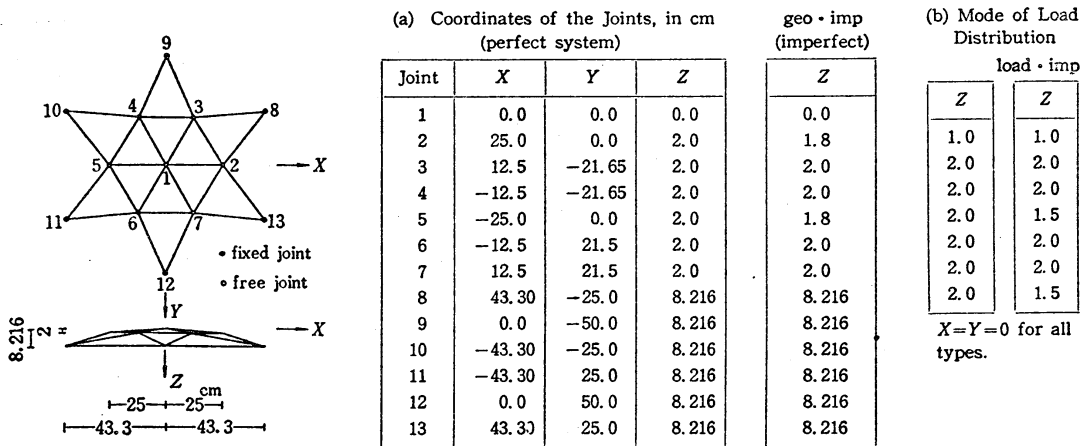


図-14: 非対称分岐座屈の例

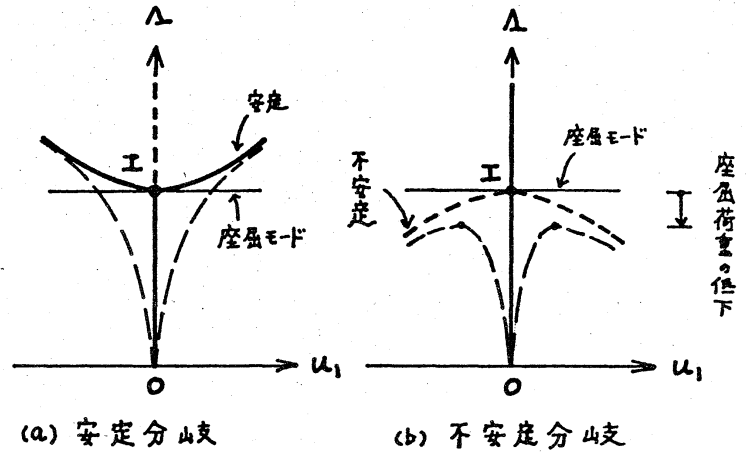
ことである。つまり、剛性行列の最小固有値およびそれに対応する固有ベクトルがかならずしも座屈モードを決定しない場合が存在すること意味している。図-14 に非対称分岐座屈の具体例を示す。図中、実線は、初期不整が存在する場合で、座屈荷重の変動が観察される。

3.4 座屈後の挙動

座屈モードは、座屈点において座屈後の釣合経路への接線
 の方向を示している。図-15 に示すように、座屈荷重および
 座屈モードは同じで

も、座屈後の挙動に
 大きな相異が生じる
 場合がある。(a)の場

合は、分岐後の釣合
 経路は安定で、初期



不整の存在に対して

図-15: 座屈後挙動の相異 (---: 初期不整)

も敏感ではない。それに反して、(b)の場合には、分岐後の釣
 合経路は不安定であり（変位の jump がみられたり、急速な
 耐荷能力の減少）、初期不整の存在により座屈荷重の低下が
 出現する。本節では、前節と同様、 $t = u_1$ において、座屈点
 近傍の釣合経路を描いてみる。(5), (6), ... 式を利用して、基
 礎式を整理すると、 $C_1 = 0$ に注意して以下の様になる。

$$t = u_1 : \dot{u}_1 = 1, \ddot{u}_1 = 0, \ddot{u}_1 = 0, \dots \quad (21)$$

$$\{\Delta \ddot{u}\} = \{\Delta \ddot{u}\} u_1 + \frac{1}{2} \{\Delta \ddot{u}\} u_1^2 + \dots \quad (22)$$

$$\lambda = \dot{\lambda} u_1 + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} u_1^2 + \dots \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \Delta \ddot{u} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \Delta g \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta \ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta g\} = \begin{Bmatrix} g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta \ddot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{1,11} \\ H_{2,11} \\ \vdots \\ H_{n,11} \end{bmatrix} + \sum_{i,j=2}^n \begin{bmatrix} H_{1,i,j} \\ H_{2,i,j} \\ \vdots \\ H_{n,i,j} \end{bmatrix} \dot{u}_i \dot{u}_j + \begin{bmatrix} I_{1,1} \\ I_{2,1} \\ \vdots \\ I_{n,1} \end{bmatrix} \dot{\lambda} \\
+ \sum_{i=2}^n \begin{bmatrix} I_{1,i} \\ I_{2,i} \\ \vdots \\ I_{n,i} \end{bmatrix} \dot{u}_i \dot{\lambda} + \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} \dot{\lambda}^2 = \ddot{\lambda} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \Delta g \end{bmatrix} \quad (25)
\end{aligned}$$

式 3 振動式のうち 1 行を採用すると (対称分岐点に利用) 、

$$\begin{aligned}
L_{1,i,j} (\dot{u}_i \ddot{u}_j + \ddot{u}_i \dot{u}_j) + M_{1,i} (\dot{u}_i \ddot{\lambda} + \ddot{u}_i \dot{\lambda}) + N_1 \dot{\lambda} \ddot{\lambda} + P_{1,i,j,k} \dot{u}_i \dot{u}_j \dot{u}_k \\
+ Q_{1,i,j} \lambda \dot{u}_i \dot{u}_j \dot{\lambda} + R_{1,i} \dot{u}_i \dot{\lambda}^2 + S \dot{\lambda}^3 = 0 \quad (26)
\end{aligned}$$

[1] 極限点 ($g_1 \neq 0, \dot{\lambda} = 0$)

$\dot{\lambda} = 0$ および (24) 式より $\{\Delta \ddot{\mathbf{u}}\} = \{0\}$ 。 =

これらの値を (25) 式へ代入すると

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta \ddot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{1,11} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{H} \end{bmatrix} = \ddot{\lambda} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \Delta g \end{bmatrix} \quad (27)$$

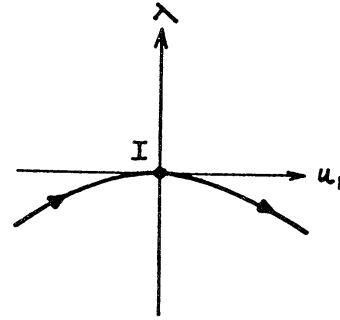


図-16 : 極限点近傍の釣合経路。

$g_1 \neq 0$ より $\ddot{\lambda} = H_{1,11} / g_1$ 。式 2 行目以下より、

$$\{\Delta \ddot{\mathbf{u}}\} = [\Delta \mathbf{C}]^{-1} \left(\frac{H_{1,11}}{g_1} \{\Delta g\} - \{\Delta \mathbf{H}\} \right) \quad (28)$$

これらの各値を (22), (23) 式へ代入すると、極限点近傍の釣合経路のうち 1 近似式は次式で得られる (図-16)。

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = \frac{1}{2g_1} [\Delta \mathbf{C}]^{-1} (H_{1,11} \{\Delta g\} - g_1 \{\Delta \mathbf{H}\}), \quad \lambda = \frac{1}{2g_1} H_{1,11} u_1^2 \quad (29)$$

[2] 分岐点 ($g_1 = 0$)

(24) 式の式 2 行目以下を用いると

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \frac{g_2}{C_2} \\ \vdots \\ \frac{g_n}{C_n} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

上式を(25)式の第1行目に代入すると、

$$\left[J_1 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n H_{1,ij} \frac{g_i g_j}{c_i c_j} - \sum_{i=2}^n \frac{I_{1,i} g_i}{c_i} \right] \dot{\lambda}^2 + \left[I_{1,1} - \sum_{i=2}^n \frac{g_i}{c_i} (H_{1,1i} + H_{1,i1}) \right] \dot{\lambda} + H_{1,11} = 0 \quad (31)$$

簡単に、次式で表わすことにする。

$$a \dot{\lambda}^2 + b \dot{\lambda} + c = 0 \quad (32)$$

$\dot{\lambda}$ を求めると

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (33)$$

■ 対称分岐点 ($H_{1,11} = 0$)

$\dot{\lambda}_1 = 0$, $\dot{\lambda}_2 = -\frac{b}{a}$ となる。 $\dot{\lambda}_1 = 0$ の場合は、(30)式より $\{\Delta \dot{u}\} = \{0\}$ となり、これを(26)式へ代入すると $\ddot{\lambda}_1 = -P_{1,111}/M_{1,1}$ となる。

故に、対称分岐点における $\lambda - u_1$ 関係は(図-17)、

$$\lambda_1 = -\frac{P_{1,111}}{M_{1,1}} u_1^2, \quad \lambda_2 = -\frac{b}{a} u_1 \quad (34)$$

尚、 $-\frac{P_{1,111}}{M_{1,1}}$ の符号に応じて、安定分岐点、不安定分岐点となる(図-15)。

■ 非対称分岐点 ($H_{1,11} \neq 0$)

(33)式を用いると、 $\lambda - u_1$ 関係は次式となる(図-18)。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} u_1 \quad (35)$$

図-14。2節点の3方向の動きの座屈点近傍の様子と一致する。

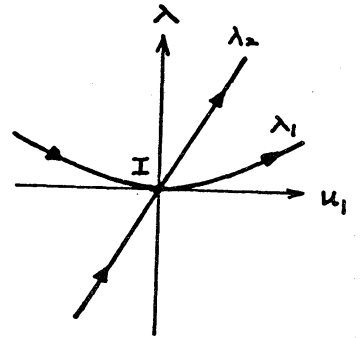


図-17: 対称分岐点近傍の釣合経路

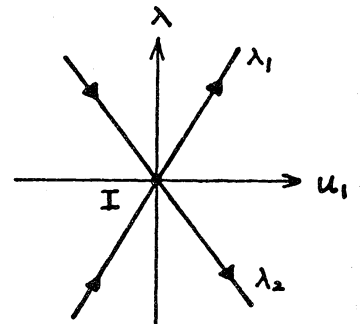


図-18: 非対称分岐点近傍の釣合経路

§5 等分布外圧を受ける偏平球殻

円錐台シェル要素を採用した有限要素法で、等分布外圧を受ける偏平球殻の幾何学的非線形解析も行ない座屈後挙動を調査した。その結果を紹介する。

要素内の変位を

$$\begin{aligned} u &= u^0 + u^n \cos n\theta \\ w &= w^0 + w^n \cos n\theta \\ v &= v \sin n\theta \end{aligned} \quad (36)$$

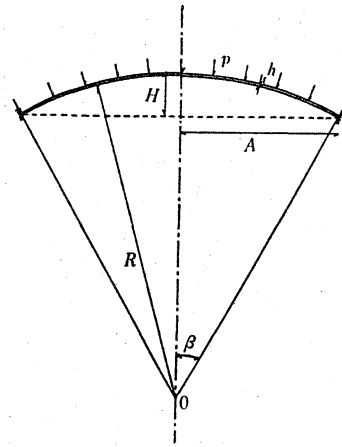
とあき、軸対称変位 (u^0, w^0) と 150 の非軸対称変位との重畳法によって解析した。得られた釣合の式 (1) 式に対応) は、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_{ij}^{(00)} & 0 \\ 0 & K_{ij}^{(nn)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_j^{(0)} \\ D_j^{(n)} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{ijk}^{(000)} & 0 & K_{ijk}^{(0nn)} \\ 0 & 2K_{ijk}^{(nnn)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_j^{(0)} D_k^{(0)} \\ D_j^{(0)} D_k^{(n)} \\ D_j^{(n)} D_k^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ijkl}^{(0000)} & 0 & K_{ijkl}^{(00nn)} & 0 \\ 0 & K_{ijkl}^{(nnnn)} & 0 & K_{ijkl}^{(nnnn)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_j^{(0)} D_k^{(0)} D_l^{(0)} \\ D_j^{(0)} D_k^{(0)} D_l^{(n)} \\ D_j^{(0)} D_k^{(n)} D_l^{(n)} \\ D_j^{(n)} D_k^{(n)} D_l^{(n)} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} F_i^{(0)} \\ F_i^{(n)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

以下、解析結果を示す。

図-20 は座屈荷重を示したもので、図-21 は変形および応力と外力の関係を示す。

図-20：座屈荷重と展開次数

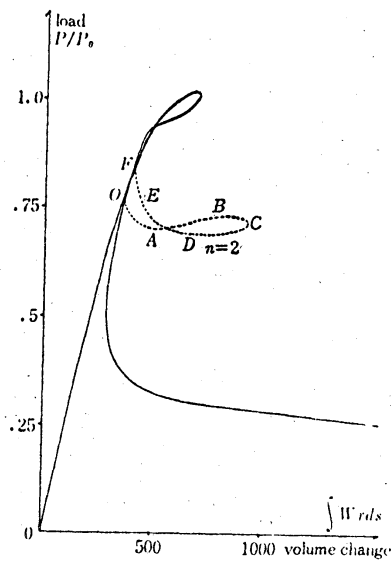


$$\begin{aligned} E &= 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ \lambda^2 &= \sqrt{12(1-\nu^2)} \beta R / h \\ &= (\text{Geometric Parameter}) \end{aligned}$$

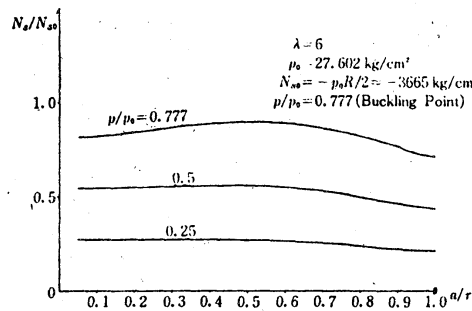
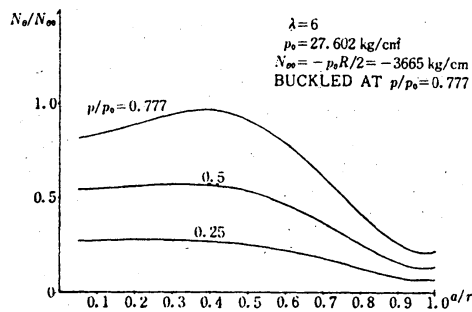
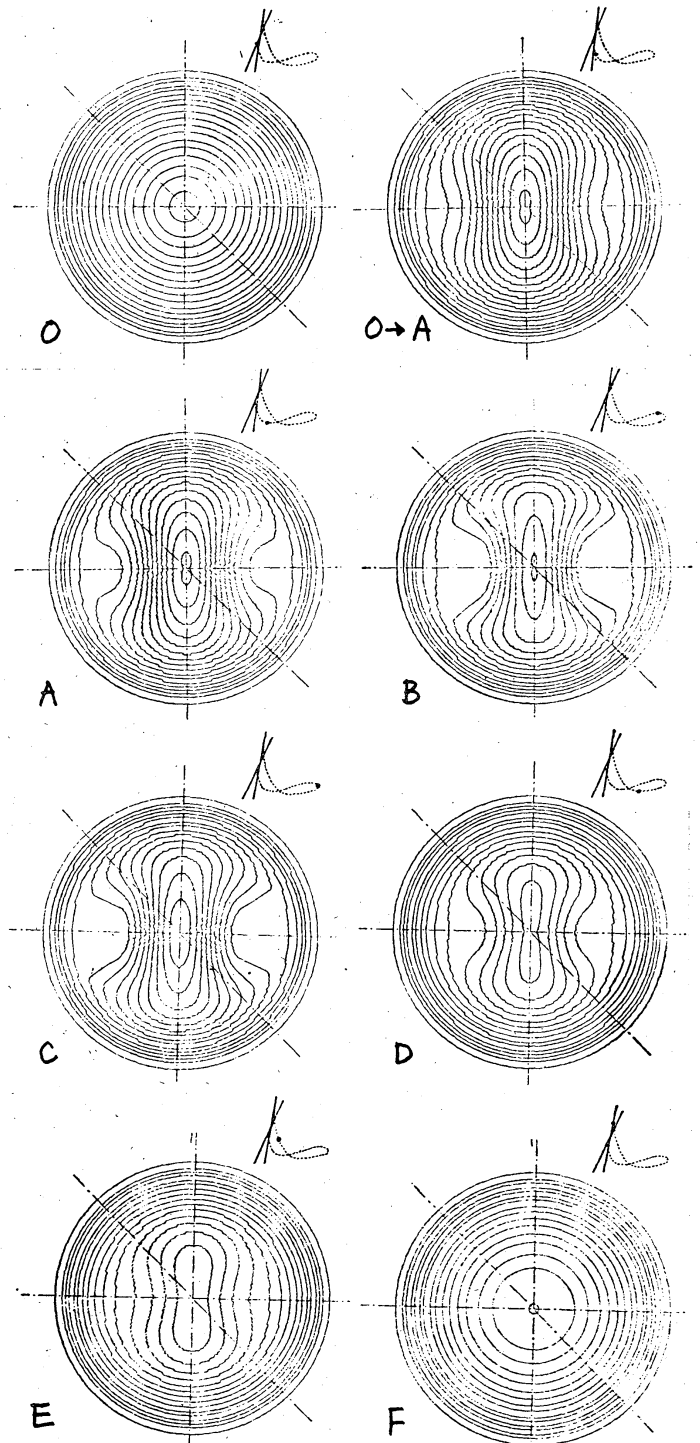
	$\lambda=6$	$\lambda=7$	$\lambda=8$
A	50 cm	50 cm	50 cm
H	4.75 cm	5.25 cm	5.75 cm
h	0.875 cm	0.711 cm	0.596 cm
R	264.4 cm	240.7 cm	220.3 cm

図-19：偏平球殻

	$\lambda=6$	$\lambda=7$	$\lambda=8$
$n=0$	1.017 (.995)	1.088 (1.068)	1.135 (1.130)
1	0.926 (.919)	1.060 (1.023)	—
2	<u>0.777 (.775)</u>	0.798 (.796)	0.884 (.893)
3	0.837 (.827)	<u>0.760 (.760)</u>	0.780 (.774)
4	0.944 (.932)	0.821 (.812)	<u>0.764 (.766)</u>
5	—	0.912 (.902)	0.809 (.813)
6	—	1.040 (1.000)	0.872 (.887)



荷重-体積変化曲線

座屈前の N_r の分布の変化座屈前の $N_θ$ の分布の変化分岐後の等変位曲線
(左上図の位置と対応している)図-2 : $\lambda = 6$ の場合の数値解析結果