

波動方程式に対する混合問題について

(外部領域における解の存在と減衰について)

阪大理学部 井川 満

§ 1. はじめに。 $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^3$ の有界な obstacle とし

$$\Gamma = \partial\mathcal{O}, \quad \Omega = \mathbb{R}^3 - \mathcal{O} - \Gamma$$

とおく。 Γ の近傍で定義された1階の微分作用素 B を

$$B = \sum_{j=1}^3 b_j(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + d(x, t)$$

と書く。 b_j, c, d は $\Gamma \times \mathbb{R}^1$ の近傍で定義された C^∞ -函数とする。以後次の仮定をおく。

(A-I) Γ は十分滑かで Gauss 曲率は strictly positive

(A-II) $b_j, j=1, 2, 3$ 及び c は 実数値函数

(A-III) $\sum_{j=1}^3 b_j(x, t) n_j(x) = 1, \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^1$

ここで $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ は $x \in \Gamma$ における単位外法線とする。

次の混合問題を考えよう: $u_0, u_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ に対し

$$(P) \quad \begin{cases} \square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ B u = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

を満たす $u(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ をとめること.

本稿において以下の事を示したい.

定理 1. (P) が C^∞ -well posed であるための必要十分条件は

$$c(x, t) < 1, \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times [0, \infty)$$

が成り立つことである.

定理 2. $b_j, c, d \in B^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ が

$$\sup_{\Gamma \times \mathbb{R}^1} c(x, t) < 1$$

が成り立っているとす. その時ある定数 d_0 , これは b_j, c に独立である, があって

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j(x, t) - \eta_j(x)) - d(x, t) \right\} \geq d_0$$

ならば問題 (P) の compact support をもった初期条件に対す

る解は指数的に減衰する、すなわち

$$\bigcup_{j=0}^1 \text{supp } u_j(x) \subset \{x; x \in \overline{\Omega}, |x| \leq \kappa\}$$

とすると解 $u(x, t)$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$E_1(u, x_0, t) \leq \frac{C}{\varepsilon} \exp\{3\delta_0(x_0 + \kappa)\} \\ \cdot \exp\{-2(\delta_0 - \varepsilon)t\} \cdot E_3(u, \infty, 0), \quad \forall t \geq 0$$

なる評価をもつ。ここで $\delta_0 = 12\rho^{-1} \cdot e^{-1}$, $\rho = \Omega$ の直径、

$$E_m(u, x_0, t) = \sum_{|j| \leq m} \int_{\{|x| \leq x_0\} \cap \Omega} |D_{x,t}^j u(x, t)|^2 dx$$

である。

$\ell = n$, $c = 0$ の場合、すなわち境界条件がオ3種境界条件の場合は d_0 に関してより詳しく知る事ができる。

定理 3. $B = \frac{\partial}{\partial n} + \sigma(x, t)$

の時、

$$\sigma_0(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(x, t) \text{ が } \sigma_0(x) \in C^\infty(\Gamma) \text{ として存}$$

在し $-M \leq \text{Re } \sigma_0 \leq \delta_M$, $|\text{Im } \sigma_0| \leq \delta_M$ を満たすときは (P) の解は exponential decay する。ただし M は正の定数, δ_M は M に対応して決まる正の定数である。

以上の結果に関して 2, 3の注意をしておきたい。

Remark 1. 例えば Dirichlet, 又は Neumann 条件の場合の
ように $\forall T > 0$ に対し, C_T が存在して

$$\|u(x,t)\|_{1,L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \{ \|u_0\|_{1,L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \}, \quad \forall t \in [0, T]$$

が成り立つ場合を L^2 -well posed とよぶことにすると, (P)

が L^2 -well posed であるための必要十分条件は

$$-\left\{ \sum_{j=1}^3 (b_j(x,t) - n_j(x))^2 \right\}^{1/2} \geq c(x,t) \text{ on } \Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+}$$

の成り立つことである (上見 [1], 宮武 [8]). よって $c > 0$ となる点が少なくとも一つあれば (P) は L^2 -well posed でない。

Remark 2. 波動方程式の外部領域での解の exponential decay に関しては, 境界条件が Dirichlet の場合とのごとく, 次の結果がある。

(i) Ω は convex, B は Neumann 条件 (Morawetz [10])

(ii) $\Omega = \{x; |x| < 1\}$ $B = \frac{\partial}{\partial n} + \sigma$, $\sigma < 1$ なる定数 (時田 [12]).

定理 2 は Remark 1 と合わせて考えると, L^2 -not well posed な問題の場合でも解は exponentially decay していることがわかる。

Remark 3. 浅倉氏の京大修士論文 (1977年3月) の結果、すなわち定理 4-5 の結果を用いると、定理 3 は次のように改良される。 Ω の内部の点 O があって

$$\sigma_0(x) < \frac{|n(x) \cdot (O-x)|}{|O-x|^2} \quad \forall x \in \Gamma$$

が成り立つならば (P) の compact support をもつ data に対する解は exponential decay する。

§2. 定理 1 の証明の方針。 条件の必要性は Kajitani [6], Ikawa [4] の証明より直ちにわかる事である。よって十分性について考えることにする。

$(\cdot, \cdot)_m$, $\|\cdot\|_m$ を $H^m(\Omega \times \mathbb{R}^1)$ での内積, norm とする。又 $(\cdot, \cdot)_m$, $\|\cdot\|_m$ を $H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ の内積, norm を表わすとする。

今 $\phi_j, c, d \in \mathcal{B}^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$, $\sup_{\Gamma \times \mathbb{R}^1} c(x,t) < 1$ としておく。 $\varphi(x)$ を real valued な $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ に属する函数で、 $\nabla \varphi \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$(2.1) \quad \sup_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi| < 1$$

を満たしているものとする。

$$A_g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}) = (1 - (\nabla g)^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \nabla g \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \Delta g \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

$$B_g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{j=1}^3 b_j(x, t) (\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}) + c(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + d(x, t)$$

とおく。又 $\mu \in \mathbb{R}$ とし

$$A_{g, \mu} = A_g(\frac{\partial}{\partial t} + \mu, \frac{\partial}{\partial x})$$

$$B_{g, \mu} = B_g(\frac{\partial}{\partial t} + \mu, \frac{\partial}{\partial x})$$

とおく。 $g(x, t) \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対して

$$(2.2) \quad \begin{cases} A_{g, \mu} w(x, t) = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ w(x, t) = g(x, t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \exists T, \quad \text{supp } w \subset \Gamma \times [-T, \infty) \end{cases}$$

を満たす $w(x, t)$ を考えよう。これは $C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$ で一意的に存在する。この w を

$$w(x, t) = \mathcal{W}_g(x, t; g, \mu)$$

と書くことにする。(2.2) の解の一意性より

$$(2.3) \quad \mathcal{W}_g(x, t; e^{-\mu t} g, \mu) = e^{-\mu t} \mathcal{W}_g(x, t; g, 0)$$

が成り立つことを注意しておこう。次に

$$\mathcal{B}_g(\mu) g = B_{g, \mu} \mathcal{W}_g(x, t; g, \mu) \Big|_{\Gamma \times \mathbb{R}^1}$$

とおこう。明かに $\mathcal{B}_g(\mu) : \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1) \rightarrow C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ である。

(2.3) と $B_{g, \mu}$ の性質より

$$(2.4) \quad \mathcal{B}_\varphi(\mu) e^{-\mu t} g = e^{-\mu t} \mathcal{B}_\varphi(0) g, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$$

が成り立つ。例えば Sakamoto [11] の結果を用いると $\exists \mu_\varphi$,
 $\forall \mu \geq \mu_\varphi$ に対して, $g \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対し

$$\mu \| \mathcal{W}_\varphi(x, t; g, \mu) \|_m^2 \leq C_m \| g \|_m^2, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

が成り立つ。よって $\mathcal{W}_\varphi$ は一意的に $H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1) \rightarrow H^m(\Omega \times \mathbb{R}^1)$
 の作用素として拡張される。同様にして

$$(2.5) \quad \mu \| \mathcal{B}_\varphi(\mu) g \|_m^2 \leq C_m \| g \|_{m+1}^2, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$$

を得る。よって $\mathcal{B}_\varphi(\mu)$ は一意的に $m=0, 1, 2, \dots$ に対し,

$H^{m+1}(\Gamma \times \mathbb{R}^1) \rightarrow H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ の作用素として拡張される。

境界上の作用素 $\mathcal{B}_\varphi(\mu)$ について次の事が成り立つ。

定理 2.1. 任意の m , $\mu \geq \mu_\varphi$ に対して

$$(2.6) \quad -\operatorname{Re} (\mathcal{B}_\varphi(\mu) g, g)_m \geq (\mu C_0(\varphi) - C) \| g \|_m^2 \\
- C_{\varphi, m} \| g \|_0^2, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$$

が成り立つ。ここで,

$$C_0(\varphi) = \inf_{(x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^1} \left\{ \sqrt{1 - (\varphi_s(x))^2} - v(x,t) \cdot |\varphi_s(x)| - c(x,t) \right\}$$

$$\varphi_s(x) = \nabla \varphi - (\nabla \varphi \cdot n) n$$

$$v(x,t) = \left\{ \sum_{j=1}^3 (b_j(x,t) - n_j(x))^2 \right\}^{1/2} \quad \text{とする。}$$

次に

$$B' = \sum_{j=1}^3 b'_j(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} - c(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + d(x, t)$$

$$b'_j(x, t) = 2n_j(x) - b_j(x, t)$$

$$d'(x, t) = \overline{d(x, t)} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (n_j(x) - b_j(x, t)) - \frac{\partial c(x, t)}{\partial t}$$

とおく。 $A_g(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ に対し

$$A_{g, \mu}^- = A_g(-\frac{\partial}{\partial t} + \mu, \frac{\partial}{\partial x})$$

とおく。

$$\begin{aligned} \langle A_{g, \mu} u, v \rangle_0 &= \langle u, A_{-g, \mu}^- v \rangle_0 \\ &= (B_{g, \mu} u, v)_0 - (u, B'_{-g, \mu} v)_0 \end{aligned}$$

が任意の $u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$ に対し成り立つ。よって

$$\beta'_g(\mu) h = B'_{-g, \mu} w_{-g}^-(x, t; h, \mu) |_{\Gamma \times \mathbb{R}^1}$$

ただし w_{-g}^- は $h \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対し

$$\begin{cases} A_{-g, \mu}^- w = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ w = h & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \text{supp } w \subset \bar{\Omega} \times (-\infty, T) & \exists T \end{cases}$$

を満たす解を表わすものとする。任意の $g, h \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対して

$$(\beta_g(\mu) g, h) = (g, \beta'_g(\mu) h)$$

が成り立つ。よって

$$(2.7) \quad \beta_g(\mu)^* = \beta'_g(\mu)$$

が成り立つ。 $\mathcal{B}_g^-(\mu)$ についても定理 2.1 と同じ方法で

定理 2.1' 任意の m , $\mu \geq \mu_g'$ に対して

$$(2.8) \quad -\operatorname{Re}(\mathcal{B}_g^-(\mu)h, h)_m \geq \mu(C_0(g) - C)\|h\|_m^2 \\ - C_{g,m}\|h\|_0^2, \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$$

が成り立つ。

定理 2.1, 2.1' と関係式 (2.7) を用いればただちに次の定理を得る。

定理 2.2. 任意の $m \geq 0, \mu \geq \mu_g''$ に対し, $h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$

をとるときに

$$(2.9) \quad \mathcal{B}_g(\mu)g = h$$

を満たす $g \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ は一意的に存在し

$$(2.10) \quad \|g\|_m \leq \frac{C_m}{\mu - \mu_g''} \|h\|_m$$

なる評価が成り立つ。

$h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対して (2.9) の解を g とおくとき

$$u(x, t) = e^{\mu t} \mathcal{W}_g^-(x, t; g, \mu)$$

とおくと我々は

$$(2.11) \quad \begin{cases} A_g u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ B_g u = e^{\mu t} h(x, t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

を満たしていることは, $\mathcal{W}_g$ および $\mathcal{B}_g(\mu)$ の定義より直ちに
従う事である。さらに次の事が成り立つ。

定理 2.3. $h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ かつ

$$(2.12) \quad \text{supp } h \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

とすると

$$(2.13) \quad \text{supp } u \subset \bar{\Omega} \times [t_0, \infty)$$

が従う。

証明. $\mathcal{W}_g$ の性質より (2.13) を示すには (2.9) の解 g が

$$\text{supp } g \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

を満たすことをいえばよい。一般性を失うことなく $t_0 = 0$ と

してよい。さて $\varepsilon_0 > 0$ を一つとってfixする。 $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$

とし

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & t < -1 \\ e^{-\varepsilon t} & t \geq 0 \end{cases}$$

を満たす C^∞ 函数とする。 μ を十分大にとり

$$g_1 = \mathcal{B}_g(\mu + \varepsilon)^{-1} (e^{-\varepsilon t} h)$$

とおく。(2.11)より $e^{-\varepsilon t} h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ である。よって

$$u_1 = e^{(\mu + \varepsilon)t} \mathcal{W}_g(x, t; g_1, \mu + \varepsilon)$$

とおくと

$$\begin{cases} A_g u_1 = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ B_g u_1 = e^{\mu t} h & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

を満たしている。

$$v = \alpha(t) (u - u_1)$$

は $e^{-\mu t} v(x, t) \in H^m(\Omega \times \mathbb{R}^1)$ を満たしかつ

$$(2.14) \quad \begin{cases} \tilde{A}_\varphi v = 0 \\ \tilde{B}_\varphi v = 0 \end{cases}$$

を満たす。 $\tilde{A}_\varphi, \tilde{B}_\varphi$ は A_φ, B_φ と主要部は同じである。

$$k(x, t) = \alpha(t) (e^{\mu t} g - e^{(\mu+\varepsilon)t} g_1)$$

とかくと同様に $e^{-\mu t} k(x, t) \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ を得る。

よって u, v は 未来方向に解いた解として表されたことより

$$v = \tilde{W}_\varphi(x, t; e^{-\mu t} k, \mu) \cdot e^{\mu t}$$

と書ける。 $\tilde{W}_\varphi$ は boundary data に対し $\tilde{A}_{\varphi, \mu} w = 0$ をみたす未来方向に解いた解とする。(2.14) より

$$\tilde{B}_\varphi(\mu)(e^{-\mu t} k) = \tilde{B}_{\varphi, \mu} \tilde{W}_\varphi(x, t; e^{-\mu t} k, \mu) = 0$$

が従う。 $\tilde{B}_\varphi(\mu)$ に対しこれも定理 2.1, 2.1' が証明されるので

$$e^{-\mu t} k = 0, \quad \text{すなわち} \quad g \cdot e^{\mu t} = g_1 \cdot e^{(\mu+\varepsilon)t}$$

以上により任意の $\eta > 0$ に対して

$$e^{\mu t} \cdot e^{\eta t} \tilde{B}_\varphi(\mu+\eta)^{-1} k = e^{\mu t} \cdot g$$

よって (2.10) を用いると

$$\|e^{\eta t} g\|_0 \leq C_0(\mu+\eta - \mu_\varphi'') \|k\|_0, \quad \forall \eta \geq 0$$

を得る。このことより $g = 0$ for $t < 0$ を得る。

(証明終り)

以上の考察により

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} A_\varphi u = f & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ B_\varphi u = g & \text{on } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial u / \partial t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

の Sobolev space における解の存在と一意性を得る。

定理 2.4. $c_0(\varphi) > 0$ となる φ に対し, ある μ があって
 $e^{-\mu t} f \in H^m(\Omega \times (0, \infty))$, $e^{-\mu t} g \in H^m(\Gamma \times (0, \infty))$ を
 みたし, $u_0, u_1 \in H^{m+2}(\Omega)$ であれば (P_φ) の解 $u(x, t)$
 は $e^{-\mu t} u \in H^m(\Omega \times (0, \infty))$ $m+2$ 次の compatibility condi.
 を満たすもののの中に存在しかつ唯一である。

$c_0(\varphi) > 0$ となるための必要十分条件は

$$(2.15) \quad |\varphi_s(x)| < \left\{ -c(x, t) \cdot v(x, t) + \sqrt{1 + |c(x, t)|^2 - v(x, t)^2} \right\} \\ \times (1 + v(x, t)^2)^{-1} \quad \forall t > 0$$

が成り立つことである。問題 (P) に対して Holmgren 変換
 をほどこし定理 2.4 を用いることにより (P) の解の局所一
 意性が従う。又 (2.15) をみたす範囲で $\varphi(x)$ を動かして得る
 ので sweeping out の方法が用いられて (P) の伝播速度は
 高々

$$\sup_{\Gamma \times \mathbb{R}^1} \left(-c(x, t) \cdot v(x, t) + \sqrt{1 + |c(x, t)|^2 - v(x, t)^2} \right)^{-1} (1 + v(x, t)^2)$$

でおさえられる事もわかる。よって定理2.4における Sobolev spaceでの解の存在より C^∞ の data に対する解の存在が従う。以上により定理2.1, 2.1' を認めると定理1が示されたことになる。

§3. 定理2, 3の証明

$\varphi \equiv 0$ の場合 $\mathcal{W}_\varphi$, $\mathcal{B}_\varphi$ を単に $\mathcal{W}$, $\mathcal{B}$ と書くことにする。Morawetz [9] の結果を用いると $\mathcal{W}$ について次の事が成り立つ。

命題3.1. $\mu \geq -\delta_0$ に対して

$$(3.1) \quad \| e^{-(\delta_0+1)|x|} \mathcal{W}(x,t; g, \mu) \|_m \leq C_m \|g\|_m,$$

が $\forall g \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$, $m=0, 1, 2, \dots$ に対して成り立つ。

よって $\mathcal{B}(\mu)g = B(\partial_t + \mu, \partial_x) \mathcal{W}(x,t; g, \mu)$ は $\mu \geq -\delta_0$ で定義される。Bの主要部を B_0 , それに対して定義されるものを $\mathcal{B}_0$ と書くことにすると定理2.1の方法により

命題3.2. 任意の $\mu \geq -\delta_0$, $g \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対して

$$-\operatorname{Re}(\mathcal{B}_0(\mu)g, g)_m \geq (c_0\mu - C_m) \|g\|_m^2$$

が成り立つ。ここで $c_0 = 1 - \sup_{\Gamma \times \mathbb{R}^1} c(x,t)$ である。

adjoint problem に対しても同様の事が成り立つ。

命題 3.2' 任意の $\mu \geq -\delta_0$, $h \in \mathcal{D}(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ に対し

$$-\operatorname{Re}(\mathcal{B}_0'(\mu)h, h)_m \geq (c_0\mu - C'_m) \|h\|_m^2$$

が成り立つ。

故に §2 におけるのと全く同様の議論により

命題 3.3 ある定数 d_0 があって

$$\inf_{\Gamma \times \mathbb{R}^1} \operatorname{Re}(-d(x, t)) \geq d_0$$

ならば $\forall \mu \geq -\delta_0$ に対して, $g \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ であれば

$$\mathcal{B}(\mu)h = g$$

となる $h \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ が一意的存在する。

命題 3.4 上の命題と同じ仮定のもとで

$$g \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1), \quad \operatorname{supp} g \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

ならば

$$\operatorname{supp} h \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

が従う。

今 $\mu > -\delta_0$ を一固定しよう。 $g \in \mathcal{D}(\Gamma \times (0, \infty))$ とする。

$$h(x, t) = B(\mu)^{-1} (e^{\mu t} g) \in H^m(\Gamma \times \mathbb{R}^1), \quad m=0, 1, 2, \dots$$

とおき

$$(3.2) \quad v(x, t) = W(x, t; R, \mu) \in H^m(\Omega \times \mathbb{R}^1), \quad \forall m \geq 0$$

$$(3.3) \quad u(x, t) = e^{\mu t} v(x, t)$$

とかく $u(x, t)$ は

$$(3.4) \quad \begin{cases} \square u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1, \\ Bu = g & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \text{supp } u \subset \bar{\Omega} \times [0, \infty) \end{cases}$$

をみたしてゐる。

今 $u_0, u_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\text{supp } u_0, u_1 \subset \{x; |x| \leq R\}$ としよう。 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ であつて $\tilde{u}_j = u_j$ on Ω となるものをとる。 $w(x, t)$ として

$$(3.5) \quad \begin{cases} \square w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ w(x, 0) = \tilde{u}_0(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \tilde{u}_1(x) \end{cases}$$

の解をとる。 Huygens' principle より

$$(3.6) \quad w(x, t) = 0 \quad \text{for } |x| \leq R, \quad \text{if } t \geq 2R + R$$

を得る。

$$g(x, t) = -Bw|_{\Gamma \times \mathbb{R}^1}$$

この q に対して (3.4) をみたす $u(x, t)$ をとろう。

$$y(x, t) = w(x, t) + u(x, t)$$

とおくと

$$\begin{cases} \square y = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ B y = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial y / \partial t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

を得る。(3.2), (3.3) 及び (3.6) より $y(x, t)$ が望みの評価式, すなわち有界な領域ではそこでの energy は e^{Ht} の速さで decay することがわかる。

定理 3 については命題 3.2 と Ikawa [5] の考察を合わせれば出る。

§ 4. 定理 2.1 の証明方法について.

この結果を示すための基本的な仕事は (2.2) の解を具体的に表示することにある。 Γ の曲率が strictly positive という仮定はここで用いられる。Ludwig [7] の考察をより一般化した Ikawa [4] の中に定理 2.2 を証明するのに必要な事実及び方法が示されている。しかしいくつかの所での変更は必要である。むづかしくはないが相当のページを要するので

ミエには何も記せないが、あゆるしを願います。

文 献

- [1] R. Agemi: On energy inequality of mixed problems for hyperbolic equations of second order, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 21(1971), 221-236.
- [2] 浅倉史興: $\Delta - \lambda^2$ に対する外部の3種境界値問題の Green 関数の構成及び波動方程式に対する外部問題の解の減衰について. 京大修士論文. 1977年3月
- [3] M. Ikawa: Problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Publ. RIMS Kyoto Univ., 12(1976), 55-122.
- [4] ———: Problèmes mixtes pour l'équation des ondes II, to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ..
- [5] ———: Mixed problems for the wave equation III. Exponential decay of solutions, to appear.
- [6] K. Kajitani: A necessary condition for the well posed hyperbolic mixed problem with variable coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14(1974), 231-242.
- [7] D. Ludwig: Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies, Comm. Pure Appl. Math., 20(1976), 103-138.
- [8] S. Miyatake: Mixed problem for hyperbolic equation of second order, J. Math. Kyoto Univ., 13(1973), 435-487.

- [9] C.S.Morawetz: Exponential decay of solutions of the wave equation, Comm.Pure Appl.Math., 19(1966), 439-444.
- [10] ——— : Decay of solutions of the exterior problem for the wave equation, Comm.Pure Appl.Math., 28(1975), 229-264.
- [11] R.Sakamoto: Mixed problems for hyperbolic equations I,II J.Math.Kyoto Univ., 10(1970), 349-373,403-417.
- [12] T.Tokita: Exponential decay of solutions for the wave equation in the exterior domain with spherical boundary, J.Math.Kyoto Univ., 12(1972), 413-430.