

Magnetic な不純物がある超伝導体の Order Parameter の空間的变化

教育大理 北 村 豊 幸

(8月20日受理)

§ 1.

magnetic な不純物がある超伝導体の取扱いは、最初に、Abrikosov と Gorkov¹⁾が行った。彼等は、spin exchange 相互作用を Born 近似の範囲²⁾内で議論している。Kondo が second Born 近似まで求めて以来、高次の振舞いが興味^{3)~7)}の中心となっており、超伝導体における Kondo 効果の仕事も多くの人達によって検討されている。

magnetic な不純物のある超伝導体の order parameter の空間的变化⁸⁾は、Tsuzuki と Tsuneto によって検討された。彼等は order parameter $\Delta(r)$ の linearized self-consistent な積分方程式をとき、 $\Delta(r)$ を一個の不純物からの距離 r の関数として求めたが、coherence length $\xi_0 = \frac{v_F}{2\pi T_{co}}$ (v_F : Fermi 速度, T_{co} : 遷移温度) に比べ十分離れた $r \gg \xi_0$ ⁹⁾ の振舞いで、 r^{-1} に比例する項が入っていない。最近、Heinrichs は T_c の積分方程式を積分演算子を用いて、 T_c の極近傍で、 r^{-1} に比例する項まで求めている。

order parameter の空間的变化の今までの議論は、Kondo 効果を考慮^{6), 7), 10)}に入れてなかった。ここでは、超伝導体に、Nagaoka 型の decoupling を拡張した運動方程式を、Kondo 効果が現われる J の最低次、すなわち、3 次まで考慮して、 $\Delta(r)$ の linearized self-consistent な積分方程式を導き、log 発散が表れることを示す。

§ 2 では、Kondo 効果を含んだ、order parameter $\Delta(r)$ の linearized 積分方程式を導く、§ 3 では、§ 2 で導入した $t(\omega)$ - matrix を、 $\Delta(r)$ について一次、 J について、三次まで求める。§ 4 では、積分演算子を使って、遷移温度 T_c 、 $\Delta(r)$ の振舞いを導き、log 発散が表れることを示す。

北村豊幸

§ 2. Formulation:

ハミルトニアンとして, s-d相互作用と, B, C, S, モデルを考えてやれば,

$$\begin{aligned}
 H = & -\int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \frac{\nabla^2}{2m} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) d^3r - \frac{J}{2} \{ (\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) - \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})) S_z \\
 & + \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) S_- + \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) S_+ \} \delta(\mathbf{r}) d^3r - g \int \\
 & \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) d^3r
 \end{aligned} \quad (1)$$

となり, 運動方程式は

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(\mathbf{r}) \tau_1 \right) \hat{G}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) \hat{\Gamma}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(\mathbf{r}) \tau_1 \right) \hat{\Gamma}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
 & = -J \left\{ \tau_3 (n(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r})) - \tau_1 \Delta'(\mathbf{r}) \right\} \hat{\Gamma}_{\omega}(0, \mathbf{r}') \\
 & + \frac{J}{2} \left\{ (m(\mathbf{r}) - \frac{3}{4} \delta(\mathbf{r})) + \nu(\mathbf{r}) \right\} \hat{G}_{\omega}(0, \mathbf{r}')
 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, τ_1, τ_3 は pauli matrix, また,

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(xx') & = \begin{pmatrix} \psi(x, x') & \mathcal{F}(xx') \\ \mathcal{F}^{\dagger}(xx') & -\psi(x', x) \end{pmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \langle\langle \psi_{\uparrow}(x); \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \rangle\rangle & \langle\langle \psi_{\uparrow}(x); \psi_{\downarrow}(x') \rangle\rangle \\ \langle\langle \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x); \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \rangle\rangle & -\langle\langle \psi_{\downarrow}(x'); \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \rangle\rangle \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}(xx') & = \begin{pmatrix} \Gamma(x, x') & \Phi(x, x') \\ \Phi^{\dagger}(x, x') & \Gamma^{\dagger}(x, x') \end{pmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \langle\langle \psi_{\uparrow} S_z + \psi_{\downarrow} S_-; \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \rangle\rangle & \langle\langle \psi_{\uparrow} S_z + \psi_{\downarrow} S_-; \psi_{\downarrow}(x') \rangle\rangle \\ \langle\langle \psi_{\downarrow}^{\dagger} S_z - \psi_{\uparrow}^{\dagger} S_-; \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \rangle\rangle & \langle\langle \psi_{\downarrow}^{\dagger} S_z - \psi_{\uparrow}^{\dagger} S_-; \psi_{\downarrow}(x') \rangle\rangle \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$m(r) = 3 \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(0) \psi_{\downarrow}(r) S_- \rangle, \quad n(r) = \langle \psi_{\downarrow}^{\dagger}(0) \psi_{\downarrow}(r) \rangle \quad (6)$$

$$\Delta'(r) = \langle \psi_{\uparrow}(0) \psi_{\downarrow}(r) \rangle, \quad \hat{\nu}(r) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \langle \psi_{\downarrow}(0) \psi_{\downarrow}(r) S_- \rangle \\ 3 \langle \psi_{\downarrow}^{\dagger}(0) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) S_+ \rangle & 0 \end{pmatrix}$$

ここで, $\langle\langle A(x); B(x') \rangle\rangle$ は温度 Green 関数であり, 次のように定義する。

$$\langle\langle A(x); B(x') \rangle\rangle = \langle T \{ A(x) B(x') \} \rangle \quad (7)$$

order parameter $\Delta(r)$ は

$$\Delta(r) = g T \sum_{\omega} \mathcal{F}_{\omega}(r, r) \quad (8)$$

で定義される。 $\Delta(r)$ の self-consistent な方程式を求めるために, effective に $\Delta(r)$ を持った, pure super 状態の Green 関数を考えてやる。

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(r) \tau_1 \right) \hat{G}_{\omega}^0(r, r') = \delta(r - r') \quad (9)$$

(2), (3) の解は, (9) を使って, 次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\omega}(r, r') &= \hat{G}_{\omega}^0(r, r') - \frac{J}{2} \int \hat{G}_{\omega}^0(r, r'') \delta(r'') \hat{\Gamma}_{\omega}(r'', r') d^3 r'' \\ &= \hat{G}_{\omega}^0(r, r') - \frac{J}{2} \hat{G}_{\omega}^0(r, 0) \hat{\Gamma}_{\omega}(0, r') \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\omega}(r, r') &= -J \int \hat{G}_{\omega}^0(r, r'') \left\{ \tau_3 (n(r'') - \frac{1}{2} \delta(r'')) - \tau_1 \Delta'(r'') \right\} \\ &\quad \times \hat{\Gamma}_{\omega}(0, r') d^3 r'' + \frac{J}{2} \int \hat{G}_{\omega}^0(r, r'') \left\{ m(r'') - \frac{3}{4} \delta(r'') + \hat{\nu}(r'') \right\} \\ &\quad \times \hat{G}_{\omega}(0, r') d^3 r'' \end{aligned} \quad (11)$$

(10), (11) の積分方程式を, pure super 状態の Green 関数を使って解けば,

$$\hat{G}_{\omega}(r, r') = \hat{G}_{\omega}^0(r, r') + \hat{G}_{\omega}^0(r, 0) \hat{t}(\omega) \hat{G}_{\omega}^0(0, r') \quad (12)$$

北村豊幸

を得る。ここで、 $\hat{t}$ -matrix は、次のように定義される。

$$\hat{t}(\omega) = -\frac{J^2}{4} \hat{A}(\omega) \left(1 + \frac{J^2}{4} \hat{F}(\omega) \hat{A}(\omega)\right)^{-1} \quad (13)$$

$$\hat{A}(\omega) = \left\{1 + J \left(\hat{G}(\omega) \tau_3 + \hat{\Delta}(\omega) \tau_1\right)\right\}^{-1} (\hat{r}_1(\omega) + \hat{r}_2(\omega)) \quad (14)$$

$$\hat{F}(\omega) = \hat{G}_{\omega}^0(o, o) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= \int \hat{G}_{\omega}^0(o, \mathbf{r}) \left(n(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r})\right) d^3 r, \\ \hat{\Delta}(\omega) &= -\int \hat{G}_{\omega}^0(o, \mathbf{r}) \Delta'(\mathbf{r}) d^3 r, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\hat{r}_1(\omega) = \int \hat{G}_{\omega}^0(o, \mathbf{r}) \left(m(\mathbf{r}) - \frac{3}{4} \delta(\mathbf{r})\right) d^3 r,$$

$$\hat{r}_2(\omega) = \int \hat{G}_{\omega}^0(o, \mathbf{r}) \hat{\nu}(\mathbf{r}) d^3 r$$

$\Delta(\mathbf{r})$ の T_0 近傍の振舞いを調べるために、 $\Delta(\mathbf{r})$ の linearized eq, を導こう。(12) 式の 1 2-成分をとれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= \mathcal{T}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + \mathcal{Y}_{\omega}^0(\mathbf{r}, o) t_{11}(\omega) \mathcal{T}_{\omega}^0(o, \mathbf{r}) - \mathcal{Y}_{\omega}^0(\mathbf{r}, o) t_{12}(\omega) \mathcal{Y}_{-\omega}^0(\mathbf{r}, o) \\ &\quad - \mathcal{T}_{\omega}^0(\mathbf{r}, o) t_{22}(\omega) \mathcal{Y}_{-\omega}^0(\mathbf{r}, o) \end{aligned} \quad (17)$$

となる。 $\mathcal{Y}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ は、 $\Delta(\mathbf{r})$ の linear まで考えている限り、normal の Green 関数でおきかえてよく、 $\mathcal{T}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ は Δ の linear で展開して、

$$\mathcal{T}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int \mathcal{Y}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \ell) \Delta(\ell) \mathcal{Y}_{-\omega}^0(\mathbf{s}, \ell) d^3 \ell \quad (18)$$

を考えてやればよい。(8) と (18) から (17) を書きかえれば、order parameter の self-consistent eq, を得る。

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) &= g T \sum_{\omega} \int K_0(\mathbf{r}-\mathbf{s}|\omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3 s - g T \sum_{\omega} t_{12}(\omega) K_0(\mathbf{r}, \omega) \\ &\quad - g T \sum_{\omega} t_{22}(\omega) I_1(\mathbf{r}, \omega) - g T \sum_{\omega} t_{11}(\omega) I_2(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|, \omega) = \mathcal{Y}_\omega^0(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \mathcal{Y}_\omega^0(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \quad (20)$$

と定義した。ここで、 T, T_c の近似、 $r P_F \gg 1$ では、 $\exp(i P_F r)$ は急激に振動して消えてしまうことを考えてやれば、 $I_1(\mathbf{r}, \omega)$ 、 $I_2(\mathbf{r}, \omega)$ は $K_0(\mathbf{r}, \omega)$ を使って、

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2\rho_0(\omega)} K_0(\mathbf{r}, \omega) \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s, \\ I_2(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{-1}{2\rho_0(\omega)} K_0(\mathbf{r}, \omega) \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s \end{aligned} \quad (21)$$

と書かれる。ここで、 $\rho_0(\omega) = \mathcal{Y}_\omega^0(0,0) = -i\pi\rho \text{sign } \omega$ である。こうして、

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) &= gT \sum_{\omega} \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s - gT \sum_{\omega} t_{12}(\omega) K_0(\mathbf{r}, \omega) \\ &\quad - gT \sum_{\omega} \frac{t_{22}(\omega) + t_{11}(\omega)}{2\rho_0(\omega)} K_0(\mathbf{r}, \omega) \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s \end{aligned} \quad (22)$$

なる、一般化された $\Delta(\mathbf{r})$ の linearized self-consistent eq, を得た。

§ 3. $\hat{t}(\omega)$ - matrix :

簡単のため、 $\hat{t}(\omega)$ - matrix を、Kondo 効果が入る。J について最低次、三次まで計算しよう。 $\hat{t}(\omega)$ - matrix の diagonal 成分は容易に解かれるように、normal 状態の t -matrix と、 Δ の二次から始まる項とからなっている。したがって、 $t_{11}(\omega)$ 、 $t_{22}(\omega)$ は normal 状態の t -matrix で置きかえてよい。同様なことは、 $m(\mathbf{r})$ 、 $n(\mathbf{r})$ についても言える。 $n(\mathbf{r})$ は電子の分布関数とする。こうして、 $t_{11}(\omega)$ 、 $t_{22}(\omega)$ 、 $m(\mathbf{r})$ は、 J^3 までは容易に求められて、

$$t_{11}(\omega) = t_{22}(\omega) = \frac{3}{4} \left(\frac{J}{2}\right)^2 \rho_0(\omega) + i \frac{3}{2} \left(\frac{J}{2}\right)^3 \rho \rho_0(\omega) g(i\omega) \quad (23)$$

$$m_{\mathbf{k}} = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} m(\mathbf{r}) d^3r = i \frac{3}{4} \left(\frac{J}{2}\right) \rho g(\xi_{\mathbf{k}}) \quad (24)$$

北村豊幸

ここで、 $\xi_{\mathbf{k}}$ は Fermi 面から測った運動量 $\mathbf{k}$ のエネルギーである。 $g(\xi_{\mathbf{k}})$ は次のように定義される。

$$g(\xi_{\mathbf{k}}) = 2 \pi T \sum_n \frac{\text{sign } \omega_n}{\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}} \quad (25)$$

$t_{12}(\omega)$ を求めるために、(13) 式を J の三乗まで展開すれば

$$\begin{aligned} t_{12}(\omega) = & - \left(\frac{J}{2}\right)^2 (\hat{r}_1(\omega) + \hat{r}_2(\omega))_{12} + \left(\frac{J}{2}\right)^3 \{ (\hat{G}(\omega)_{11} + \hat{\Delta}(\omega)_{12}) \\ & \times (\hat{r}_1(\omega) + \hat{r}_2(\omega))_{12} + (-\hat{G}(\omega)_{12} + \hat{\Delta}(\omega)_{11}) \cdot (\hat{r}_1(\omega) + \hat{r}_2(\omega))_{22} \} \end{aligned} \quad (26)$$

となり、ここで、スペクトル定理

$$\Delta'(\mathbf{r}) = -T \sum_{\omega} \hat{G}_{\omega}^0(0, \mathbf{r})_{12} = -T \sum_{\omega} \int \mathcal{V}_{\omega}^0(0, \mathbf{s}) \Delta(\mathbf{s}) \mathcal{V}_{-\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{s}) d^3 S \quad (27)$$

$$\hat{\nu}(\mathbf{r}) = -2T \sum_{\omega} \hat{r}_{\omega}(0, \mathbf{r})_{0,d} = 2T \frac{2}{J} \sum_{\omega} (\hat{t}(\omega) \hat{G}_{\omega}^0(0, \mathbf{r}))_{0,d}, \quad (28)$$

と、(16) 式を使って、(26) 式を書き下せば、 $t_{12}(\omega)$ の積分方程式を得る。 J について逐次近似を行えば、 J^2 の項は直ちに求められる。この J^2 の項を (26) 式の右辺の $t_{12}(\omega)$ に入れてやれば、 J^3 も求めることが出来る。こうして得た J^2 , J^3 の項を $t'_{12}(\omega)$, $t^2_{12}(\omega)$ とすれば、

$$t'_{12}(\omega) = \frac{3}{4} \left(\frac{J}{2}\right)^2 \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3 S \quad (29)$$

$$\begin{aligned} t^2_{12}(\omega) = & - \left(\frac{J}{2}\right)^3 \left[\left\{ \frac{2}{J} M(\omega) + \frac{3}{4} i \rho g(i\omega) - \frac{3}{2} \rho_0(\omega) F(\omega) \right\} \right. \\ & \times \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3 S + \frac{3}{2} T \sum_{\omega'} \{ \rho_0(\omega') G(\omega, \omega') + \rho_0(\omega) G(\omega, \omega') \\ & \left. - \frac{2\pi\rho\theta(\omega\omega')}{|\omega| + |\omega'|} \} \int K_0(\mathbf{s}, \omega') \Delta(\mathbf{s}) d^3 S \right] \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 T , T , 近似の範囲内で、

$$\int \psi_w^0(\mathbf{0}, \mathbf{s}) \Delta(\mathbf{s}) \psi_{-\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{s}) d^3s \cong \frac{1}{2\rho_0(\omega)} \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s \\ \times \int \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d^3p}{\xi + i\omega (2\pi)^3} \quad (31)$$

を使う。こうして,

$$M(\omega) = \frac{1}{2\rho_0(\omega)} \int \frac{1}{\xi + i\omega} m^0(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^3r = \frac{3}{2} \left(\frac{J}{2}\right) \rho \pi T \sum_{\omega'} \frac{\theta(\omega\omega')}{|\omega| + |\omega'|} \quad (32)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\rho_0(\omega)} \int \frac{1}{\xi + i\omega} f(\xi) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{iT}{2} \sum_{\omega'} \frac{\text{sign } \omega}{|\omega| + |\omega'|} \quad (33)$$

$$G(\omega, \omega') = -\frac{\rho}{2\rho_0(\omega)} \int \frac{1}{\xi - i\omega} \frac{1}{\xi + i\omega'} d\xi = -i \frac{\theta(\omega\omega') \text{sign } \omega}{|\omega| + |\omega'|} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2} i \rho g(i\omega) = \rho \int \frac{1}{i\omega - \xi} f(\xi) d\xi = \pi \rho T \sum_{\omega'} \frac{1}{|\omega'| + |\omega|} \quad (35)$$

こうして得た, (32) ~ (35) を (30) に代入し, (22), (23), (30) から

$$\Delta(\mathbf{r}) = gT \sum_{\omega} \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s \\ = -\left(\frac{J}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} gT \sum_{\omega} K_0(\mathbf{r}, \omega) \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s + \left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \rho \pi gT^2 \sum_{\omega\omega'} \\ \left[\frac{4}{|\omega| + |\omega'|} K_0(\mathbf{r}, \omega) \int K_0(\mathbf{s}, \omega) \Delta(\mathbf{s}) d^3s - \frac{2}{|\omega| + |\omega'|} K_0(\mathbf{r}, \omega) \right. \\ \left. \times \int K_0(\mathbf{r}, \omega') \Delta(\mathbf{s}) d^3s \right] \quad (36)$$

を得る。(36) 式の右辺 J^2 の項のみをとれば, これは, T, T, や

Heinrichs が扱った. Born 近似の範囲である。 J^3 の項は Kondo 効果を考慮したため入ってきた。

北村豊幸

§ 4. 積分方程式の解：

(36) 式を，Heinrichs に従って，積分演算子を使って，摂動として解こう。

$$L(r) \Delta(r) \equiv \frac{1}{g\rho} \left[\Delta(r) - gT \sum_{\omega} \int d^3s K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|, (\omega) \Delta(s) \right] \quad (37)$$

と定義すれば，(36) 式は，

$$\begin{aligned} L(r) \Delta(r) = & - \left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{T}{\rho} \sum_{\omega} K_0(r, \omega) \langle K_0(\omega) \Delta \rangle \\ & + \left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \pi T^2 \sum_{\omega, \omega'} \left[4 \langle K_0(\omega) \Delta \rangle - 2 \langle K_0(\omega') \Delta \rangle \right] \\ & \times \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} K_0(r, \omega) \end{aligned} \quad (38)$$

となる。ここで， $\langle F(r) \rangle = \int F(r) d^3r$ と定義する。(38) 式の両辺に $z\Delta$ を加えて，

$$\begin{aligned} (L+z) \Delta = & - \left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{T}{\rho} \sum_{\omega} K_0(r, \omega) \langle K_0(\omega) \Delta \rangle \\ & + \left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \pi T^2 \sum_{\omega, \omega'} \left[4 \langle K_0(\omega) \Delta \rangle - 2 \langle K_0(\omega') \Delta \rangle \right] \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} K_0(r, \omega) + z\Delta \end{aligned} \quad (39)$$

とし，

$$\langle (L+z) \Delta \rangle \equiv 0 \quad (40)$$

なる z をとってやれば，

$$\begin{aligned} z \langle \Delta \rangle = & \left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{T}{\rho} \sum_{\omega} \langle K_0(\omega) \rangle \langle K_0(\omega) \Delta \rangle \\ & - \left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \pi T^2 \sum_{\omega, \omega'} \left(4 \langle K_0(\omega) \Delta \rangle - 2 \langle K_0(\omega') \Delta \rangle \right) \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} K_0(r, \omega) \end{aligned} \quad (41)$$

となる。Heinrichs の論文で，議論しているように， $\langle L+z \rangle = 0$ が遷移温度 T_c を決める式である。今， T_{c0} を pure 超伝導体の遷移温度とすれば，

$$\ln \frac{T_{co}}{T_c} = z \quad (42)$$

となる。以下、摂動を行うために、

$$\Delta(r) = (1+f(r)) \Delta_0, \quad \Delta_0 \equiv \Delta(\infty) \quad (43)$$

と置き、 z , $f(r)$ を J^2 , J^3 の項で、次のように展開する。

$$f(r) = f_1(r) + f_2(r) + \dots \quad (44)$$

$$z = z_1 + z_2 + \dots \quad (45)$$

$T \cong T_c$ では、(42) 式から、いわば、exact な z を決めることが出来るから、(39) 式の左辺を無摂動の部分として、とり扱うことが出来る。こうして、

$$\begin{aligned} \Delta(r) = \Delta_0 - \frac{1}{L+z} & \left[\left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{T}{\rho} \sum_{\omega} K_0(r, \omega) \langle K_0(\omega) \Delta \rangle \right. \\ & \left. - \left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \pi T^2 \sum_{\omega, \omega'} (4 \langle K_0(\omega) \Delta \rangle - 2 \langle K_0(\omega') \Delta \rangle) K_0(r, \omega) \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} - z \Delta \right] \end{aligned} \quad (46)$$

を得る。(41), (46) から、

$$f_1(r) = -\frac{1}{L+z} \left[\left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{T}{\rho} \sum_{\omega} K_0(r, \omega) \langle K_0(\omega) \rangle - z_1 \right] \quad (47)$$

$$\begin{aligned} f_2(r) = \frac{1}{L+z} & \left[\left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \pi T^2 \sum_{\omega, \omega'} (4 \langle K_0(\omega) \rangle - 2 \langle K_0(\omega') \rangle) \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} \right. \\ & \left. \times \langle K_0(\omega) \rangle + z_2 \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$z_1 = \frac{1}{V} \left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{T}{\rho} \sum_{\omega} \langle K_0(\omega) \rangle \langle K_0(\omega) \rangle \quad (49)$$

$$z_2 = -\frac{1}{V} \left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \pi T^2 \sum_{\omega, \omega'} (4 \langle K_0(\omega) \rangle - 2 \langle K_0(\omega') \rangle) \langle K_0(\omega) \rangle \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} \quad (50)$$

北村 豊

ここで、 $V \rightarrow \infty$ をとれば、 $f_1(r)$ 、 $f_2(r)$ の z_1 、 z_2 の項は、第一項に比べて、 $\frac{1}{V}$ の order であるから、無視出来て、

$$f_1(r) = -\frac{1}{L+z} \left[\left(\frac{J}{2} \right)^2 \frac{3}{2} \frac{T}{\rho} \sum_{\omega} K_0(r, \omega) \langle K_0(\omega) \rangle \right] \quad (51)$$

$$f_2(r) = \frac{1}{L+z} \left(\frac{J}{2} \right)^3 \frac{3}{2} \pi T^2 \sum_{\omega, \omega'} (4 \langle K_0(\omega) \rangle - 2 \langle K_0(\omega') \rangle) \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} K_0(r, \omega) \quad (52)$$

となる。(49)、(51) は、まさに、Heinrichs が求めたものである。今、十分低温であれば、

$$\pi T \sum_{\omega'} \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} = \int_0^D \frac{dx}{x + |\omega|} = \ell_n \frac{D}{|\omega|} \quad (53)$$

としてよい。ここで、 D は伝導帯の幅を与えている。また、

$$\pi T \sum_{\omega'} \frac{1}{|\omega'|} \frac{1}{|\omega| + |\omega'|} = \frac{1}{|\omega|} \left\{ \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} |2n+1|\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \quad (54)$$

となる。ここで、 $\psi(x)$ は di Gamma 関数である。こうして遷移温度や、order parameter の空間的変化、 $f_1(r)$ 、 $f_2(r)$ が求められる。

$$\begin{aligned} \ell_n \frac{T_{co}}{T_c} &= z_1 + z_2 \\ &= \frac{3\rho}{V T_c} \left(\frac{J}{2} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[1 - \frac{J}{2} \rho \left\{ 4 \ell_n \frac{D}{(2n+1) \pi T_c} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(\psi(n+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

$$f_1(r) = \left(\frac{J}{2} \right)^2 \frac{9}{7 \pi^2 \zeta(3)} \frac{m^2}{\xi_0^2} \left[\left\{ \frac{\xi_0}{r} e^{-\frac{r}{\xi_0}} - E_1\left(\frac{r}{\xi_0}\right) \right\} - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\xi_0}{r} \right] \quad (56)$$

$$f_2(r) = \left(\frac{J}{2} \right)^3 \rho 3 \pi T \sum_{n \geq 0} \left\{ 4 \ell_n \frac{D}{|\omega|} - 2 \left[\psi(n+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{L+z} K_0(r, \omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{J}{2}\right)^3 \rho \frac{9}{7\pi^2 \zeta(3)} \frac{m^2}{\xi_0^2} \left[\left\{ 4 \ell_n \frac{D}{\pi T} - 2(\psi(1) - \psi(\frac{1}{2})) \right\} \left\{ \frac{\xi_0}{r} e^{-\frac{r}{\xi_0}} - E_1\left(\frac{r}{\xi_0}\right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \left\{ 4 \ell_n \frac{D}{(2n+1)\pi T} - 2(\psi(n+1) - \psi(\frac{1}{2})) \right\} \frac{\xi_0}{r} \right] \quad (57)
\end{aligned}$$

ここで、 ξ_0 は coherence length で、 $\frac{v_F}{2\pi T_C}$ 、 $\zeta(3)$ は ζ -関数、
 $E_1(x) = \int_x^\infty dt \frac{e^{-t}}{t}$ である。遷移温度を決める (55) 式は、Zuckermann⁶⁾
 が導出したものを、 J の三次まで展開したものに一致する。(55) 式、及び、
 (56)、(57) 式において、 J の二次、三次の項を比べることにより、
 $1 = 2|J|\rho \ell_n \frac{D}{T_C}$ 、即ち、 T_C が近藤温度に近づくと、 J の三次以上の項が
 重要となり、log 発散が起こることを示している。

§ 5. 結 論：

不純物スピンの dynamics をとり入れて始めて、遷移温度や $\Delta(r)$ の空間的変化の J^3 の項に、Kondo 効果が表われることを示した。ここでの計算は、 $\Delta(r)$ の $\xi_0 \ll r$ の領域における、 J^3 の項までの計算を求めたに過ぎないが、 $r \ll \xi_0$ の領域のことや、 J のさらに高次の取扱に興味があり、残された問題である。さらに、T, T_C や Heinrichs, ここでの計算も、 T_C の極近傍での考察であるが、全温度領域での取扱いは、非線型積分方程式となり、正面から解いて行くことは、非常に困難と思われる。おわりに、問題を提供され、御指導下さった高野文彦先生、有益な議論をして下さった小寺武康先生、大沢健郎先生に感謝します。

参 考 文 献

- 1) A.A. Abrikosov and L.P. Gor'kov, Zh. Exsp. i Teor. Fiz, 39 1781 ('60) (English trans; Soviet Phys, JETP 12 1243 ('61))

北村豊幸

- 2) J. Kondo, Prog, Theor, Phys, (Kyoto) 32 37 ('64)
- 3) S. H. Liu, Phys, Rev. 137 A1209 ('65)
- 4) A. Griffin, Phys, Rev, Letters 15 703 ('65)
- 5) K. Maki, Phys, Rev. 153 428 ('67)
- 6) M. J. Zuckermann, Phys, Rev. 168 390 ('68)
- 7) F. Takano and S. Matayoshi (to be published)
- 8) T. Tsuzuki and T. Tsuneto, Prog, Theor, Phys (Kyoto)
37 1 ('67)
- 9) J. Heinrichs, Phys, Rev. 168 451 ('68)
- 10) Y. Nagaoka, Phys, Rev. 138 1112 ('65)
- 11) Y. Nagaoka, Prog, Theor, Phys. (Kyoto) 37 13 ('67)