

5. 臨界指数の展開理論 — 連続的に変る臨界指数 —

東大物性研 鈴木 増 雄

臨界指数の古典的な決め方の1つとして、相互作用についての摂動展開を高次まで行ない、それに ratio method や Pade 等を適用し、近似的に評価する方法がある。ここでは、それとは違って、臨界指数そのものを適当なパラメータ λ で展開する一般的な方法を議論し、いくつかの具体例に応用した結果を報告する。さて、一般に、ハミルトニアン $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\lambda)$ の如く、パラメータ λ を含むか、或いは、もっと一般に、(次元 d のように) 位相空間の積分のところにパラメータ λ が含まれる場合を考える。今、仮に、 $\lambda = 0$ のところすでに相転移が起り、そこでの臨界的な振舞がよくわかっているとしよう。その場合には、任意の物理量 Q を

$$Q = Q_0 + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \dots \quad (1)$$

の如く、 λ で展開し、その展開係数 $Q_1, Q_2, \dots$ の T_c 近傍での異常性を調べることができる。一方、 Q が $T_c(\lambda)$ の近くで、

$$Q \simeq A(\lambda) \varepsilon(\lambda)^{-\phi(\lambda)} ; \quad \varepsilon(\lambda) = \{T - T_c(\lambda)\} / T_c(\lambda), \quad (2)$$

のような異常性を持つと仮定し、これを λ で微分すると、

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \simeq -A\phi(0)\varepsilon'(0)\varepsilon^{-\phi-1} - A\phi'(0)\varepsilon^{-\phi} \ln \varepsilon + A'(0)\varepsilon^{-\phi} \quad (3)$$

のようになる。そこで、(1)の Q_1 の漸近形

$$Q_1 \simeq Q_1^{(1)} \varepsilon^{-\phi-1} + Q_1^{(2)} \varepsilon^{-\phi} \ln \varepsilon + O(\varepsilon^{-\phi}), \quad (4)$$

と求まるとすれば、(3)と(4)を比較して、

(matching conditions)

$$(I) T_c \text{ の shift } \rightarrow \varepsilon'(0) = -Q_1^{(1)} / A \quad (5)$$

$$(II) \text{ 臨界指数の shift } \rightarrow \phi'(0) = -Q_1^{(2)} / A, \quad (6)$$

となる。こうして、高次まで進めると、次のように T_c と ϕ が展開形式で求まる^{1) 2)}

$$T_c(\lambda) = T_c(0) + \lambda T_1 + \lambda^2 T_2 + \dots, \quad (7)$$

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \lambda \phi_1 + \lambda^2 \phi_2 + \dots. \quad (8)$$

上の展開理論の応用例を 2・3 以下に述べる。

例 1: eight-vertex model³⁾ と連続的に変る臨界指数

この模型はイジングスピンの表現すると、次のようになる⁴⁾

$$\mathcal{H} = -J^+ \sum_{j,k} \sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k+1} - J^- \sum_{j,k} \sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k} \quad (9)$$

$$- \lambda \sum_{j,k} \sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k+1} \sigma_{j+1,k} \sigma_{j,k+1}$$

$\lambda = 0$ では、 $\mathcal{H}$ は独立な 2 つの 2 次元イジング模型を表わしているから、その厳密解は良く知られている。そこで、上の一般論にならって、例えば、帯磁率 χ の臨界指数 r を λ の関数とみなして、 λ について展開してみる。

$$Q_1 = \chi_1 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = u \left(\frac{\partial \chi}{\partial J} \right)_{\lambda=0} \sim \frac{r(0) \chi}{\sqrt{2J} \varepsilon} - \frac{4r(0) \chi}{\pi k T_c} \ln \varepsilon \quad (10)$$

但し、 u は 2 次元正方格子 ($\lambda = 0$) における最近接のスピン相関を表わす。(10 式は正しく、(4) の形をしている。従って、matching condition より、特に、臨界指数の 1 次の変化は

$$r'(0) = -4r(0) / (\pi k T_c) \quad (11)$$

と求まり、臨界指数は、パラメータ λ に依存し連続的に変ることになる。こういう

universality を破る結果が現れた理由は、上の議論からわかるように、(9) において 4 体力の項が丁度、(エネルギー密度) × (エネルギー密度) の型 になっていて、(10 式の

第3番目の等式が成立し、その上、 $\lambda = 0$ で比熱に対数発散があるという2つの条件が同時に満たされたことにある。

例2: multilayer Ising model with four-body interaction

この模型は、次のハミルトニアンで表わされる。^{1) 4)}

$$\mathcal{H}_{2-4} = -\sum_{\langle ij, mn \rangle} \left(\sum_{k=1}^L J_{ij, k}^{\sigma} \sigma_{mn, k} + \lambda \sum_{k=1}^{L-1} \sigma_{ij, k} \sigma_{ij, k+1} \sigma_{mn, k} \sigma_{mn, k+1} \right) \quad (12)$$

例1と全く同様にして、次の結果が得られる。^{1), 4), 5)}

$$\frac{r(\lambda)}{r(0)} = \frac{\beta(\lambda)}{\beta(0)} = \frac{\nu(\lambda)}{\nu(0)} = 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\lambda}{kT_c(0)} + O(\lambda^2) \quad (13)$$

例3: classical n -vector model with long-range interaction

n -vector $\vec{S}_j = (\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \dots, \sigma_{jn})$ を用いて、ハミルトニアンは、次のように書かれる⁶⁾ :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i>j} J r_{ij}^{-(d+\sigma)} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) . \quad (14)$$

但、 σ_{jk} は $-\infty < \sigma_{jk} < \infty$ の値を連続的にとり、 $\sum_{k=1}^n \sigma_{jk}^2 = n$ を充しているものとする。 $n=\infty$ の場合は spherical model と呼ばれ、厳密に解かれている。

⁷⁾ (尚、 $n=1$ はイジング模型、 $n=2$ はボーズ系、 $n=3$ はハイゼンベルグ模型に対応する。) そこで、Abe⁸⁾ にならって、 λ として $1/n$ をとり、 $1/n$ の展開を行なう。ここでは、long-range interaction の場合に興味があるので、 $0 < \sigma < \min(d, 2)$ とする。次数 $1/n$ までの展開で次の結果が得られる。

(I) classical region

critical potential range σ_c があって $0 < \sigma < \sigma_c$ ($\sigma_c = \frac{1}{2}d$) では、 $r=1$ (classical) になる。さらに、

a) $0 < \sigma < \frac{1}{3}d$ では、 $\chi \sim \epsilon^{-1} + O(1)$,

b) $\frac{1}{3}d < \sigma < \frac{1}{2}d$ では、

$$\chi \sim \frac{b_1}{\epsilon} + \frac{b_2}{\epsilon^{3-d/\sigma}} + O(1),$$

形になり, $0 < 3 - d / \sigma < 1$ より, main singularity より弱いけれどもそれに近い発散項が存在する。(これを confluent singularity と呼ぶ) こういう confluent singularity が存在する場合には, それを1つの singularity で解析しようとする, 見かけ上, 臨界指数の連続的に変るように見えることがあるので注意を要する。実際 Nagle 達⁹⁾の数値計算の結果 ($d=1$) では σ が $\frac{1}{3}$ のあたりから, 臨界指数は non-classical になり始める, これは, confluent singularity ためであると考えられる。

(II) non-classical region : $\frac{1}{2}d < \sigma$

$Q_1 \equiv \chi_1$ の解析を行なうと, (4)のように, $\epsilon^{-r} \ln \epsilon$ の項が現れ, 臨界指数は, n に依存することがわかる。

詳しくは, 「相転移の統計力学」の研究会報告を参照して欲しい。

参 考 文 献

- 1) M. Suzuki: Phys. Rev. Letters 28 (1972) 507
- 2) K. Wilson: Phys. Rev. Letters 28 (1972) 548
- 3) R.J. Baxter: Phys. Rev. Letters, 26 (1971) 832
Ann. Phys. 70 (1972) 193
- 4) 鈴木増雄: 固体物理 7 (1972) 37
- 5) 鈴木増雄: 日本物理学会誌 8月号 (1972)
- 6) H.E. Stanley, Phys. Rev. Letters 20 (1968) 589
Phys. Rev. 176 (1968) 718
- 7) G.S. Joyce: Phys. Rev. 146 (1966) 349
- 8) R. Abe: Prog. Theor. Phys. (in press)
- 9) J.E. Nagle and J.C. Bonner; J. Physics C 3 (1970) 352