

浅い水路中を動く圧力攪乱により生じる 3 次元水面波

京都大学大学院・情報学研究科・複雑系科学専攻
早藤啓, 船越満明

Hiroshi Hayafuji and Mitsuaki Funakoshi
Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems,
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 はじめに

船のモデルとして考える自由表面での圧力の局在した攪乱が、両側に壁をもつ浅い水路中を動いていく場合を考える。このとき、圧力攪乱によって作られる波のパターンは攪乱の動く速さによって異なる。特に圧力攪乱の速度と長波の位相速度の比で表されるフルード数 F が 1 に十分近い場合には、圧力攪乱の前方に 2 次元的 (平面波的) な波が周期的に放出されることが知られている [2]–[7]。Ertekin ら [3] は、水槽を用いた実験によって船の前方に二次元的な波が周期的に放出されることを確かめた。数値計算では、Pedersen[6] がブシネスク型方程式を数値的に解くことで圧力攪乱によって作られる波を調べ、その計算結果は Ertekin らの実験結果と良い一致を示した。また、Pedersen は攪乱の前方に作られる 2 次元的な波は、マッハ反射 [8][9] によって作られると考え、2 次元的な波が作られる上限のフルード数での壁への入射角とマッハ反射の臨界角を比較し、壁ではマッハ反射が起きていると結論づけた。本研究では、Pedersen[6] と同じブシネスク型方程式を用いて数値計算を行い、圧力攪乱の後方に作られる波を中心に水面波のパターンを調べる。

2 モデル方程式と数値計算法

本研究では、Pedersen[6] が導出した 3 次元ブシネスク型方程式をもとに数値計算を行う。流体は非圧縮、非粘性であると仮定して、その渦なし運動を考え、速度ポテンシャルを導入する。座標軸として水平方向に x^* 軸、 y^* 軸、鉛直方向上向きに z^* 軸をとる。時間を t^* 、自由表面変位を η^* 、速度ポテンシャルを Φ^* 、圧力を p^* とする。水平方向スケールである代表波長 l 、鉛直方向スケールである水深 h_0 、長波の位相速度 $\sqrt{gh_0}$ を用いて、次のように無次元化する。

$$\begin{cases} z^* = h_0 z, & x^* = lx, & y^* = ly, & t^* = \frac{l}{\sqrt{gh_0}} t, \\ \eta^* = \alpha h_0 \eta, & \Phi^* = \alpha l \sqrt{gh_0} \Phi, & p^* = \alpha \rho g h_0 p \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで g は重力加速度、 ρ は流体密度である。水面変位は水深の α 倍程度の大きさだと仮定し、さらに $\epsilon = (h_0/l)^2$ を導入する。また、 α および ϵ は同程度の微小量であると仮定する。底が平らな水路の場合、連続の式から導出されるラプラス方程式、自由表面での力学

的境界条件と運動学的境界条件、および水底での運動学的境界条件はそれぞれ以下のよう
に書ける。

$$\epsilon \nabla^2 \Phi = -\Phi_{zz}, \quad \text{for } -1 \leq z \leq \alpha\eta, \quad (2.2a)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\alpha(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}\alpha\epsilon^{-1}(\Phi_z)^2 + \eta + p' = 0, \quad \text{at } z = \alpha\eta, \quad (2.2b)$$

$$\epsilon(\eta_t + \alpha\nabla\Phi \cdot \nabla\eta) = \Phi_z, \quad \text{at } z = \alpha\eta, \quad (2.2c)$$

$$\Phi_z = 0, \quad \text{at } z = -1 \quad (2.2d)$$

ここで下つき添字は偏微分を表し、 $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ である。また、 p' は自由表面圧力の大気
圧からのずれであり、これが水路中を進む船のモデルである圧力攪乱を表す。

流体の鉛直方向の速度変化は水平方向の速度変化に比べて十分小さいと仮定し、鉛直方
向に平均化した速度ポテンシャル ϕ を次のように導入する。

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{1 + \alpha\eta} \int_{-1}^{\alpha\eta} \Phi(x, y, z, t) dz \quad (2.3)$$

式 (2.2a) - (2.2d) および体積保存の式に対して平均化した速度ポテンシャルを用いる
ことで、次の2式が得られる。

$$\eta_t = -\nabla \{ (1 + \alpha\eta) \nabla \phi \} + O(\alpha\epsilon), \quad (2.4)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\alpha(\nabla\phi)^2 + \eta + p' - \frac{1}{3}\epsilon\nabla^2\phi_t = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon) \quad (2.5)$$

これらの2つの式が Pedersen が導出したブシネスク型方程式である。上記の式において
 $O(\epsilon^2, \alpha\epsilon)$ 以上の項を無視したモデル方程式を数値的に解くことによって、自由表面変位 η
と平均化速度ポテンシャル ϕ の時間発展を求める。

数値計算は差分法を用いて行う。空間を $\Delta x, \Delta y$ 、時間を Δt の間隔で離散化し、 η と ϕ
の値を定義する時刻は $\frac{\Delta t}{2}$ だけずらす。(2.4)、(2.5) の左辺の ϵ あるいは α がかかっている
項については2次精度、それ以外の項については4次精度となるように、中心差分を用
いて離散化する。この離散化によって(2.4)と(2.5)から導かれる、時間を1ステップ進め
るための式は、それぞれブロック対角行列を係数とする連立1次方程式となり、SLOR法
(逐次線過緩和法)を用いて η と ϕ について交互に解くことで、時間発展を求める。

本研究では、図1に示すような、水路の長さ方向に $0 \leq x \leq x_{max}$ 、水路の幅方向に
 $0 \leq y \leq y_{max}$ の領域で計算を行う。 $y = 0$ および $y = y_{max}$ に壁があり、壁での境界条件は

$$\phi_y = \eta_y = 0, \quad \text{at } y = 0, y_{max}, \quad (2.6)$$

$$\phi_{yyy} = \eta_{yyy} = 0, \quad \text{at } y = 0, y_{max} \quad (2.7)$$

と書ける。また、 x 軸正方向に進む圧力攪乱の前方 $x = x_{max}$ および後方 $x = 0$ では、仮
想的な境界条件として放射境界条件を用いる。すなわち、これらの境界に達した波は無次
元化された長波の位相速度である速さ1で流れ去るようにして、

$$\phi_t - \phi_x = \eta_t - \eta_x = 0, \quad \text{at } x = 0, \quad (2.8)$$

$$\phi_t + \phi_x = \eta_t + \eta_x = 0, \quad \text{at } x = x_{max} \quad (2.9)$$

と仮定する。しかし、この境界条件は振幅の大きな波には適用できないため、大きな波が境界に到達したところで計算を終了する。

船のモデルとして、以下のような楕円形の圧力攪乱を用いる。

$$p'(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}p_a(1 + \cos \pi\theta) & |\theta| \leq 1 \\ 0 & |\theta| > 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\theta(x, y, t) = \sqrt{\left(\frac{x - x_0 - Ft}{L}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R}\right)^2} \quad (2.11)$$

ここで F はフルード数であり、圧力攪乱の速度 U を用いて

$$F = \frac{U}{\sqrt{gh_0}} \quad (2.12)$$

で与えられ、無次元化された圧力攪乱の速度を表す。また、 x_0, y_0 は圧力攪乱の初期位置を表す定数であり、定数 L, R はそれぞれ圧力攪乱の x, y 方向の大きさを表す。また、 p_a は圧力攪乱の強さを表す定数である。

数値計算を行うにあたって、各パラメータの値を $\alpha = \epsilon = 0.1, p_a = 0.05, L = 4, R = 2, x_{max} = 180$ と固定し、離散化においては $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0.1$ とした。計算は $\eta = 0, \phi = 0$ の波のない状態からはじめ、初期時刻 $t = 0$ において計算領域の中心に圧力攪乱を置くために $x_0 = 90, y_0 = y_{max}/2$ とする。なお、時間発展を計算する際には、常に圧力攪乱が計算領域の中心にあるようにするために、計算領域を圧力攪乱と同じ速度で x 軸正方向へ動かす。

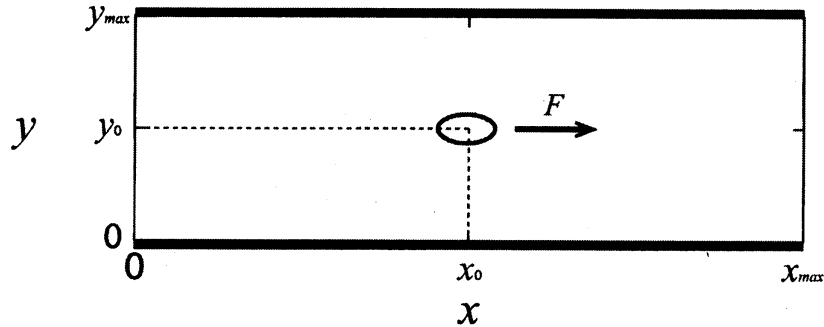


図 1: 計算領域と圧力攪乱。図中の楕円形が圧力攪乱を表す。

3 結果

3.1 前方の波

圧力攪乱が速度 1 で水路の中心を動くとき、圧力攪乱の前方では、水路幅全体に渡る 2 次元的 (平面波的) な波が周期的に放出される。時刻 $t = 0$ の静止水面から圧力攪乱が動くとき、圧力攪乱の前端から斜め後方に向かって正の変位を持つ波が放出されるが、壁でマッハ反射 [8][9] に似た反射が起こることによって、壁に対して垂直で直線的な波が作られていく。やがて水路の幅全体に渡る 2 次元的 (平面波的) な波となり、その振幅がある決まった一定の大きさになると、圧力攪乱の前方に向かって進行しはじめる。さらに時間が経過すると、圧力攪乱の前方に 2 次元的な波が次々と作られ、周期的に放出される。このとき放出される波の振幅は、1 番目に放出される波の振幅が最も大きく、その後について放出される波の振幅は少しずつ小さくなっていく。

水路幅が $D = 20$ の場合、前方に波が作られるフルード数の範囲は、 $0.9 < F \leq 1.021$ である。この範囲内では、フルード数が大きくなると前方に放出される波の波高は大きくなる。しかし、フルード数が上限よりも大きくなると、前方に波は放出されなくなる。フルード数が上限よりも大きい場合、攪乱によって作られた波は斜め後方へ放出され、壁で反射しながら攪乱の後方へ伝搬していく。一方、フルード数が小さくなると前方に放出される 2 次元的な波の波高は小さくなっていき、 $F \sim 0.9$ 程度になるとほとんど観測できなくなる。圧力攪乱の速度が 1 よりも十分に小さい場合、攪乱の前方と後方にそれぞれ不規則なパターンを持つ微小な波が作られる。また、フルード数を 1 として水路幅を変えた場合、水路幅が広がるほど前方に放出される 2 次元的な波の波高は小さくなり、放出周期は長くなる。

3.2 後方の波

圧力攪乱の後方にできる波は前方の波と比べて複雑な振る舞いをする。後方の波について調べるため、まず 2 次元の場合を考える。本研究で使用しているブシネスク型方程式 (2.4)、(2.5) において ϕ と η の y 偏微分をゼロとすると、

$$\eta_t = -\{(1 + \alpha\eta)\phi_x\}_x, \quad (3.1)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\alpha(\phi_x)^2 + \eta + p' - \frac{1}{3}\epsilon\phi_{xxt} = 0 \quad (3.2)$$

が得られる。圧力攪乱 p' は (2.10)、(2.11) のかわりに

$$p'(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}p_a(1 + \cos \pi\theta) & |\theta| \leq 1 \\ 0 & |\theta| > 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\theta(x, t) = \frac{x - x_0 - Ft}{L} \quad (3.4)$$

とする。これらの式を用いた 2 次元問題とした場合には、生成される水面波の波形は forced K-dV 方程式と同じ振る舞いをする [1]。すなわち、圧力攪乱の前方にはソリトンのような波が

周期的に放出され、後方では変調波が成長し、圧力攪乱よりもわずかに遅い速度で攪乱の後方へ伝搬していく。また、変調波と圧力攪乱の間には水面変位が負で平らな領域が作られ、変調波の伝搬につれてその領域は広がっていく。一方、3次元の結果では、2次元の場合と同様に圧力攪乱の後方には変調波と水面変位が負の領域が作られるが、変調波は2次元の場合と比較すると規則性の少ない形になり、その振幅は周期的に変化している。また、2次元では水面変位が負で平らな領域に、3次元では比較的振幅が小さな波が生じる。これらは、2次元と同様な変調波と平らな領域の上に、3次元的な進行波が重ね合わさっているためだと考えられる。この3次元進行波は圧力攪乱と同じ速度で進行しているが、圧力攪乱の前方に作られる波の放出周期と同じ周期で振動しており、その振動は $y = 5, 15$ 付近に節を持つ y 方向の定在波である。

4 まとめ

ブシネスク型方程式を数值的に解き、圧力攪乱によって作られる波について調べた。圧力攪乱の前方では、先行研究と同様に、2次元の(平面波の)な波が周期的に放出されることが確認された。圧力攪乱の後方では2次元の場合でも現れる変調波のほか、圧力攪乱と同じ速度で進行する3次元進行波が作られ、その重ね合わせになっていると考えられる。また、3次元進行波は、圧力攪乱と同じ速度で進行し微小な振幅をもつ定在波と、定常進行波の重ね合わせになっていると考えられる。

参考文献

- [1] Smyth, N. F.: Modulation theory solution for resonant flow over topography. *Proc. Roy. Soc. Lond. Series A.* **409**, 79-97, (1987).
- [2] Katsis, C. and Akylas, T. R.: On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution. Part2. Three-dimensional effects. *J. Fluid Mech.* **177**, 49-65, (1987).
- [3] Ertekin, R. C., Webster, W. C. and Wehausen, J. V.: Ship-generated solitons. In *Proc. 15th Symp. Naval Hydrodyn., Hamburg*, 347-364. National Academy of Sciences, Washington, DC. (1984).
- [4] Wu, T. Y.: Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances. *J. Fluid Mech.* **184**, 75-99, (1987).
- [5] Ertekin, R. C., Webster, W. C. and Wehausen, J. V.: Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width. *J. Fluid Mech.* **169**, 275-292, (1986).
- [6] Pedersen, G.: Three-dimensional wave patterns generated by moving disturbances at transcritical speeds. *J. Fluid Mech.* **196**, 39-63, (1988).

- [7] Mei, C. C.: Radiation of solitons by slender bodies advancing in a shallow channel.
J. Fluid Mech. **162**, 53-67, (1986).
- [8] Miles, J. W.: Obliquely interacting solitary waves.
J. Fluid Mech. **79**, 157-169, (1977).
- [9] Miles, J. W.: Resonantly interacting solitary waves.
J. Fluid Mech. **79**, 171-179, (1977).