

ファジィ平均の提案

高 崙山*, 田宮 稔士**, 河原田 秀夫*

*千葉大学工学部 **川鉄テクノリサーチ (株)

Proposal of the Fuzzy Average

LUN SHAN GAO*, TOSHIO TAMIYA**, HIDEO KAWARADA*

* Faculty of Engineering, University of Chiba

**Kawasaki Steel Techno-Research Corporation

Abstract. In this paper, a new concept of fuzzy average is proposed by use of a fuzzy correlation matrix and a weight function. Furthermore, it is shown that the fuzzy average converges to the corresponding arithmetic mean, when the number of fuzzy partition tends to 0. The fuzzy average is investigated for a definite fuzzy correlation matrix, when the arithmetic operator $R(a, b)$ of the weight function is replaced by t-norms or t-conorms.

1. はじめに

平均といった概念はその目的用途に応じて、算術平均、幾何平均、調和平均あるいは対数平均などが利用されているのは周知の事実である。本論文の目的は、ファジィ平均の概念を紹介して、適切なファジィ相関行列 (M_{ij}^n) を用いて、ファジィ n 分割の数 n が無限大のとき、ファジィ平均は算術平均に収束することを示す。また、一定のファジィ相関行列 (M_{ij}^n) を用いて、重み関数の算術演算 $R(a, b)$ を t ノルムおよび t コノルムに置き換えたとき、ファジィ平均の振る舞いを調べる。

ファジィ平均の定義を第 2 章に示す。ファジィ平均と算術平均との関係を第 3 章に示す。第 4 章では、ファジィ平均の重み関数の算術演算 $R(a, b)$ を各 t ノルムおよび各 t コノルムに代入して、おのこのファジィ平均を計算し、その相違を明かにする。第 5 章は結論である。

2. ファジィ平均の定義

我々は、ファジィ平均の定義を与えた^[2]。ここで、再びファジィ平均の定義を示す。

x_1, x_2 についてのファジィ平均 x_f の定義を述べる前に、三つの定義を定める。

定義 2.1 $a < b, a, b \in R$ とし、区間 $[a, b]$ のファジィ n 分割とは、区間 $[a, b]$ を $n-1 (n \geq 3)$ 分割: $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ して、 n 個の三角型ファジィ数 $A_i = (a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) (1 \leq i \leq n)$ を定めることである。ただし、 $a_0 = a - \frac{b-a}{n-1}, a_{n+1} = b + \frac{b-a}{n-1}$ 。いま、ファジィ数 A_i のメンバシップ関数を $\mu_{A_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ と記す。

区間 $I_1, I_2 (I_1, I_2 \subset R)$ をそれぞれファジィ n 分割することによって、 I_1, I_2 の上に、それぞれ n 個の三角型ファジィ数 $A_i = (a_1^i, a_2^i, a_3^i), B_j = (b_1^j, b_2^j, b_3^j)$ を定め、そのメンバシップ関数はそれぞれ μ_{A_i}, μ_{B_j} であるとする。

定義 2.2 任意の $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$ に対して、重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ を定義する。

区間 I_1, I_2 をそれぞれ上記のようにファジィ n 分割する。このとき、 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ を

(2-2)

$$w_{i,j}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{R(\mu_{A_i}(x_1), \mu_{B_j}(x_2))}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R(\mu_{A_i}(x_1), \mu_{B_j}(x_2))} & \text{if } \sum_{i,j=1}^n R(\mu_{A_i}(x_1), \mu_{B_j}(x_2)) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \sum_{i,j=1}^n R(\mu_{A_i}(x_1), \mu_{B_j}(x_2)) = 0 \end{cases}$$

で定義する。ここで、 $R(a,b)$ は a と b の算術演算を意味する。普通 $R(a,b)=\min\{a,b\}$ とする。 $R(a,b)$ に関する種々の定義を第4章で述べる。

明らかに、関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ は次の性質を持つ。

- (1) $0 \leq w_{i,j}(x_1, x_2) \leq 1$;
- (2) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,j}(x_1, x_2) = 1$.

重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ は x_1 がファジィ数 A_i の代表値 a_2^i に、 x_2 がファジィ数 B_j の代表値 b_2^j にどれだけ近いかを計るものさしになっていると解釈することができる。

定義 2.3 データ x_1 、データ x_2 は共に実数で表わされ、それらの定義域を I_1, I_2 とする。 I_1, I_2 をそれぞれ上記のようにファジィ n 分割する。このとき、 I_1, I_2 をそれぞれ n 個の三角型ファジィ数 $A_i = (a_1^i, a_2^i, a_3^i)$, $B_j = (b_1^j, b_2^j, b_3^j)$ の代表値 a_2^i, b_2^j を要素とする集合 $\{a_2^i\}_{i=1}^n, \{b_2^j\}_{j=1}^n$ で近似する。 $x_1 (x_1 \in \text{supp} A_i)$ と $x_2 (x_2 \in \text{supp} B_j)$ との間の相関をファジィ数 A_i の代表値 a_2^i とファジィ数 B_j の代表値 b_2^j との間の相関で近似する。 a_2^i と b_2^j との間の相関は i, j に関する一つの行列 $(M_{i,j}^n) (1 \leq i, j \leq n)$ で表わされる。今後、 $(M_{i,j}^n)$ を n 次のファジィ相関行列 (Fuzzy Correlation Matrix) と呼ぶことにする。

重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ と $(M_{i,j}^n)$ を用いて、我々はファジィ平均 (fuzzy average) の概念を導入する。

定義 2.4 (ファジィ平均) $I_1 = [a, b], I_2 = [c, d]$ をそれぞれファジィ n 分割し、 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ および $(M_{i,j}^n)$ が定まっているとする。このとき、 $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$ のファジィ平均 $f(x_1, x_2)$ を

$$(2-3) \quad x_f = f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,j}(x_1, x_2) M_{i,j}^n$$

と定義する。ここで、 $e = \min\{a, c\}, f = \max\{b, d\}, M_{i,j}^n \in [e, f], (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。

ファジィ平均の定義および重み関数の性質 (1), (2) より、ファジィ平均 x_f はファジィ相関行列の各要素 $M_{i,j}$ の凸結合になっていることがわかる。

3. ファジィ平均と算術平均との関係

I_1, I_2 をそれぞれファジィ n 分割する。いま、適当なファジィ相関行列 $(M_{i,j}^n)$ を選ぶとファジィ平均は算術平均の近似になる。また、 n が無限大のとき、ファジィ平均が算術平均に収束する。

例えば、 $I_1 = \{x_1 \mid 0 \leq x_1 \leq 1\}, I_2 = \{x_2 \mid 0 \leq x_2 \leq 1\}$ とし、各 $I_i (i = 1, 2)$ を $n-1$ 等分することによって、ファジィ n 分割を行う。 I_1 と I_2 上の三角型ファジィ数 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ と $B_j (j = 1, 2, \dots, n)$ をそれぞれ

$$A_i = \left(\frac{i-2}{n-1}, \frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1} \right), \quad B_j = \left(\frac{j-2}{n-1}, \frac{j-1}{n-1}, \frac{j}{n-1} \right)$$

とする。そのメンバシップ関数はそれぞれ

$$\mu_{A_i}(x_1) = \begin{cases} (n-1)x_1 - (i-2), & x_1 \in [\frac{i-2}{n-1}, \frac{i-1}{n-1}] \\ -(n-1)x_1 + i, & x_1 \in [\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}] \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$\mu_{B_j}(x_2) = \begin{cases} (n-1)x_2 - (j-2), & x_2 \in [\frac{j-2}{n-1}, \frac{j-1}{n-1}] \\ -(n-1)x_2 + j, & x_2 \in [\frac{j-1}{n-1}, \frac{j}{n-1}] \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

である。また、 $(M_{i,j}^n)$ の要素 $M_{i,j}^n$ として、 $M_{i,j}^n = \frac{1}{2}(a_2^i + b_2^j) = \frac{1}{2}(\frac{i-1}{n-1} + \frac{j-1}{n-1})$ を選ぶとする。このとき、ファジィ平均は算術平均の近似になっていること、および n が無限大のときファジィ平均が算術平均に収束することを示そう。実際

$$\Lambda_n(x_1, x_2) = \{(i, j) \mid x_1 \in \text{supp} A_i, x_2 \in \text{supp} B_j\}$$

とする。(2) と (2-3) より

$$x_f - \frac{x_1 + x_2}{2} = \sum_{i,j=1}^n w_{i,j}(x_1, x_2) \cdot (M_{i,j}^n - \frac{x_1 + x_2}{2}).$$

ゆえに、(1) と (2-2) より

$$\begin{aligned} |x_f - \frac{x_1 + x_2}{2}| &\leq \sum_{i,j \in \Lambda_n(x_1, x_2)} w_{i,j}(x_1, x_2) |M_{i,j}^n - \frac{x_1 + x_2}{2}| \\ &\leq \sum_{i,j \in \Lambda_n(x_1, x_2)} |M_{i,j}^n - \frac{x_1 + x_2}{2}| \\ &\leq \frac{1}{2}(\frac{2}{n} + \frac{2}{n}) = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

この証明により、上記のファジィ相関行列 $(M_{i,j}^n)$ に対して、我々は定義したファジィ平均は重み関数の算術演算 $R(a, b)$ に関係なく、ファジィ n 分割の数 n が無限大のとき、算術平均に収束することがわかる。

次に、ファジィ平均の数値計算例を示す。まず、区間 $I_k = [0, 1] (k = 1, 2)$ を次のようにファジィ 3 分割する。

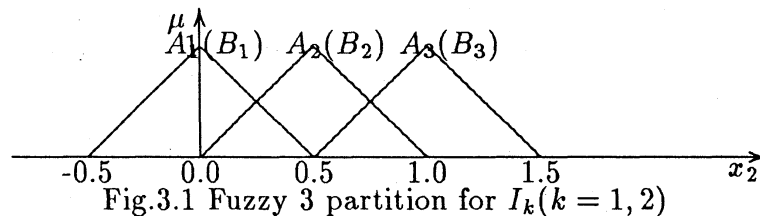


Fig.3.1 Fuzzy 3 partition for $I_k (k = 1, 2)$

例 3.1 Fig.3.1 に示すような I_1, I_2 のファジィ 3 分割に対して、重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ の算術演算 $R(a, b)$ を $\min\{a, b\}$ とする。3 次のファジィ相関行列

$$(3-1) \quad (M_{i,j}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.75 & 1.0 \end{pmatrix}$$

を用いて、 x_1, x_2 のファジィ平均を計算した。計算結果を Fig.3.2 に示す。

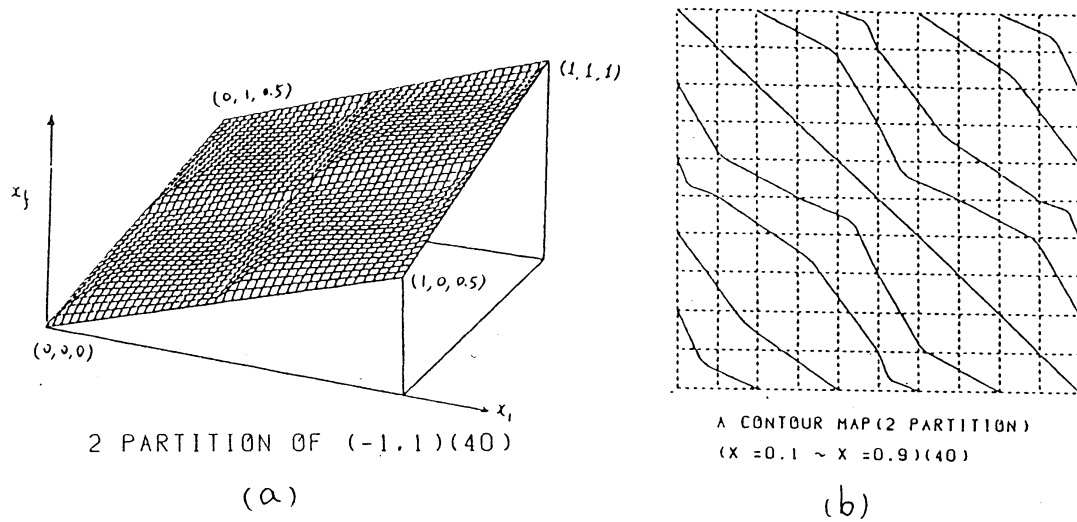


Fig.3.2 The fuzzy average on $M_{i,j}^n = \frac{1}{2}(a_2^i + b_2^j)$ with $n=3$.
(a) The fuzzy average; (b) Contour map(0.1,0.2,...,0.9).

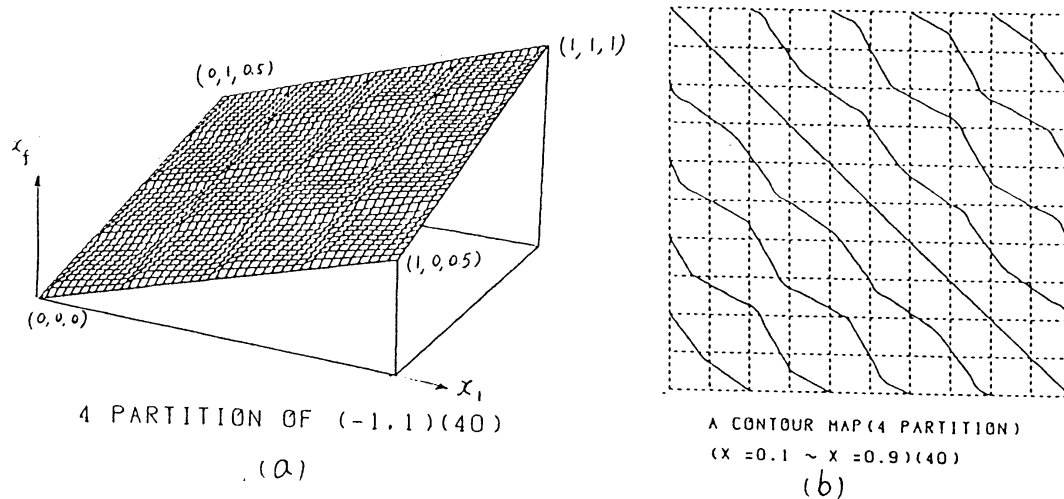


Fig.3.3 The fuzzy average on $M_{i,j}^n = \frac{1}{2}(a_2^i + b_2^j)$ with $n=5$.
(a) The fuzzy average; (b) Contour map(0.1,0.2,...,0.9).

例 3.2 I_1, I_2 をそれぞれ 4 等分したファジィ 5 分割に対して、重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ の算術演算 $R(a, b)$ を $\min\{a, b\}$ とする。5 次のファジィ相関行列

$$(3-2) \quad (M_{i,j}^5) = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.125 & 0.250 & 0.375 & 0.500 \\ 0.125 & 0.250 & 0.375 & 0.500 & 0.625 \\ 0.250 & 0.375 & 0.500 & 0.625 & 0.750 \\ 0.375 & 0.500 & 0.625 & 0.750 & 0.875 \\ 0.500 & 0.625 & 0.750 & 0.875 & 1.000 \end{pmatrix}$$

を用いて、 x_1, x_2 のファジィ平均を計算した。計算結果を Fig.3.3 に示す。

Fig.3.2 と Fig.3.3 より、ファジィ n 分割の数 n が大きいとき、ファジィ平均は算術平均に近づくことがわかる。

4. 重み関数の算術演算 $R(a, b)$ に関する一考察

ファジィ平均の定義および重み関数の性質 (1), (2) により、ファジィ平均はファジィ相関行列の要素 $M_{i,j}^n$ の凸結合になっている。またその凸結合の係数は重み関数であることがわかる。ファジィ相関行列 $(M_{i,j}^n)$ を定義することによって、様々なファジィ平均を得ることができる^[2]。いままで、ファジィ平均を計算するとき、重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ の算術演算 $R(a, b)$ が $\min\{a, b\}$ で計算していた。minimum 演算が t ノルムの一つであることは周知の事実である。ここで、一定のファジィ相関行列を用いて、重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ の算術演算 $R(a, b)$ を t ノルムまたは t コノルムに置き換えた場合、ファジィ平均の振る舞いを調べる。

まず、 t ノルム、 t コノルムの概念^[6]を紹介する。

和演算・積演算が備えているべき性質を取り出して、これを抽象化したものが t ノルム (triangular-norm), t コノルム (triangular-conorm) である。 t ノルムは積演算を一般化したものであり、 t コノルムは和演算を一般化したものである。 t ノルムは通常 $T(x, y)$, t コノルムは $S(x, y)$ で表される。

定義 4.1 つぎの 4 つの条件を満たす $[0, 1]$ 上の 2 変数関数 $T(x, y)$ を t ノルム (t -norm) と呼ばれる。

$$(T1) \quad T(x, 1) = x, T(x, 0) = 0$$

$$(T2) \quad x_1 \leq x_2 \text{ ならば } T(x_1, y) \leq T(x_2, y)$$

$$(T3) \quad T(x, y) = T(y, x)$$

$$(T4) \quad T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$$

例えば、良く使われる論理積 (Logical product) $T(x, y) = \min\{x, y\}$; 境界積 (Bounded product) $T(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$; 代数積 (Algebraic product) $T(x, y) = x \cdot y$ などは t ノルムである。

t コノルムは t ノルムと双対に定義される。すなわち、

定義 4.2 $S(x, y) (x, y \in [0, 1])$ はつぎの 4 つの条件を満たすとき、 t コノルムと呼ばれる。

$$(S1) \quad S(x, 1) = 1, S(x, 0) = x$$

$$(S2) \quad x_1 \leq x_2 \text{ ならば } S(x_1, y) \leq S(x_2, y)$$

$$(S3) \quad S(x, y) = S(y, x)$$

$$(S4) \quad S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$$

例えば、良く使われる論理和 (Logical sum) $S(x, y) = \max\{x, y\}$; 境界和 (Bounded sum) $S(x, y) = \min\{1, x + y\}$; 代数和 (Algebraic sum) $S(x, y) = x + y - x \cdot y$ などは t コノルムである。ここで、良く使われている t ノルムと t コノルムを Table 4.1 に示す。

Table4.1 t-norms and t-conorms

t-norms	t-conorms
(logical product)	(logical sum)
$T(x,y)=\min\{x,y\}$	$S(x,y)=\max\{x,y\}$
(Hamacher product)	(Hamacher sum)
$T(x,y)=\frac{xy}{x+y-xy}$	$S(x,y)=\frac{x+y-2xy}{1-xy}$
(algebraic product)	(algebraic sum)
$T(x,y)=xy$	$S(x,y)=x+y-xy$
(Einstein product)	(Einstein sum)
$T(x,y)=\frac{xy}{1+(1-x)(1-y)}$	$S(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}$
(bounded product)	(bounded sum)
$T(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$	$S(x,y)=\min\{1,x+y\}$

4.1 $R(a,b)$ を t ノルムに置き換えた場合のファジィ平均

Fig.3.1 のファジィ 3 分割および (3-1) の 3 次のファジィ相関行列に基づいて、重み関数の算術演算 $R(a,b)$ に Table4.1 に示している各 t ノルムを代入して、ファジィ平均を計算した。計算結果を Fig.4.2 に示す。Fig.4.2 の (a) は重み関数の算術演算 $R(a,b)$ を $\min\{a,b\}$ とするファジィ平均であり、Fig.4.2 の (b) は $R(a,b)$ を $\frac{ab}{a+b-ab}$ とするファジィ平均であり、Fig.4.2 の (c) は $R(a,b)$ を ab とするファジィ平均であり、Fig.4.2 の (d) は $R(a,b)$ を $\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$ とするファジィ平均であり、Fig.4.2 の (e) は $R(a,b)$ を $\max\{0, a+b-1\}$ とするファジィ平均である。

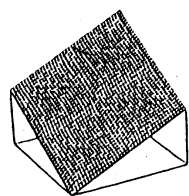
Fig.4.2 より、各 t ノルムを用いたファジィ平均は境界積 (bounded product) を用いた場合を除いて類似していることがわかる。境界積を用いたファジィ平均はちょっと違う振る舞いをしている。ここで、算術演算 $R(a,b)$ は境界積を用いた場合のファジィ平均を考える。

$$\begin{aligned}
 x_f = f(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,j}(x_1, x_2) M_{i,j}^n \\
 &= \frac{\sum_{i,j=1}^n \max\{0, \mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_j}(x_2) - 1\} \cdot M_{i,j}^n}{\sum_{i,j=1}^n \max\{0, \mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_j}(x_2) - 1\}}
 \end{aligned}$$

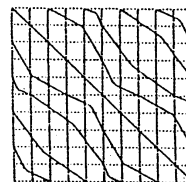
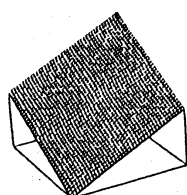
区間 $I_k (k=1, 2)$ を一様ファジィ n 分割する。すなわち、 $I_k (k=1, 2)$ を $n-1$ 等分して、 n 個の三角型ファジィ数 $A_i (B_j)$ を定めることである。このとき、 $x_1 = x_2$ および $i \neq j$ に対して、

$$\mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_j}(x_2) \begin{cases} = 1 & i = j+1 \text{ または } i = j-1 \\ < 1 & \text{その他} \end{cases}$$

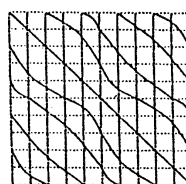
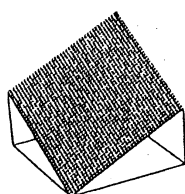
が成り立つことがわかる。

fuzzy averagecontour map(0.1 ~ 0.9)LOGICAL PRODUCT
(2 PARTITION)

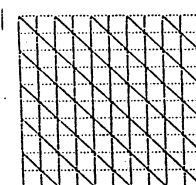
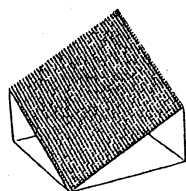
(a)

A CONTOUR MAP(2 PARTITION)
IS 0.1 ~ 0.9(100)
LOGICAL PRODUCTHAMACHER PRODUCT
(2 PARTITION)

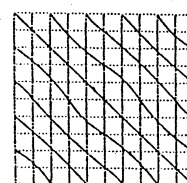
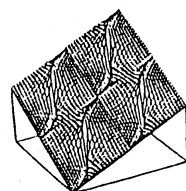
(b)

A CONTOUR MAP(2 PARTITION)
IS 0.1 ~ 0.9(100)
HAMACHER PRODUCTALGEBRAIC PRODUCT
(2 PARTITION)

(c)

A CONTOUR MAP(2 PARTITION)
IS 0.1 ~ 0.9(100)
ALGEBRAIC PRODUCTEINSTEIN PRODUCT
(2 PARTITION)

(d)

A CONTOUR MAP(2 PARTITION)
IS 0.1 ~ 0.9(100)
EINSTEIN PRODUCTBOUNDED PRODUCT
(2 PARTITION)

(e)

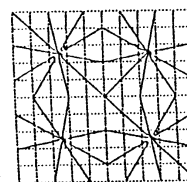
A CONTOUR MAP(2 PARTITION)
IS 0.1 ~ 0.9(100)

Fig.4.2 The fuzzy average on each t-norm.(a)logical product;
(b) Hamacher product; (c)algebraic product; (d) Einstein product; (e) bounded product.

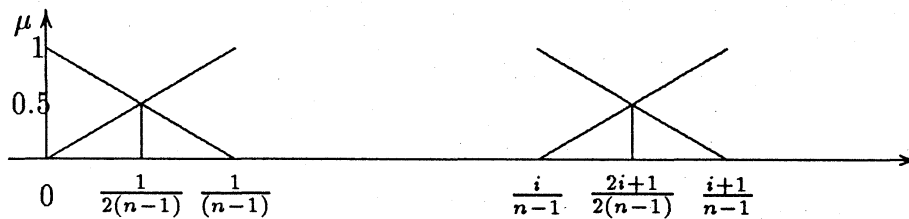
一様ファジィ n 分割に対して、 $x_1 = x_2$ および $i \neq j$ のとき、 $\mu_{A_i}(x_1)$ と $\mu_{B_j}(x_2)$ との境界積は

$$\max\{0, \mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_j}(x_2) - 1\} = 0$$

である。ゆえに、 $x_1 = x_2$ のときのファジィ平均は

$$x_f = \frac{\sum_{i=1}^n \max\{0, \mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_i}(x_2) - 1\} \cdot M_{i,i}^n}{\sum_{i=1}^n \max\{0, \mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_i}(x_2) - 1\}}$$

である。次に、 $x_1 = x_2$ のとき、境界積を用いたファジィ平均を詳しく考える。



(1) $0 < x_1 = x_2 < \frac{1}{2(n-1)}$ のとき、 $\mu_{A_1}(x_1) + \mu_{B_1}(x_2) > 1$ より、 $\max\{0, \mu_{A_1}(x_1) + \mu_{B_1}(x_2) - 1\} > 0$ 。すなわち、 $w_{1,1}(x_1, x_2) > 0$ 。また、 $w_{1,1}(x_1, x_2)$ 以外の $w_{i,i}(x_1, x_2)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) の値は 0 である。 $M_{1,1} = 0$ より、 $x_f = 0$ となる。すなわち、 $0 < x_1 = x_2 < \frac{1}{2(n-1)}$ のとき、 $x_f = 0$ 。

(2) $\frac{1}{2(n-1)} < x_1 = x_2 < \frac{1}{n-1}$ のとき、 $\mu_{A_2}(x_1) + \mu_{B_2}(x_2) > 1$ より、 $\max\{0, \mu_{A_2}(x_1) + \mu_{B_2}(x_2) - 1\} > 0$ 。すなわち、 $w_{2,2}(x_1, x_2) > 0$ 。また、 $w_{2,2}(x_1, x_2)$ 以外の $w_{i,i}(x_1, x_2)$ ($i = 1, 3, 4, \dots, n$) の値は 0 である。 $M_{2,2} = \frac{1}{n-1}$ より、 $x_f = \frac{1}{n-1}$ となる。すなわち、 $\frac{1}{2(n-1)} < x_1 = x_2 < \frac{1}{n-1}$ のとき、 $x_f = \frac{1}{n-1}$ 。

一般的に、 $\frac{i}{n-1} < x_1 = x_2 < \frac{2i+1}{2(n-1)}$ のとき、 $\mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_i}(x_2) > 1$ より、 $\max\{0, \mu_{A_i}(x_1) + \mu_{B_i}(x_2) - 1\} > 0$ 。すなわち、 $w_{i,i}(x_1, x_2) > 0$ 。また、 $w_{i,i}(x_1, x_2)$ 以外の $w_{j,j}(x_1, x_2)$ ($j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) の値は 0 である。 $M_{i,i} = \frac{i}{n-1}$ より、 $x_f = \frac{i}{n-1}$ となる。すなわち、 $\frac{i}{n-1} < x_1 = x_2 < \frac{2i+1}{2(n-1)}$ のとき、 $x_f = \frac{i}{n-1}$ 。

すなわち、境界積を用いたファジィ平均 x_f は、 $x_1 = x_2$ のとき、階段関数になっていることがわかる。

実際に、 $n=3$ の場合、 $x_1 = x_2$ のとき、境界積を用いたファジィ平均 x_f の振る舞いは Fig.4.3 のようになっている。

Fig.4.2 の (e) より、境界積を用いたファジィ平均は、 $x_2 = x_1 \pm \frac{i}{n-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$) のときの振る舞いと $x_1 = x_2$ のときの振る舞いとが類似している。これは一様ファジィ n 分割に対して、 $(n-1) \times (n-1)$ 個の点

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2(n-1)}, \frac{1}{2(n-1)}\right), \left(\frac{1}{2(n-1)}, \frac{3}{2(n-1)}\right), \dots, \left(\frac{1}{2(n-1)}, \frac{2n-3}{2(n-1)}\right), \\ & \left(\frac{3}{2(n-1)}, \frac{1}{2(n-1)}\right), \left(\frac{3}{2(n-1)}, \frac{3}{2(n-1)}\right), \dots, \left(\frac{3}{2(n-1)}, \frac{2n-3}{2(n-1)}\right), \\ & \dots, \\ & \left(\frac{2n-3}{2(n-1)}, \frac{1}{2(n-1)}\right), \left(\frac{2n-3}{2(n-1)}, \frac{3}{2(n-1)}\right), \dots, \left(\frac{2n-3}{2(n-1)}, \frac{2n-3}{2(n-1)}\right) \end{aligned}$$

が境界積を用いたファジィ平均の特別な点になることを意味する。

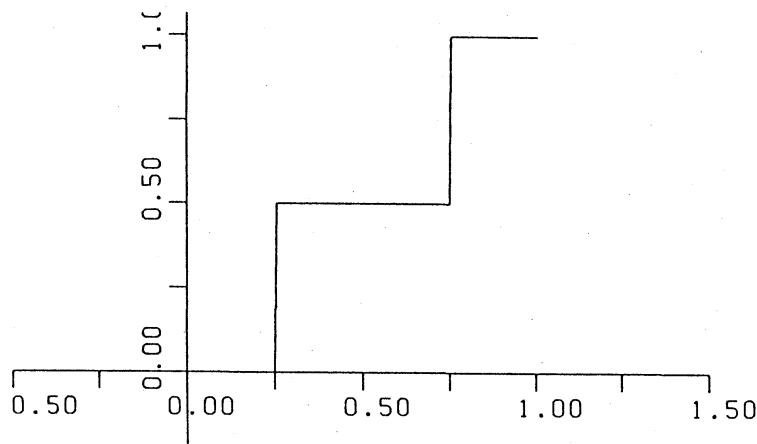


Fig.4.3 The fuzzy average on $x_1 = x_2$

4.2 $R(a,b)$ を t コノルムに置き換えた場合のファジィ平均

4.1 節と同様に、Fig.3.1 のファジィ 3 分割および (3-1) の 3 次のファジィ相関行列に基づいて、重み関数の算術演算 $R(a,b)$ に Table 4.1 に示している各 t コノルムを代入して、ファジィ平均を計算した。計算結果を Fig.4.4 に示す。Fig.4.4 の (a) は重み関数の算術演算 $R(a,b)$ を $\max\{a,b\}$ とするファジィ平均であり、Fig.4.4 の (b) は $R(a,b)$ を $\frac{a+b-2ab}{1-ab}$ とするファジィ平均であり、Fig.4.4 の (c) は $R(a,b)$ を $a+b-ab$ とするファジィ平均であり、Fig.4.4 の (d) は $R(a,b)$ を $\frac{a+b}{1+ab}$ とするファジィ平均であり、Fig.4.4 の (e) は $R(a,b)$ を $\min\{1, a+b\}$ とするファジィ平均である。

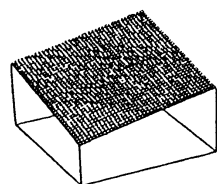
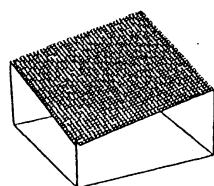
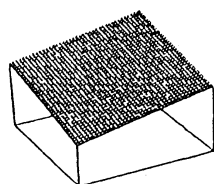
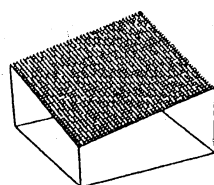
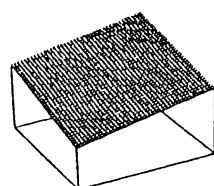
Fig.4.4 より、各 t コノルムを用いたファジィ平均は類似している。また、点 (0,0) の近傍ではファジィ平均値は算術平均値より大きい；点 (1,1) の近傍ではファジィ平均値は算術平均値より小さいことがわかる。実際に、重み関数 $R(a,b)$ を $\max\{a,b\}$ とする場合、 $x_1 = x_2 = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} x_f = f(0,0) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{i,j}(0,0) M_{i,j}^3 = \frac{\sum_{i,j=1}^3 \max\{\mu_{A_i}(0), \mu_{B_j}(0)\} \cdot M_{i,j}^3}{\sum_{i,j=1}^3 \max\{\mu_{A_i}(0), \mu_{B_j}(0)\}} \\ &= \frac{1 \times 0 + 1 \times 0.25 + 1 \times 0.5 + 1 \times 0.25 + 1 \times 0.5}{1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0} = 0.3 \end{aligned}$$

となる。 $x_1 = x_2 = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} x_f = f(1,1) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{i,j}(1,1) M_{i,j}^3 = \frac{\sum_{i,j=1}^3 \max\{\mu_{A_i}(1), \mu_{B_j}(1)\} \cdot M_{i,j}^3}{\sum_{i,j=1}^3 \max\{\mu_{A_i}(1), \mu_{B_j}(1)\}} \\ &= \frac{1 \times 0.5 + 1 \times 0.75 + 1 \times 0.5 + 1 \times 0.75 + 1 \times 1}{0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1} = 0.7 \end{aligned}$$

となる。

fuzzy averagecontour map(0.1 ~ 0.9)LOGICAL SUM
(2 PARTITION)HAMACHER SUM
(2 PARTITION)ALGEBRAIC SUM
(2 PARTITION)EINSTEIN SUM
(2 PARTITION)BOUNDED SUM
(2 PARTITION)

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

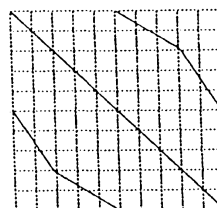
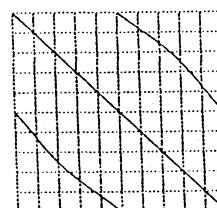
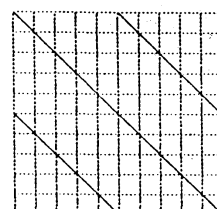
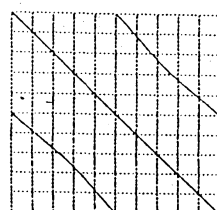
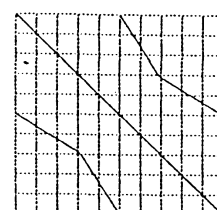
A CONTOUR MAP(2 PARTITION)
(X = 0.1 ~ X = 0.9) (Y = 0.1 ~ Y = 0.9)
LOGICAL SUMA CONTOUR MAP(2 PARTITION)
(X = 0.1 ~ X = 0.9) (Y = 0.1 ~ Y = 0.9)
HAMACHER SUMA CONTOUR MAP(2 PARTITION)
(X = 0.1 ~ X = 0.9) (Y = 0.1 ~ Y = 0.9)
ALGEBRAIC SUMA CONTOUR MAP(2 PARTITION)
(X = 0.1 ~ X = 0.9) (Y = 0.1 ~ Y = 0.9)
EINSTEIN SUMA CONTOUR MAP(2 PARTITION)
(X = 0.1 ~ X = 0.9) (Y = 0.1 ~ Y = 0.9)
BOUNDED SUM

Fig.4.4 The fuzzy average on each t-conorm.(a)logical sum;
(b) Hamacher sum; (c)algebraic sum; (d) Einstein sum; (e) bounded sum.

しかし、ファジィ n 分割の数 n を多くすると、どの t コノルムを用いても、ファジィ平均の値は $(0,0)$ の近傍で小さくなっていく; $(1,1)$ の近傍で大きくなっていくことが想像できる。実際、我々は区間 $I_k (k=1,2)$ を 4 等分し、ファジィ 5 分割をして、重み関数 $w_{i,j}(x_1, x_2)$ の算術演算 $R(a, b)$ を論理和 (logical sum) として、式 (3-2) の 5 次のファジィ相関行列 $(M_{i,j}^5)$ でファジィ平均を計算した。計算結果を Fig.4.5 に示す。

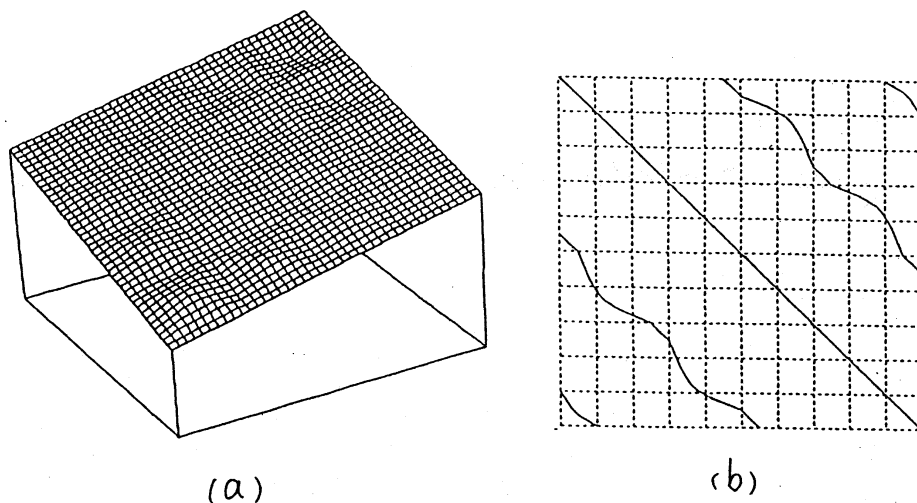


Fig.4.5 The fuzzy average with logical sum on $n=5$.

(a) The fuzzy average; (b) Contour map (0.1~0.9).

Fig. 4.5 の等高線グラフ (b) と Fig.4.4 の (a) の等高線グラフと比較すると、Fig.4.4 の (a) では 3 本 (0.4, 0.5, 0.6) の等高線しかないのに対して、Fig.4.5 では、5 本 (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7) の等高線があることがわかる。ほかの t コノルムを用いても、同様な結果が得ることができる。すなわち、第 3 章で定義した n 次のファジィ相関行列 $(M_{i,j}^n)$ を用いて、ファジィ n 分割の数 n が無限大のとき、どの t コノルムを用いても、ファジィ平均は算術平均に収束する。

5. 結論

ファジィ平均を定義し、ファジィ平均と算術平均との関係を明かにした。ファジィ平均はファジィ相関行列の要素 $M_{i,j}^n$ の凸結合になっていることがわかった。ファジィ平均は離散的データを連続的データに変換することができることを示した。重み関数の算術演算 $R(a, b)$ に各 t ノルムおよび各 t コノルムを代入して、おのこのファジィ平均を計算した。第 3 章で定義したファジィ相関行列を用いて、どの t ノルムおよび t コノルムを用いても、ファジィ n 分割の数 n が無限大のとき、ファジィ平均は算術平均に収束する。ただし、算術平均に収束する途中の振る舞いは違うことがわかった。また Fig.4.2 および Fig.4.4 の等高線より、 x_1, x_2 のファジィ平均は x_1, x_2 に関して非線形であることがわかった。

参考文献

1. 高 崙山, 田宮稔士, 河原田秀夫, ファジィ平均の提案, “数値解析シンポジウム第 23 回講演予稿集,” 1994.6, p. 39-42.
2. 高 崙山, 田宮稔士, 河原田秀夫, 意志決定問題に対するファジィ平均の応用, “日本応用数学会論文誌投稿中.”
3. L.S.GAO, H.IMAI, H.KAWARADA, *Fuzzy control of system governed by elliptic partial differential equations*, Technical Reports of Mathematical Sciences Chiba Univ. 5 (1989).
4. A.KAUFMANN and M.M.GUPTA, “Fuzzy mathematical models in engineering and management science,” Elsevier Science Publishers B.V., 1988, pp. 3-54.
5. 菅野道夫, “ファジィ制御,” 日刊工業新聞社, 東京, 1988, p. 25-109.
6. 日本ファジィ学会, “講座ファジィ(2) ファジィ集合,” 日刊工業新聞社, 東京, 1992.12, p. 48-51.
7. H.J.ZIMMERMANN, “Fuzzy Set Theory and Its Application,” Kluwer Academic Publishers, Boston MA, 1984, p. 1-100.