

Painlevé 方程式の特異点について — WKB 解析の視点からの考察 —

To the memory of the late Professor Nobuhisa IWASAKI

京大数理研 竹井 義次 (Yoshitsugu TAKEI)

この研究集会を長年にわたって組織された故岩崎敷久先生に対し、ここに慎んで心からの哀悼の意を表します。

1 序

完全 WKB 解析 (exact WKB analysis) は、Fuchs 型方程式のモノドロミー群の具体的計算等、2 階の線型常微分方程式の大域的な解析に顕著な威力を発揮した。そこで主役を演じたのが WKB 解と呼ばれる発散級数解であり、実際の解析にあたっては、Stokes 曲線の幾何、各 Stokes 曲線において WKB 解 (の Borel 和) が満たすべき接続公式、特異点における WKB 解の挙動、の 3 つの性質が重要であった ([AKT1])。この方法を非線型方程式に拡張すべく、河合隆裕氏や青木貴史氏と共同で大きいパラメータを含んだ Painlevé 方程式の WKB 解析的な研究に取り組み、これまでに Stokes 曲線の幾何および各 Stokes 曲線における接続公式に関してはかなり満足すべき結果が得られた ([KT1], [AKT2], [KT2], [T1], [T2])。そこで本稿では、第 3 の性質 — Painlevé 方程式の動かない特異点における形式解の挙動 — について WKB 解析の視点から考察してみたい。特に、Painlevé 方程式の動かない特異点のうちでも、確定型 (あるいは第 1 種) の特異点における解の挙動を調べることに主目的である。

2 線型方程式の特異点における WKB 解の挙動

本論に入る前に、2 階線型常微分方程式の特異点における WKB 解の挙動について簡単に復習しておこう。次の形をした 1 次元 Schrödinger 方程式

$$(1) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \eta^2 Q(x)\psi \quad (\eta \text{ は大きいパラメータ})$$

の WKB 解とは, (1) に付随する Riccati 方程式

$$(2) \quad S^2 + \frac{dS}{dx} = \eta^2 Q(x)$$

の (η^{-1} に関する) 形式巾級数解 $S^\pm(x, \eta) = \sum_{j \geq -1} \eta^{-j} (\pm 1)^j S_j(x)$ (但し $S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}$) を用いて, $\psi_\pm = \exp \int^x S^\pm(x, \eta) dx$ と表される解のことであつた. ここで各 $S_j(x)$ は, 方程式 (2) により帰納的に求まる. この WKB 解の特異点での挙動を調べると, 次が得られる.

- 命題 1** (i) $x = x_0$ を (1) の不確定特異点 (即ち x_0 は $Q(x)$ の 3 次以上の pole) とする時, $S_j(x)$ の x_0 における特異性は j が大きくなるほど弱くなる.
(ii) $x = x_0$ が (1) の確定特異点, 特に $Q(x)$ の 2 次の pole ならば, 任意の j に対して $S_j(x)$ は x_0 において 1 次の pole をもつ.
(iii) $x = x_0$ が (1) の確定特異点であり, 更に $Q(x)$ の 1 次の pole ならば, $S_j(x)$ の x_0 における特異性は j が大きくなるにつれ強くなる.

この意味では, WKB 解の構造は不確定特異点よりも確定特異点における方が難しいと言えよう. 実際, 最近の小池達也 (京大数理研, 院生) 氏の研究によれば, $Q(x)$ の 1 次の pole は変わり点とよく似た性質をもっており, 例えば WKB 解の Borel 和を考えれば, 変わり点から出る通常の Stokes 曲線だけでなく「 $Q(x)$ の 1 次の pole から出る Stokes 曲線」においてもある種の Stokes 現象が起こる.

以下では, Painlevé 方程式の形式解の特異点における挙動について, 線型方程式の WKB 解の場合と同様な状況が見られるかどうかを論じる.

3 Painlevé 方程式の形式解について

ここで, 大きいパラメータ η を含んだ Painlevé 方程式 (P_J) ($J = \text{I}, \dots, \text{VI}$, それぞれの具体形については表 1 を参照) の形式解の構成を振り返っておこう.

表 1

$$(P_{\text{I}}) \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \eta^2 (6\lambda^2 + t).$$

$$(P_{\text{II}}) \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \eta^2 (2\lambda^3 + t\lambda + c).$$

$$\begin{aligned}
(P_{\text{III}}) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{d\lambda}{dt} + \eta^2 \left[16c_\infty \lambda^3 + \frac{8c'_\infty \lambda^2}{t} - \frac{8c'_0}{t} - \frac{16c_0}{\lambda} \right]. \\
(P_{\text{IV}}) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \frac{2}{\lambda} + \eta^2 \left[\frac{3}{2} \lambda^3 + 4t\lambda^2 + (2t^2 + 8c_1) \lambda - \frac{8c_0}{\lambda} \right]. \\
(P_{\text{V}}) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2} \left(2\lambda - \frac{1}{2\lambda} \right) \\
&\quad + \eta^2 \frac{2\lambda(\lambda-1)^2}{t^2} \left[(c_0 + c_\infty) - \frac{c_0}{\lambda^2} - \frac{c_2 t}{(\lambda-1)^2} - \frac{c_1 t^2 (\lambda+1)}{(\lambda-1)^3} \right]. \\
(P_{\text{VI}}) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \frac{d\lambda}{dt} \\
&\quad + \frac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left[1 - \frac{\lambda^2 - 2t\lambda + t}{4\lambda^2(\lambda-1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \eta^2 \left\{ (c_0 + c_1 + c_t + c_\infty) - \frac{c_0 t}{\lambda^2} + \frac{c_1(t-1)}{(\lambda-1)^2} - \frac{c_t t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right\} \right].
\end{aligned}$$

いずれの Painlevé 方程式 (P_J) も

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = G_J \left(\lambda, \frac{d\lambda}{dt}, t \right) + \eta^2 F_J(\lambda, t),$$

(但し F_J と G_J は適当な有理関数) という形をしているので, (P_J) は次のような η^{-1} の形式巾級数解 $\lambda_J^{(0)}(t)$ をもつ.

$$\lambda_J^{(0)}(t) = \lambda_0(t) + \eta^{-1} \lambda_1(t) + \eta^{-2} \lambda_2(t) + \cdots.$$

但し, 初項 $\lambda_0(t)$ は

$$F_J(\lambda_0(t), t) = 0$$

を満たす代数関数であり, また他の $\lambda_j(t)$ ($j \geq 1$) は方程式と $\lambda_0(t)$ から帰納的に定まる. つまり, この解は任意定数を全く含んでいない解であり, そこでこの $\lambda_J^{(0)}(t)$ を「0パラメータ解」と呼ぶ. 更に我々は, 2つの任意定数 (α, β) を含んだ次のような「2パラメータ解」 $\lambda_J(t; \alpha, \beta)$ も構成することができる.

$$(3) \quad \lambda_J(t; \alpha, \beta) = \lambda_0(t) + \eta^{-1/2} \lambda_{1/2}(t, \eta) + \eta^{-1} \lambda_1(t, \eta) + \cdots.$$

ここで $\lambda_0(t)$ は上と同じ代数関数, また $\lambda_{j/2}(t, \eta)$ ($j \geq 1$) は次の形をしている.

$$(4) \quad \lambda_{1/2}(t, \eta) = \mu_J(t) (\alpha \exp \Phi_J + \beta \exp(-\Phi_J)),$$

$$(5) \quad \lambda_{j/2}(t, \eta) = \sum_{k=0}^j b_{j-2k}^{(j/2)}(t) \exp((j-2k)\Phi_J) \quad (j \geq 2).$$

但し

$$\exp \Phi_J = \exp \left(\eta \int^t \sqrt{\frac{\partial F_J}{\partial \lambda}(\lambda_0(s), s)} ds \right) (\theta_J(t) \eta^2)^{\alpha\beta}$$

とおいた. ($\mu_J(t)$ と $\theta_J(t)$ は適当な t の函数. 具体形については [T2] を参照.)
この $\lambda_J(t; \alpha, \beta)$ が (P_J) の (形式的な意味での) 一般解であり, 線型方程式の場合の WKB 解 (の一次結合) に相当するものと考えられる.

2 パラメータ解の実際の構成は, 例えば以下のように行われる. 良く知られたように, Painlevé 方程式 (P_J) は Hamilton 系

$$(H_J) \quad d\lambda/dt = \eta \partial K_J / \partial \nu, \quad d\nu/dt = -\eta \partial K_J / \partial \lambda$$

と同値である (K_J の具体形は [KT2] を参照). この Hamilton 系 (H_J) も特異摂動の形をしているので, (P_J) と同様に 0 パラメータ解 $(\lambda_J^{(0)}(t), \nu_J^{(0)}(t))$ をもつ. そこで, 任意定数を含んだ解を構成するために, (H_J) を $(\lambda_J^{(0)}(t), \nu_J^{(0)}(t))$ のまわりで

$$(6) \quad \lambda = \lambda_J^{(0)}(t) + \eta^{-1/2} U, \quad \nu = \nu_J^{(0)}(t) + \eta^{-1/2} V$$

と局所化すると, (U, V) は再び次のような Hamilton 系を満たさねばならないことがわかる.

$$(7) \quad dU/dt = \eta \partial K_J / \partial V, \quad dV/dt = -\eta \partial K_J / \partial U.$$

この Hamilton 系 (7) を, いわゆる「Birkhoff の標準形」に特異摂動の意味で簡約化することができる. すなわち,

命題 2 次の形をした (U, V) から $(\tilde{U}, \tilde{V})$ へのシンプレクティック変換

$$(8) \quad \begin{cases} U = u_0(\tilde{U}, \tilde{V}) + \eta^{-1/2} u_1(\tilde{U}, \tilde{V}) + \cdots, \\ V = v_0(\tilde{U}, \tilde{V}) + \eta^{-1/2} v_1(\tilde{U}, \tilde{V}) + \cdots, \end{cases}$$

(但し u_j, v_j は, $(\tilde{U}, \tilde{V})$ については $(j+1)$ 次の多項式であり, その各係数は, t の函数を係数とする $\eta^{-1/2}$ の形式巾級数) が存在して, Hamilton 系 (7) は

$$(9) \quad \tilde{K}_J = \sum_{l=0}^{\infty} \eta^{-l} f^{(l)}(t, \eta) (\tilde{U} \tilde{V})^{l+1}$$

($f^{(l)}(t, \eta) = \sum_{j \geq 0} \eta^{-j/2} f_{j/2}^{(l)}(t)$ は, t の函数を係数とする $\eta^{-1/2}$ の形式巾級数) という Hamiltonian をもった Hamilton 系に変換される. 特に,

$$f_0^{(0)}(t) = \sqrt{\frac{\partial F_J}{\partial \lambda}(\lambda_0(t), t)}, \quad f_{1/2}^{(0)}(t) = 0$$

である.

簡約化された Hamiltonian $\tilde{\mathcal{K}}_J$ は積 $\tilde{U}\tilde{V}$ の関数という形に書けているので, 対応する Hamilton 系

$$(10) \quad d\tilde{U}/dt = \eta \partial \tilde{\mathcal{K}}_J / \partial \tilde{V}, \quad d\tilde{V}/dt = -\eta \partial \tilde{\mathcal{K}}_J / \partial \tilde{U},$$

については $d(\tilde{U}\tilde{V})/dt = 0$ が成り立つ. この $\tilde{U}\tilde{V}$ が t に依らないという性質を利用すれば, (10) は容易に解くことができ, 実際

$$(11) \quad \begin{cases} \tilde{U} = \alpha \exp \left(\eta \int^t \sum \eta^{-l} (l+1) f^{(l)}(s, \eta) (-\alpha\beta)^l ds \right) \\ \tilde{V} = -\beta \exp \left(-\eta \int^t \sum \eta^{-l} (l+1) f^{(l)}(s, \eta) (-\alpha\beta)^l ds \right) \end{cases}$$

が (10) の解を与える. ここで α および β は任意定数 (もしくは任意定数を係数とする $\eta^{-1/2}$ の形式巾級数) である. (11) をシンプレクティック変換 (8) そして更に (6) に代入すれば, 2 パラメータ解 (3) が得られる.

この 2 パラメータ解の構成法は, 動かない特異点における局所解の存在を論じた [Tka1], [Tka2] で使われた方法の, いわば特異摂動版である. 命題 2 の証明をはじめ議論の詳細に関しては, [T3] を参照されたい.

4 動かない特異点における 2 パラメータ解の挙動

4.1 予備的考察

前節では, Painlevé 方程式 (P_J) の 2 パラメータ解 $\lambda_J(t; \alpha, \beta)$ の構成を復習した. この 2 パラメータ解の動かない特異点における挙動を調べることが, 本節そして本稿の目標である.

表 1 からわかるように, (P_J) の動かない特異点の集合は次の通りである.

$$\begin{aligned} J = \text{I, II, IV} & : \{\infty\}, \\ J = \text{III, V} & : \{0, \infty\}, \\ J = \text{VI} & : \{0, 1, \infty\}. \end{aligned}$$

このうち, $J = \text{I}, \dots, \text{V}$ の場合の $t = \infty$ は不確定型の特異点であり, 残りの特異点 (つまり $J = \text{III, V}$ の場合の $t = 0$, および $J = \text{VI}$ の 3 つの特異点) が確定型であ

る。不確定型の特異点においては、例えば $J = I$ や II の場合の 2 パラメータ解の最初の数項の形 ([AKT2] 参照) を見れば容易に想像されるように、解の特異性は η の負巾が大きくなるにつれ次第に弱くなることが期待される。そこで本稿では議論を確定型の特異点に限ることにし、以下では特にその代表的な場合である (P_{VI}) の $t = 0$ を考えることにしよう。(いくつかの場合を調べた結果から判断すると、他の確定型の特異点についても以下に述べるのとはほぼ同様な事実が成立すると思われるが、まだ完全に確かめた訳ではない。すべての確定型の特異点を論じること、および不確定型の特異点での挙動を厳密に論じることが別の機会に譲ることにしたい。)

まず、 $\lambda(t; \alpha, \beta)$ の初項 $\lambda_0(t)$ の挙動を調べる。(以下、議論は (P_{VI}) に限定されているので、しばしば添字 VI を省略する。) (P_{VI}) の場合、有理関数 $F_{VI}(\lambda, t)$ を多項式の比の形で表した時、その分子は (generic には) λ に関する 6 次の多項式となる。つまり $F_{VI} = 0$ により定まる $\lambda_0(t)$ は 6 個存在する。特に $t = 0$ での挙動を考えれば、 F_{VI} の具体的な形 (表 1 参照) より、それらは次の 3 つのグループに分類される。

(A) $\lambda_0(t) = a_0 + a_1 t + \dots$, $a_0 \neq 0$ と展開される場合。ここで a_0 は $(a_0 - 1)^2 = c_1/\tilde{c}_\infty$ の解である (但し $\tilde{c}_\infty = c_0 + c_1 + c_t + c_\infty$)。この時、

$$(12) \quad \sqrt{\frac{\partial F_{VI}}{\partial \lambda}(\lambda_0(t), t)} = -\frac{2}{t} (\sqrt{\tilde{c}_\infty} \pm \sqrt{c_1}) + \mathcal{O}(t^0).$$

(B) $\lambda_0(t) = a_1 t + \dots$, つまり定数項が 0 の展開をもつ場合。ここで a_1 は $((1/a_1) - 1)^2 = c_t/c_0$ の解であり、また

$$(13) \quad \sqrt{\frac{\partial F_{VI}}{\partial \lambda}(\lambda_0(t), t)} = -\frac{2}{t} (\sqrt{c_0} \pm \sqrt{c_t}) + \mathcal{O}(t^0).$$

(C) $\lambda_0(t) = a_{1/2} t^{1/2} + a_1 t + \dots$ と $t^{1/2}$ で展開される場合。ここで $a_{1/2}$ は $a_{1/2}^2 = (c_t - c_0)/(c_1 - \tilde{c}_\infty)$ により定まる。この場合は、

$$(14) \quad \sqrt{\frac{\partial F_{VI}}{\partial \lambda}(\lambda_0(t), t)} = \frac{2}{t^{3/4}} \sqrt{\pm 1} \sqrt{(c_t - c_0)(c_1 - \tilde{c}_\infty)} + \mathcal{O}(t^{-1/2}).$$

線型方程式の WKB 解の場合、最も重要だったのはその位相因子 $S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}$ であった。2 パラメータ解の表示式 (3) ~ (5) から推察される通り、Painlevé 方程式の場合は $\sqrt{(\partial F/\partial \lambda)(\lambda_0(t), t)}$ がその役割を担っている。従って、線型方程式との対比

で言えば、上記の3つのグループのうち (A) と (B) が、 $Q(x)$ が2次のpoleをもつような線型方程式 (1) の確定特異点に対応し、また (C) が、 $Q(x)$ が1次のpoleであるような (1) の確定特異点に対応している。そこで、ここでは (A) と (B) を「double pole 型」、(C) を「simple pole 型」と呼ぶことにしよう。線型方程式の場合と同様、Painlevé 方程式についても double pole 型と simple pole 型とでは解の挙動が完全に異なる。以下では double pole 型と simple pole 型を別々に論じる。

注意 (C) の場合、 $\sqrt{(\partial F/\partial \lambda)(\lambda_0(t), t)}$ の $t=0$ での挙動 (14) は、一見した所、線型方程式の simple pole 型の確定特異点での $\sqrt{Q(x)}$ の挙動とは違っているように見える。しかし、WKB 解析の視点から Painlevé 方程式を考察する際には、 t -平面ではなく代数函数 $\lambda_0(t)$ の Riemann 面の上で考えるのが自然である。(C) の場合 $\lambda_0(t)$ は $t=0$ で分岐 (2 価) しており、従って自然な局所変数は t ではなく $\tilde{t} = t^{1/2}$ と考えられる。この $\tilde{t}$ を変数として用いれば、 $\tilde{t}=0$ の近傍で

$$\sqrt{\frac{\partial F_{VI}}{\partial \lambda}(\lambda_0(t), t)} dt = \left(\frac{4}{\tilde{t}^{1/2}} \sqrt{\pm 1} \sqrt{(c_t - c_0)(c_1 - \tilde{c}_\infty)} + \mathcal{O}(\tilde{t}^0) \right) d\tilde{t}$$

となり、確かに線型方程式の simple pole 型の確定特異点での挙動に一致する。

4.2 double pole 型の場合

この場合、2パラメータ解 $\lambda(t; \alpha, \beta)$ は、 $t=0$ において線型方程式の WKB 解と同様な挙動を示す。例えば上記 (B) の場合、命題 1 (ii) に対応して次が成り立つ。

定理 1 2パラメータ解 $\lambda(t; \alpha, \beta)$ の初項 $\lambda_0(t)$ は $t=0$ で (B) の挙動を示すとする。この時、解の構成において用いられた Birkhoff の標準形の各係数 $f^{(l)}(t, \eta)$ は $t=0$ において1次のpoleをもち、更に次が成立する。

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{Res}_{t=0} f^{(0)}(t, \eta) = - \left(\sqrt{4c_0 + \eta^{-2}} \pm \sqrt{4c_t + \eta^{-2}} \right), \\ \operatorname{Res}_{t=0} f^{(1)}(t, \eta) = 1, \\ \operatorname{Res}_{t=0} f^{(l)}(t, \eta) = 0 \quad (l \geq 2). \end{cases}$$

証明については [T3] を参照されたい。

4.3 simple pole 型の場合

上で見た double pole 型の場合と異なり, simple pole 型の (C) の場合は, $f^{(l)}(t, \eta)$ の特異性は η の負巾が大きくなるほど強くなる. この事実は線型方程式に関する命題 1 (iii) に対応しており, 線型方程式の時と同様, (C) の場合の $t = 0$ は変わり点と良く似た性質をもっている.

定義 1 次式で定義される $t = 0$ から出る (実 1 次元) 曲線を, 「 $t = 0$ を始点とする (P_{VI}) の Stokes 曲線」と呼ぶ.

$$(16) \quad \operatorname{Im} \int_0^t \sqrt{\frac{\partial F_{VI}}{\partial \lambda}}(\lambda_0(s), s) ds = 0.$$

この式の中に現れた λ_0 は, もちろん $t = 0$ で (C) の挙動を示すものとする. ((14) により, (16) の被積分関数は $s = 0$ で可積分であることに注意.)

換言すれば, simple pole 型の確定特異点 $t = 0$ を始点とするこの Stokes 曲線の上でも, ある種の Stokes 現象が起こるのである. この新しい Stokes 曲線は, 変わり点から出る通常の Stokes 曲線とは違う種類のものであり, 例えばその上で起こる Stokes 現象を記述する接続公式も, 通常の ((P_I) 型の) 接続公式とは異なる. 本稿の残りの部分では, Painlevé 方程式とモノドロミー保存変形との関係を利用して, この新しい Stokes 曲線上で成立する接続公式の具体形を考えることにしよう.

モノドロミー保存変形を介して (P_{VI}) に付随する線型方程式を (SL_{VI}) で表す.

$$(SL_{VI}) \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 Q_{VI}(x, t, \lambda, \nu, \eta) \right) \psi = 0.$$

すなわち, (SL_{VI}) のモノドロミー保存変形を記述する非線型方程式が (P_{VI}) である ([JMU], [O] 等. なお Q_{VI} の具体的な形については例えば [KT2] を参照). 但し, ポテンシャル $Q_{VI}(x, t, \lambda, \nu, \eta)$ の (λ, ν) には, (H_{VI}) の 2 パラメータ解が既に代入されているものとする. この時, Q_{VI} の (η についての) 主要部 $Q_{VI,0}$ は

$$Q_{VI,0} = \tilde{c}_\infty \frac{(x - \lambda_0)^2 (x - a_1)(x - a_2)}{(x(x - 1)(x - t))^2}$$

という形をもつ. ここで λ_0 は 2 重変わり点, a_j ($j = 1, 2$) は単純変わり点であり, $t \rightarrow 0$ の時それらはそれぞれ次のような挙動を示す.

$$\lambda_0 = \mathcal{O}(t^{1/2}), \quad a_1 = \mathcal{O}(t), \quad a_2 = \mathcal{O}(t^0).$$

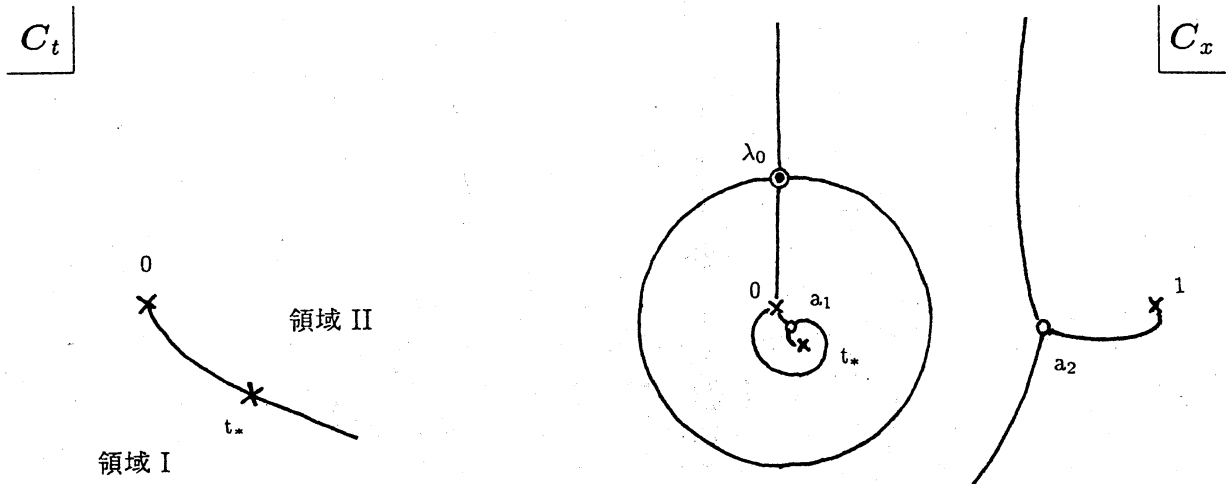


Figure 1: $t = 0$ を始点とする (P_{VI}) の Stokes 曲線と, そこで起こる (SL_{VI}) の Stokes 曲線の退化

さて, (16) で定義された Stokes 曲線においてある種の Stokes 現象が起こるのであれば, $t = t_*$ がこの新しい Stokes 曲線の上にある時, 線型方程式 (SL_{VI}) の (x -空間での) Stokes 曲線にも何らかの特別な (退化した) 状況が生じているはずである. 実際, 次が成り立つ.

命題 3 $t = t_*$ を (16) で定義された $t = 0$ を始点とする (P_{VI}) の Stokes 曲線上の点とする時, モノドロミー保存変形を介して対応する線型方程式 (SL_{VI}) の方では, 2 重変わり点 λ_0 から出たある Stokes 曲線が $x = 0, t_*$ という 2 つの確定特異点を回った後ふたたび λ_0 に戻ってくるという状況が現われる (図 1 参照).

証明は, λ_0 を始点とし $x = 0, t_*$ を回って λ_0 に戻る閉曲線を γ とした時,

$$(17) \quad \int_0^{t_*} \sqrt{\frac{\partial F_{VI}}{\partial \lambda}(\lambda_0(s), s)} ds = \int_\gamma \sqrt{Q_{VI,0}(x, t_*)} dx$$

という等式を解析的に示すことによりなされる.

命題 3 により, $t = 0$ を始点とする (P_{VI}) の Stokes 曲線の左下側の領域を「領域 I」, 右上側の領域を「領域 II」とすれば, t がそれぞれの領域にある時, 対応する (SL_{VI}) の Stokes 曲線の形状は異なったものとなるのがわかる (図 2, 図 3). この (SL_{VI}) の Stokes 曲線の形状の違いとモノドロミー保存変形の理論を組み合わせれば, $t = 0$ を始点とする Stokes 曲線上での (P_{VI}) の接続公式の具体形を (第 1 項に限っては) 次のようにして求めることができる.

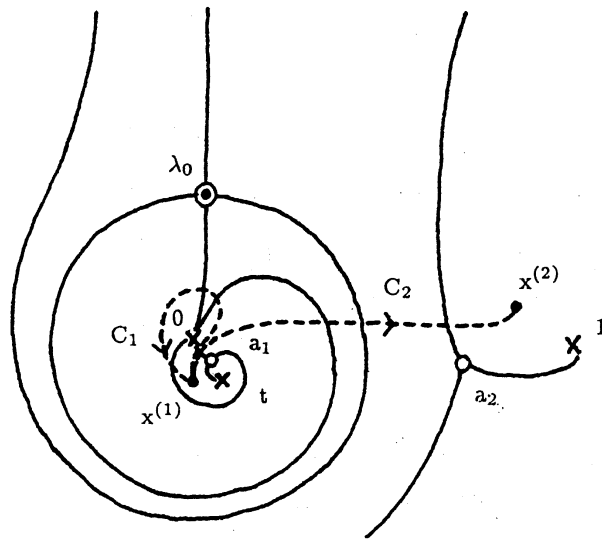


Figure 2: t が領域 I にある時の (SL_{VI}) の Stokes 曲線

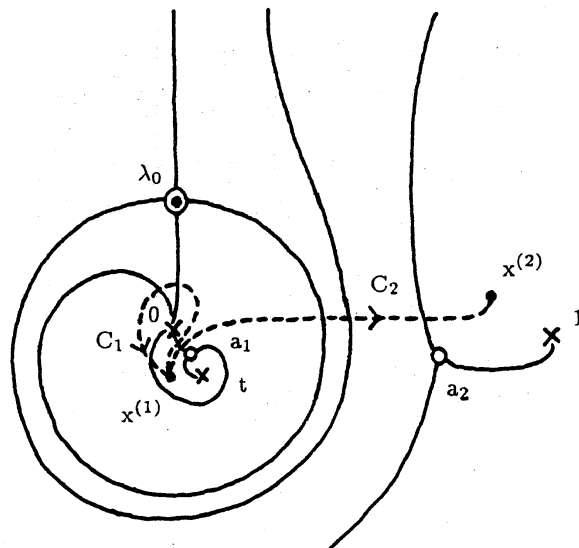


Figure 3: t が領域 II にある時の (SL_{VI}) の Stokes 曲線

(SL_{VI}) のモノドロミーを具体的に論じるための解の基本系として、次の2つのものを考える。

$$(18) \quad \psi_{\pm}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \pm \int_{a_j}^x S_{\text{odd}} dx \quad (j = 1, 2).$$

(S_{odd} は (SL_{VI}) に付随する Riccati 方程式 (2) の解 $S^{\pm}$ の奇部分.) 但し, $\psi_{\pm}^{(j)}$ はそれぞれの基点 $x^{(j)}$ の近傍で与えられているものとする (図 2, 図 3). [AKT2, (2.14)] で示されたように $\partial S_{\text{odd}} / \partial t = \partial(A_{VI} S_{\text{odd}}) / \partial x$ が成立するので, この2つの基本解系はいずれも変形方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm}^{(j)} = A_{VI} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{\pm}^{(j)} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{VI}}{\partial x} \psi_{\pm}^{(j)}$$

(ここで $A_{VI} = \frac{\lambda - t}{t(t-1)} \frac{x(x-1)}{x-\lambda}$) を満足する. しかも, $\psi_{\pm}^{(j)}$ の定義式 (18) 中の積分路 (a_j と $x^{(j)}$ の近傍内の点 x を結ぶ路) は, 上述の Stokes 曲線の形状の不連続な変化に関して安定な (つまり, 不連続にではなく連続的に変化する) 領域のみを通過しているゆえ, $\psi_{\pm}^{(j)}$ の Borel 和はそれぞれ $(x^{(j)}, t_*)$ の近傍で解析的となる. 従って, モノドロミー保存変形の理論により, $\psi_{\pm}^{(j)}$ (の Borel 和) を基本解系とした時のモノドロミー行列や接続行列は t によらない. 特に, $x^{(1)}$ から出て $x = 0$ を回って $x^{(1)}$ に戻る閉曲線 C_1 , および $x^{(1)}$ と $x^{(2)}$ を結ぶ曲線 C_2 を図 2, 図 3 のように取れば,

$$\begin{aligned} (\psi_+^{(1)}, \psi_-^{(1)}) &\xrightarrow{C_1 \text{ に沿う解析接続}} (\psi_+^{(1)}, \psi_-^{(1)}) M_1 \\ (\psi_+^{(1)}, \psi_-^{(1)}) &\xrightarrow{C_2 \text{ に沿う解析接続}} (\psi_+^{(2)}, \psi_-^{(2)}) M_2 \end{aligned}$$

で定義されるモノドロミー行列 M_1 および接続行列 M_2 は保存される. 実際, 今の場合, この2つの行列 M_j が保存されるというのが, (SL_{VI}) のモノドロミー群が保存されるための必要十分条件である. ($\psi_{\pm}^{(j)}$ はそれぞれ $x = t$ および $x = 1$ における「良い」基本解系であることに注意. 例えば, $\psi_{\pm}^{(1)}$ を基本解系とした時, $x = t$ を1回りする閉曲線に沿うモノドロミー行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ である.)

そこで, まず t が領域 I にある時に, (P_{VI}) の2パラメータ解 $\lambda(t; \alpha, \beta)$ を取ってきたとしよう. この解を Q_{VI} の係数に代入して (SL_{VI}) のモノドロミーを考える. 線型方程式に対する WKB 解析を適用すれば, 上で定義した行列 M_j ($j = 1, 2$) の具体的な形を (少なくともその第1項については) 計算することができる. 結果はパラメータ (α, β) の関数になるので, それを $M_j(\alpha, \beta)$ で表そう. 次に, t が領域 II にあ

る時に2パラメータ解 $\lambda(t; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ を取り, 同様にして M_j ($j = 1, 2$) を計算する. 結果は再びパラメータ $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の関数 $\tilde{M}_j(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ として表される. ところが, 領域 I と領域 II で (SL_{VI}) の Stokes 曲線の形状が異なるために, $M_j(\alpha, \beta)$ と $\tilde{M}_j(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の関数形は同じではない. 一方, 上で述べたことから, 領域 I での解 $\lambda(t; \alpha, \beta)$ と領域 II での解 $\lambda(t; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が (P_{VI}) の同一の解析的な解を表しているのであれば, 対応する行列 M_j ($j = 1, 2$) は一致するはずである. すなわち, $M_j(\alpha, \beta) = \tilde{M}_j(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ ($j = 1, 2$) が成り立たねばならない. こうして, $t = 0$ を始点とする Stokes 曲線をはさんで隣合う2つの領域における2パラメータ解 $\lambda(t; \alpha, \beta)$ と $\lambda(t; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が同じ解である (つまり, 解析接続でお互いに移り合う) ための条件が求まったことになる. この条件が, まさしくこの新しい Stokes 曲線における接続公式に他ならない.

本稿では, $M_j(\alpha, \beta)$ と $\tilde{M}_j(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の具体的な計算は省略することにし, 結果として得られる接続公式 (第1項に限ってではあるが) のみ紹介することにしてしよう.

定理 2 $t = 0$ を始点とする Stokes 曲線の左下側の領域 (領域 I) での2パラメータ解 $\lambda(t; \alpha, \beta)$ が, 右上側の領域 (領域 II) での解 $\lambda(t; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ に解析接続される時, α, β の $(\eta^{-1/2}$ の形式巾級数と見た場合の) 第1項 α_0, β_0 達の間には, 次の関係式が成り立つ.

$$(19) \quad \theta_{\beta_0} = \theta_{\tilde{\beta}_0},$$

$$(20) \quad ie^{-i\pi E_0/4}\theta_{\beta_0} + \theta_{\alpha_0} = -ie^{i\pi \tilde{E}_0/4}\theta_{\tilde{\beta}_0} + \theta_{\tilde{\alpha}_0}.$$

但し, $E_0 = -8\alpha_0\beta_0$ とし, また $\theta_{\alpha_0}, \theta_{\beta_0}$ は次式で定義される.

$$\theta_{\alpha_0} = \frac{\alpha_0}{\Gamma(E_0/4 + 1)} 2^{5E_0/4} e^{-i\pi E_0/4},$$

$$\theta_{\beta_0} = \frac{\beta_0}{\Gamma(-E_0/4 + 1)} 2^{-5E_0/4} e^{i\pi E_0/4}.$$

($\tilde{E}_0, \theta_{\tilde{\alpha}_0}, \theta_{\tilde{\beta}_0}$ の定義も同様.)

謝辞

本稿で述べた結果は, 河合隆裕先生が開かれている数理解析研究所における毎週のセミナーの中で, 河合先生や青木貴史さんとの議論を通じて得られたものです. こ

の場を借りて、お二人の方に心からのお礼を申し上げます。特に命題3は、青木さんによる計算機を用いた数値実験により初めて見いだされたものです。またこの研究は、文部省科学研究費補助金（奨励研究A，課題番号09740101）からの援助を受けています。

References

- [AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: 特異摂動の代数解析学 —exact WKB analysis について—. 数学, **45**(1993), 299–315.
- [AKT2] ———: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. II. Structure of Solutions of Differential Equations, World Scientific, 1996, pp. 1–49.
- [JMU] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. Physica D, **2**(1981), 306–352.
- [KT1] T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I. Adv. in Math., **118**(1996), 1–33.
- [KT2] ———: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III. Adv. in Math., **134**(1998), 178–218.
- [O] K. Okamoto: Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier systems. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **33**(1986), 575–618.
- [T1] Y. Takei: On a WKB-theoretic approach to the Painlevé transcendents. XIth International Congress of Mathematical Physics, International Press, 1995, pp. 533–542.
- [T2] ———: On a WKB-theoretic approach to the Painlevé transcendents. II. To appear in RIMS Kôkyûroku “Analysis and Geometry in the Theory of Several Complex Variables”.

- [T3] ———: Birkhoff normal form of Hamiltonian systems and WKB-type formal solutions. In preparation.
- [Tka1] K. Takano: Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the first kind. Funkcial. Ekvac., **29**(1986), 99–119.
- [Tka2] ———: Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the second kind. J. Math. Soc. Japan, **42**(1990), 423–443.