

Multiplicative operations in BP cohomology

大阪市大 理 荒木捷朗

BP コホモロジーにおける乗法的コホモロジー作用素の性質を研究する。§1 においてすべての乗法的コホモロジー作用素は $BP^*()$ の自己同型になることを示す。従って、乗法的作用素全体を $Mult(BP)$, $BP^*()$ の自己同型群を $Aut(BP)$ とあらわすとき,

定理 1. $Mult(BP) = Aut(BP)$.

§2 で乗法的コホモロジー作用素の中で特に重要な Adams 作用素を定義し, §3 で次の定理を証明する.

定理 2. $Ad(BP) = Z(Aut(BP))$. 但し $Ad(BP)$ は Adams 作用素全体の作る $Aut(BP)$ の部分群を, $Z(Aut(BP))$ は $Aut(BP)$ の中心をあらわす.

§1. 乗法的作用素

$$\theta_a : BP^*() \longrightarrow BP^*()$$

に対して,

/

$$\mathbb{H}_a(e^{BP}(L)) = \phi_a^{-1}(e^{BP}(L))$$

とおくとき (L は複素直線束, $e^{BP}(L)$ は L の Euler 類), ϕ_a は μ_{BP} 上の typical curve になり, 一次の項の係数が 1 になる. 従って

$$\phi_a(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^{p^k}, \quad a_k \in BP^{2-2p^k}(\mu^t),$$

$a_0 = 1$, とあらわすことが出来る. BP は $\mathbb{Z}_p$ の普遍性より, かきして得られる

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), \quad a_n \in BP^{2-2p^n}(\mu^t),$$

と $\mathbb{H}_a$ とは 1 対 1 に対応する. したがって

命題 1. $\mathbb{H}_a = \mathbb{H}_b \iff \mathbb{H}_a(\mu^t) = \mathbb{H}_b(\mu^t).$

と容易に得られる.

$\mu_{BP}^{\phi_a} = \mu_a$ とおき, μ_{BP} と μ_a 上の p に対する Frobenius 作用を f_p , f_p^a とし,

$$\phi_a \circ f_p^a \gamma_0 = f_p \phi_a$$

と通りに計算する. $BP^t(\mu^t)$ の augmentation の kernel を I とし,

$$\sum_{i \geq 1} \mathbb{H}_a(v_i) T^{p^{i-1}} \equiv \sum_{i \geq 1} (v_i + p a_i) T^{p^{i-1}} \pmod{I^2}$$

を得られる. これより

$$\mathbb{H}_a(v_k) \equiv v_k \pmod{(p) + I^2}$$

となる. (但し $(f_p \gamma_0)(T) = \sum_{i \geq 1} v_i T^{p^{i-1}}$, $BP^t(\mu^t) = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots, v_k, \dots]$). 従って

$$\Theta_a(\mu^*) : BP^*(\mu^*) \cong BP^*(\mu^*) .$$

これより, 一般コホモロジーの比較定理を用いて

$$\Theta_a \in \text{Aut}(BP)$$

を得, 定理 1 が証明される.

§2. 今後, BP コホモロジーの基礎環と $\mathbb{Z}_p$ から p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ にまで拡張して考える. J. Lubin, One-parameter formal Lie groups over p -adic integer rings, Ann. of Math., 80 (1964), 464-484, の方法を拡張し, μ_{BP} の自己準同型

$$[\alpha]_{BP} \in \text{End}(\mu_{BP})$$

が $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ に対して定義されることを示す.

$$[\alpha]_{BP} = \alpha T + \text{higher terms},$$

$$[\alpha]_{BP} + {}^{\mu_{BP}}[\beta]_{BP} = [\alpha + \beta]_{BP},$$

$$[\alpha]_{BP} \circ [\beta]_{BP} = [\alpha\beta]_{BP}$$

の性質をもつ.

特に α が $\mathbb{Z}_p$ の単元のとき,

$$\psi_\alpha(T) = [\alpha^{-1}]_{BP}(\alpha T)$$

とおくと, ψ_α は μ_{BP} 上の typical curve になる. この curve に対応する BP^* の乗法的作用素を Ψ_α とおき, BP コホモロジーの Adams 作用素といふ. 複素直線束 L に対し

$$\Psi_\alpha(e^{BP}(L)) = \alpha^{-1} [\alpha]_{BP}(e^{BP}(L))$$

となり、次の性質をえう。

$$i) \quad \psi^{\alpha}(\mu t) | BP^{-2s}(\mu t) = \alpha^s \cdot \text{id}.$$

$$ii) \quad \psi^{\alpha} \psi^{\beta} = \psi^{\alpha\beta} = \psi^{\beta} \psi^{\alpha}.$$

この等が Adams 作用素 ψ^{α} とよばれるにふさわしい性質であることは、K 理論の Adams 作用素の性質と比較すれば理解されるであろう。S. P. Novikov, The method of algebraic topology from the view point of cobordism theories, Izv. Akad. Nauk SSSR, 31 (1967), は U コホモロジー ステムにおける Adams 作用素を定義しているが、U コホモロジー ステムを p で局所化して BP コホモロジー ステムに分解するとき、Novikov の Adams 作用素はこの BP コホモロジー ステムの Adams 作用素になる。

命題 1 の上の性質 ii) より

$$iii) \quad \psi^{\alpha} = \psi^{\beta} \iff \alpha^{p-1} = \beta^{p-1}$$

がわかる。 BP コホモロジー ステムの Adams 作用素全体を $\text{Ad}(BP)$ とあらわす。 $\text{Ad}(BP)$ は $\text{Mult}(BP)$ の部分群をなすが、iii) より

$$iv) \quad \text{Ad}(BP) \approx U_1(\mathbb{Z}_p)$$

となることがわかる。但し、 $U(\mathbb{Z}_p)$ は $\mathbb{Z}_p$ の単元の作る乘法群とすとき、 $U_1(\mathbb{Z}_p)$ は

$$U_1(\mathbb{Z}_p) = \{ \alpha \in \mathbb{Z}_p; \alpha \equiv 1 \pmod{p} \}$$

なる $U(\mathbb{Z}_p)$ の部分群である。

更に、 BP を $\mathbb{Z}_p$ における Landweber-Novikov-Quillen
作用系 γ_E , $E = (e_1, e_2, \dots)$ との関係として

vi)
$$\gamma_E \circ \psi^\alpha = \alpha^{|E|} \psi^\alpha \circ \gamma_E$$

となる。これがゆかり、ii), v) より、 $2s$ 次の作用系

$$\Xi_s: BP^*() \rightarrow BP^{*+2s}()$$

に対して

vii)
$$\Xi_s \circ \psi^\alpha = \alpha^s \psi^\alpha \circ \Xi_s,$$

なることがわかる。すなわち乗法的作用系は0次であるから、

vii) より特に

命題 2. $Ad(BP) \subset Z(Mult(BP))$

が得られる。

§ 3. 命題 2 の逆の包含関係

$$Ad(BP) \supset Z(Mult(BP))$$

を示すことにより定理 2 を証明する。

(H) $a \in Z(Mult(BP))$, $a = (a_1, a_2, \dots)$, とする。

$b \in BP^{2(1-p^k)}(pt)$ に対し、列

$$(b, k) = (0, \dots, 0, b, 0, \dots)$$

を考へる。

i) (H) $(b, k)(v_l) = v_l, \quad 1 \leq l < k,$

ii) (H) $(b, k)(v_k) = v_k + p b$

を得る. これは可換性

$$\Theta_{(b,k)} \circ \Theta_a = \Theta_a \circ \Theta_{(b,k)}$$

より, 関係式

$$\text{iii)} \quad \Theta_{(b,k)}(a_k) + b = a_k + \Theta_a(b)$$

を得る.

こゝで, 特に $b = v_k$ とし,

$$\text{iv)} \quad \Theta_a(v_k) = (1 + p\lambda_k)v_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{Z}_p, \quad k \geq 1,$$

を得, 又 $b = v_1^{(p^k-1)/(p-1)}$ とし,

$$\text{v)} \quad 1 + p\lambda_k = (1 + p\lambda_1)^{(p^k-1)/(p-1)}$$

を得る. 従って $\lambda \in U(\mathbb{Z}_p)$ と

$$\lambda^{p-1} = 1 + p\lambda_1$$

となり, ように選ぶと, §2 の Adams 作用素の性質(i)より

$$\Theta_a(pt) = \psi^\lambda(pt)$$

となり, 命題 1 より

$$\Theta_a = \psi^\lambda$$

となり, 定理 2 を証明した.

(以上).