

1 点の stabilizer が 2 つの suborbits 上 2-trans
に作用するランク 5 原始置換群について

阪大 理学部 沼田 稔

G は有限集合 Ω 上の原始置換群で 2 重可移でないとする。
 $\Omega \times \Omega$ 上 G を成分ごとに作用させた時の orbit を $\Delta_0, \Gamma_1, \dots$
 $\Gamma_0, \Delta_1, \dots, \Delta_t$ とし $\Delta_0 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ とする。

$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$ が $\Gamma_i(\alpha) = \{\beta \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_i\}$ 上 ($1 \leq i \leq A$)
2 重可移で $\Delta_j(\alpha)$ 上 ($1 \leq j \leq t$) 2-trans でないとする。
次の結果が知られている。

Theorem (沼田) $t > 1$, $|\Gamma_i(\alpha)|, |\Delta_j(\alpha)| > 3$
($1 \leq i \leq A, 1 \leq j \leq t$) ならば

$$A \leq 2t - \gamma$$

ここで $\gamma = \#\{\Delta_j \mid \Delta_j = \Gamma_i \circ \Gamma_i^*, \exists \Gamma_i\}$

特に $\gamma = 1$ のときは $A \leq 2t - 2$.

この結果を使えば $t=2$ の時 $A \leq 2$ である。

$t=n=2$ の例

1. small Janko simple group J_1 は $PSL(2, 11)$ と同型な部分群を含み、この部分群の cosets 上に primitive rank 5 に作用し条件を満たす。degree 266, subdegrees 1, 11, 12, 110, 132 である。
2. Mathieu 群 M_{12} は $PSL(2, 11)$ と同型な部分群を含み、この部分群の cosets 上に primitive rank 5 に作用し条件を満たす。degree 144, subdegrees 1, ~~11~~, 11, 55, 66。
3. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ と S_4 の半直積の部分群 S_4 の cosets 上に rank 5 に作用し条件を満たす。degree 27 subdegrees は 1, 4, 4, 12, 6 である。

さて G を Ω 上 primitive rank 5 とし $\Omega \times \Omega$ 上 G の non-trivial orbits を P_1, P_2, Δ, Σ とし G_α が $P_1(\alpha), P_2(\alpha)$ 上 2-trans, $\Delta(\alpha), \Sigma(\alpha)$ 上 2-trans でないとする。

$P_1 \circ P_1^* \neq P_2 \circ P_2^*$ の時は 伊藤達郎氏の結果を使えば、例 1 に限ることが証明される。

$\Gamma_1 \circ \Gamma_1^* = \Gamma_2 \circ \Gamma_2^*$, として $|\Gamma_1(\alpha)| \neq |\Gamma_2(\alpha)|$ の場合 (Ω, Γ_1) (Ω, Γ_2) は共に直径3の *distance transitive graph* となるが、この場合の例は知られていないし、多分存在しないと思うが証明出来ない。

最後に残った場合について次のことが証明された。

Theorem $\Delta = \Gamma_1 \circ \Gamma_1^* = \Gamma_2 \circ \Gamma_2^*$, $|\Gamma_1(\alpha)| = |\Gamma_2(\alpha)|$ の時

- i) $\pi_1 = \pi_2$ ii) Γ_1, Γ_2 は互いに *paired*
- iii) $\Gamma_1 \circ \Gamma_1 = \Gamma_1^* \cup \Sigma$, (π_i は $\Gamma_i(\alpha)$ 上 G_α の *permutation character*)

証明の概略. $\pi_1 = \pi_2$ の証明は簡単である。

$\Gamma_1 \circ \Gamma_2^* \neq \Delta \cup \Sigma$ が証明されれば ii) は明らかであり

P.J. Cameron の結果 (

$\Gamma \neq \Gamma^*$, if

$\Gamma \circ \Gamma \subset \Gamma \cup \Gamma^* \cup \Gamma_1 \circ \Gamma_1^* \cup \Gamma_1^* \circ \Gamma_1$, G has rank 4) を使

えば iii) が証明される。 $\Gamma_1 \circ \Gamma_2^* = \Delta \cup \Sigma$ と仮定し

$\Gamma_1 \circ \Gamma_2^* = \Gamma_2 \circ \Gamma_1^*$ であるとして、 Γ_1 に関する *intersection matrix* の *trace* の整数条件から矛盾を引き出す。

計算はめんどうであるが難かしいことは便知ない。