

どこにでも出てくる相転移現象

— 物性物理から宇宙物理まで —

森川雅博

お茶の水女子大学 理学部物理学科

東京都文京区大塚 2-1-1, 112-8610

要約

宇宙の中のすべての構造は、量子力学、重力、宇宙項で決まる 3 境界の内側に存在します。そして、それぞれに特徴的な様々な相転移が存在し個性を持った構造を作っていきます。これらを順次説明しながら議論を深めます。宇宙物理と物性物理の密接な関連に注目しながら新しい境界領域の展開を目指して、皆様との議論を大切にしていきたいと思えます。できるだけ自己完結的に話します。量子力学における不確定性原理は、基本構造の究極の起源、安定性、進化を保証します。ここでは特に、宇宙において観測者が存在しない状況でいかに「量子測定」が完結するか、Keldish-Schwinger タイプの理論や自発的対称性の破れなどを説明しながら解説します。重力という遮蔽されない長距離力は、天体特有の集合状態・階層構造・相関・時間尺度を作ります。これらを基本から解説します。現在宇宙の加速膨張は、宇宙論最大の問題のひとつです。ここでは特に、ボーズアインシュタイン凝縮を応用したモデルについて、自己臨界組織化や、負圧の作る構造の崩壊などと関連させながら解説します。

目次

§1 さまざまな構造の形態.....	823
1. 構造の存在領域.....	823
2. 量子力学と不確定性原理.....	824
3. 一般相対論（重力）と因果律.....	825
4. 宇宙論と宇宙項.....	826
§2 一般相対性理論とブラックホール.....	826

§3 宇宙論.....	827
§4 自己重力系の相転移.....	827
1. 力の分布、相関関数、緩和時間.....	827
2. 2次元重力（ポール系）.....	830
3. 1次元重力（シート系）.....	831
§5 暗黒物質・エネルギーとボーズアインシュタイン凝縮.....	832
1. 宇宙を構成する物質.....	832
2. 宇宙のボーズアインシュタイン凝縮機構.....	833
3. BEC の量子流体モデル.....	834
4. ゆっくりした凝縮.....	835
5. 観測との比較.....	836
6. 物性物理との関連.....	838
§6 対称性の自発的破れと量子測定論.....	838
1. 量子力学らしさ.....	838
2. 量子測定論.....	839
3. 対称性自滅の動力学： c-数自由度の出現と発展（過程 III SSB）.....	841
4. 環境系の中での系の発展 - 混合状態から純粋状態へ（過程 IV QP）.....	845
5. スピン測定の簡単なモデル.....	847
6. 測定の有効性と精度.....	849
7. いくつかの応用.....	850
参考文献.....	851

§1 さまざまな構造の形態

宇宙物理学は、宇宙の中のあらゆる構造や進化を探索する応用物理学です。初めに、対象となる現在の様々な構造を概観しよう。

1. 構造の存在領域

横軸を構造のスケール、縦軸を構造の平均密度（エネルギー密度）とした図を描いてみよう（図1）（de Vaucouleurs-池内 Diagram¹⁾）。すべての構造が、実線で示した3角形の内部に存在することがわかる。左側の直線は「量子限界」であり、この線より左では、量子論のハイゼンベルグ不確定性によってすべての構造が量子揺動の中にかき消されてしまう。右の直線は「因果限界」であり、この線より右では、一般相対論の因果律によってすべての

構造が見えなくなる。下の直線は「宇宙項」による密度の下限であって、これは現在の宇宙を満たす一様なエネルギー密度を意味する。このように、あらゆる構造の枠を決めているのは、量子力学・一般相対論・宇宙論である。では順番に、この宇宙構造の枠を概観していこう。

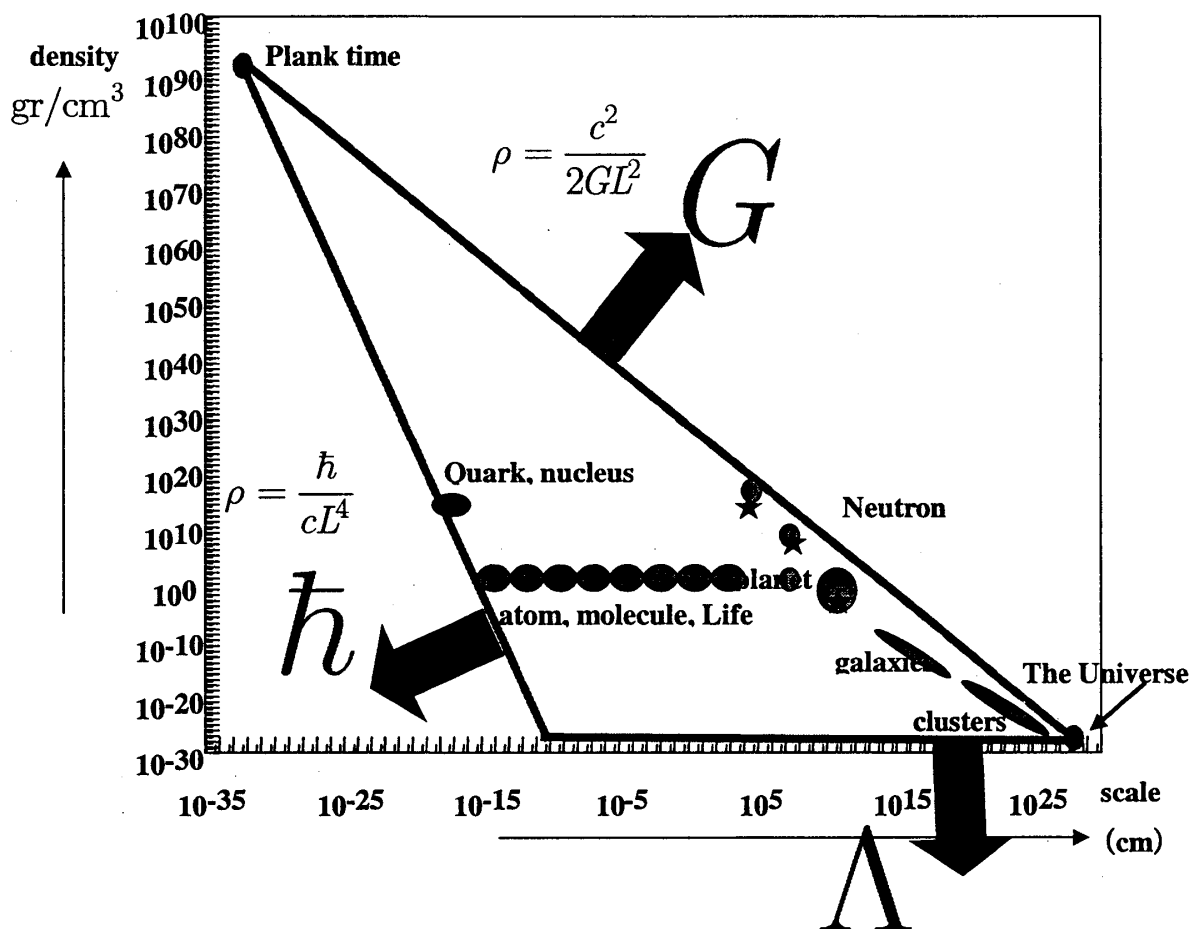


図1 de Vaucouleurs-池内図 横軸にスケール、縦軸に密度をとって、宇宙の中の構造を書き入れたもの。構造の存在領域は、不確定性原理・因果律・宇宙項で決まる。

2. 量子力学と不確定性原理

波は本質的に広がった実態であり物質波もそうです。その波長(ドブロイ波長) $\lambda = \frac{h}{mv}$ の最小値は $\lambda = \frac{h}{mc}$ で、この距離に対する臨界密度は $\rho_{\text{quantum}} = \frac{M}{(4\pi/3)\lambda^3} = \frac{h}{(4\pi/3)cr^4}$ となる。従って、 $\rho_{\text{quantum}} \propto r^{-4}$ となる。

電磁気力で構成される原子の構造を見てみよう。電子のエネルギーの表式 $E = \frac{1}{2}mv^2 - k_0 \frac{e^2}{r}$ に、ド・ブロイ波長 $\lambda = \frac{h}{mv}$ を入れると、 $E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} - k_0 \frac{e^2}{r}$ となる。 $\lambda \rightarrow 2\pi r$

としてエネルギー最小を計算すると、 $r = \frac{h^2}{k_0 e^2 m} = 5.28 \times 10^{-11} [\text{m}]$ 、

$E = -\frac{2\pi^2 (k_0)^2 m e^4}{h^2} = -2.19 \times 10^{-18} [\text{Joule}]$ となる。密度は、 $\rho = \frac{m_p}{\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3} = 2706 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ であり、

この密度の原子が積み重なって、分子、生命、惑星などが構成される。

さらに、電子はもっと潰れることができる。実際ド・ブロイ波長の式で $v \rightarrow c$ (コンプトン波長) とすると、密度は $\rho = \frac{m_p}{\left(\frac{4\pi}{3}\right) r_c^3} = 6.93 \times 10^9 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ となる。これは白色矮星の密度である。さらに高密度になって逆ベータ崩壊により、電子でなく中性子が圧力の主役を担ってくると、 $m \rightarrow m_p$ として、 $\lambda = \frac{h}{m_p c}$ つまり、密度 $\rho = 6\pi^2 \frac{m_p^4 c^3}{h^3} = 4.29 \times 10^{19} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ を得る。これは中性子性の密度であり、核子が極限まで潰れて支えている構造である。

上の構造は、基本的な力による引力に量子力学的「圧力」が拮抗して形成される構造である。実際、シュレーディンガー方程式 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$ を $\psi = \sqrt{n} e^{iS}$ と極分解して $\vec{v} = \hbar \vec{\nabla} S / m$ とおくと、

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{連続の式})$$

及び

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{m v^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} \right) = 0 \quad (\text{流体のオイラー方程式})$$

が得られる。この最後のラプラシアン項はハイゼンベルグの不確定性に由来し、量子力学的「圧力」を与える。ちなみにこの項は、ポテンシャル V に対する補正と考えて量子ポテンシャルとも呼ばれ、量子トンネル現象において自然な古典的解釈を与え、トンネル時間も定義する。

3. 一般相対論 (重力) と因果律

構造が、ブラックホールを作ってしまったのではその構造は観測できない。構造がブラックホール地平面 (シュバルツシルト半径: $r = \frac{2GM}{c^2}$) のぎりぎり外にあってブラックホールになっしまわな限の密度は $\rho_{\text{causal}} = \frac{M}{\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3} = \frac{c^2}{\left(\frac{4\pi}{3}\right) G r^2}$ と得られる。従って $\rho_{\text{causal}} \propto r^{-2}$ となる。

ほぼこの境界線に沿って重力で作られる構造の系列が並んでいる。この重力系列には、元素などの基本構成要素は存在しない。実際、球状星団、銀河、銀河団、超銀河団、から宇宙全体へと続く構造は、その平均密度が一定でなく、 $\rho \propto r^{-1.7}$ に近い。また、より小さな構造、恒星 (星)、白色矮星、中性子星へと向かう星一般系列の構造は $\rho \propto r^{-2.7}$ に近

い。これら両系列の境界は $10^{12.3}[\text{m}]$ 付近にある。

上のおよそ $\rho \propto r^{-2}$ という関係を、ヴィリアル定理 $\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle$ を使って説明して

みよう。 $K = \frac{1}{2}mv^2N = \frac{1}{2}v^2M$, $mN = M$ から $V = -\frac{Gm^2N^2}{r} = -\frac{GM^2}{r}$ なので、

$$\rho = \frac{M}{(4\pi/3)r^3} = \frac{v^2}{(4\pi/3)Gr^2} \text{ となる。従って、もし } \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2}kT \text{ が一定 (等温) なら } \rho \propto r^{-2}$$

である。星一般系列はスロープが-2 よりきつく、銀河系列はゆるい。重力系が時間発展し束縛した構造を作る部分は一般に温度が上昇していくので、前者はスケールが小さいほど、後者はスケールが大きいほど、温度が高いということになる。これは、それぞれ、大きなものが先にできて順次小さなスケールで構造形成したか（トップダウン）、あるいはその逆（ボトムアップ）であったことを示唆するのだろうか？

4. 宇宙論と宇宙項

もうひとつ、構造の存在領域は密度の下限を持っている。この下限は、宇宙をあまねくほぼ一様に満たしていると考えられる何らかのエネルギー（未だ正体不明なので暗黒エネルギーと呼ばれる）の密度である。このエネルギーによって宇宙は現在加速膨張をしている。宇宙項の存在は90年も前から理論的にわかっていたが、長い議論の末、観測的にもその存在が定量的に確定したのはつい最近である。

§2 一般相対性理論とブラックホール

特殊相対論では重力を扱えなかったことに、アインシュタインは不満を持っていた²。彼は、「自由落下する人は重力を感じない」ことから「加速系には（打消しの）重力場が生じる」と推論し、「時空」という物理量を多様体の幾何学で記述する一般相対性理論を作った³。多様体の運動は時間空間の不変距離

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

を与えるメトリック $g_{\mu\nu}(x)$ を変数とし、その運動はアインシュタイン方程式に従う。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2)$$

ここで、 $R_{\mu\nu}$ は（縮約）曲率、 $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソルである。右辺の物質が左辺の時空の源になっている形をしている。

ブラックホールは、式(2)の定常的な球形の解である。因果境界を持つホライズンを伴い、究極の祖視化が正当化され、温度やエントロピーの概念が出てくる。

講義でリクエストがあれば詳細を述べます。

§3 宇宙論

宇宙のモデルは、式(2)の動的でほぼ一様な解で記述される（フリードマンモデル）⁴。
時間発展方程式は、 $g_{\mu\nu}(x)$ の中の自由度 $a(t)$ に対しての常微分方程式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G\rho}{3c^2} + \Lambda, \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} &= -\frac{8\pi Gp}{3c^4} + \Lambda \end{aligned} \quad (3)$$

となる。これには定常安定な解はほとんど無く、膨張（収縮）宇宙の解が得られる。

講義でリクエストがあれば詳細を述べます。

§4 自己重力系の相転移

以下の話では解析的に議論できる古典論を数例述べる。講義ではこれから先の発展と最近の話題をお話したい。

1. 力の分布、相関関数、緩和時間

たくさんの粒子（星・銀河）がお互いに重力だけで作用し合っている系を考えよう。
一つの粒子●に着目しよう⁵（図2）。

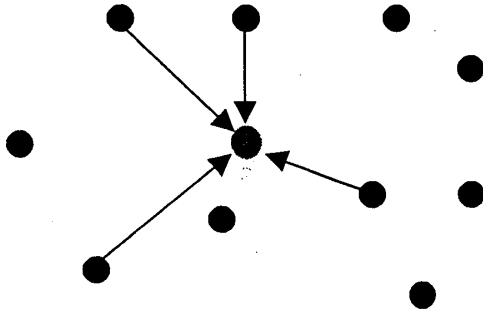


図2 自己重力粒子系。すべての粒子が他のすべての粒子と相互作用しあう。ひとつの粒子に働く力を計算する。

粒子●に働く力の分布は、一つの星に働く総力を

$$\sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i(\vec{r}_i), \quad \vec{\phi}_i(\vec{r}_i) \equiv \frac{GM_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (4)$$

として、その力が $\vec{F}$ である確率が

$$\begin{aligned} W(\vec{F}) &= \prod_{i=1}^N \int dM_i \int_{r \leq R} d\vec{r}_i \tau_i(M_i, \vec{r}_i) \delta\left(\sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i(\vec{r}_i) - \vec{F}\right) \\ &= \int \frac{d\vec{\rho}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{\rho}\vec{F}} \Phi(\vec{\rho}) \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。まずこの特性関数 $\Psi(\rho)$

$$e^{\Psi(\vec{\rho})} \equiv \prod_{i=1}^N \int dM_i \int_{r \leq R} d\vec{r}_i \tau_i(M_i, \vec{r}_i) \exp\left(i \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i(\vec{r}_i) \cdot \vec{\rho}\right) \quad (6)$$

を計算しよう。分布が一様なら、

$$\tau_i(M_i, \vec{r}_i) = \frac{\tau(M)}{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)} \quad (7)$$

なので、

$$e^{\Psi(\vec{\rho})} \equiv \left[\frac{3}{4\pi R^3} \int dM \int_{r \leq R} d\vec{r} \tau(M) \exp(i\vec{\phi}(\vec{r}) \cdot \vec{\rho}) \right]^N \quad (8)$$

となる。質量分布関数の規格化

$$\frac{3}{4\pi R^3} \int dM \int_{r \leq R} d\vec{r} \tau(M) = 1 \quad (9)$$

から、極限

$$R, N \rightarrow \infty, \quad \frac{3N}{4\pi R^3} \equiv n = \text{const.} \quad (10)$$

をとると、

$$\begin{aligned} e^{\Psi(\vec{\rho})} &\equiv \left[1 - \frac{3}{4\pi R^3} \int dM \int_{r \leq R} d\vec{r} \tau(M) \times \right]^{\frac{4\pi R^3 n}{3}} \\ &\quad \left(1 - \exp(i\vec{\phi}(\vec{r}) \cdot \vec{\rho}) \right) \\ &\rightarrow \exp\left(-n \int dM \int d\vec{r} \tau(M) (1 - \exp(i\vec{\phi}(\vec{r}) \cdot \vec{\rho}))\right) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。積分変数を、 $\vec{r} \rightarrow \vec{\phi}$ として、 $(\phi = |\vec{\phi}| = GM/r^2)$

$$\Psi(\vec{\rho}) = -\frac{4(2\pi)^{3/2}}{15} n G^{3/2} \langle M^{3/2} \rangle \rho^{3/2} \quad (12)$$

となる。ここで、 $\rho \equiv |\vec{\rho}|$ であり、 $\langle \dots \rangle$ は質量分布での平均。最終的に力の分布は、

$$\begin{aligned} W(\vec{F}) &= \int \frac{d\vec{\rho}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{\rho} \cdot \vec{F} - a\rho^{3/2}) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 F^3} \int dx \sin(x) x \exp\left(-a\left(\frac{x}{F}\right)^{3/2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、 $F \equiv |\vec{F}|$ 、 $a \equiv \frac{4(2\pi)^{3/2}}{15} n G^{3/2} \langle M^{3/2} \rangle$ である。分布が等方的なら、

$$W(F) = \frac{2}{\pi F} \int_0^\infty dx \sin(x) x \exp\left(-a\left(\frac{x}{F}\right)^{3/2}\right) \quad (14)$$

となる。

この分布の特徴は、

$$W(F) \approx \begin{cases} \frac{4}{3\pi a^2} F^2 & \text{for } F \rightarrow 0 \\ \frac{15}{4(2\pi)^{1/2}} F^{-5/2} & \text{for } F \rightarrow \infty \end{cases} \quad (15)$$

のようにテールを引くこと、それから、 $\langle F \rangle$ は存在するが $\langle F^2 \rangle$ が発散することである。この分布は、指数 3/2 の安定分布⁶として知られている。

次に力の相関を求めてみよう⁷。粒子（星）の軌道を直線で近似すると、力の相関関数は、

$$\langle \vec{F}_0 \cdot \vec{F}_t \rangle = n \int d\vec{v} \tau(\vec{v}) \int d\vec{r} \frac{Gm\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \frac{Gm(\vec{r} + \vec{v}t)}{|\vec{r} + \vec{v}t|^3} \quad (16)$$

となる。ここで、

$$\int d\vec{r} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \frac{(\vec{r} + \vec{v}t)}{|\vec{r} + \vec{v}t|^3} = - \int d\vec{r} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \frac{1}{|\vec{r} + \vec{v}t|} \right) + \int d\vec{r} \frac{1}{|\vec{r} + \vec{v}t|} \underbrace{\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right)}_{4\pi\delta(\vec{r})} \quad (17)$$

を用いると、

$$\langle \vec{F}_0 \cdot \vec{F}_t \rangle = n \int d\vec{v} \tau(\vec{v}) G^2 m^2 \int d\vec{r} \frac{4\pi\delta(\vec{r})}{|\vec{r} + \vec{v}t|} = 4\pi n G^2 m^2 \int d\vec{v} \tau(\vec{v}) \frac{1}{|\vec{v}|t} \propto \frac{1}{t} \quad (18)$$

となる。

次に緩和時間を求めてみよう。Fokker-Planck 方程式：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f \left\langle \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \right\rangle \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f \left\langle \frac{\Delta v_i \Delta v_j}{\Delta t} \right\rangle \right) \quad (19)$$

の拡散係数は、

$$\begin{aligned} D &= \frac{\langle |\Delta v|^2 \rangle}{2t} = \int_0^\infty dt' \langle \vec{F}_0 \cdot \vec{F}_{t'} \rangle \\ &= n \int_0^\infty dt' \int d\vec{v} \tau(\vec{v}) \int d\vec{r} \frac{Gm\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \frac{Gm(\vec{r} + \vec{v}t')}{|\vec{r} + \vec{v}t'|^3} \end{aligned} \quad (20)$$

である。先に時間積分をすると、

$$\int_0^\infty dt' \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} + \vec{v}t')}{|\vec{r} + \vec{v}t'|^3} = \frac{1}{|\vec{v}|} \quad (21)$$

となるので、

$$D = n G^2 m^2 \int d\vec{v} \frac{\tau(\vec{v})}{|\vec{v}|} \underbrace{\int d\vec{r} \frac{1}{|\vec{r}|^3}}_{4\pi \int_0^\infty \ln r} \quad (22)$$

を得る。最後の積分は発散しているが、UV、IR 切断 ($r_{\min}, r_{\max}$) を設定しよう。大体

$r_{\max}^3 / r_{\min}^3 \approx N$ と想定すれば、

$$D = nG^2m^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \langle v^2 \rangle}} \frac{4\pi}{3} \ln N \quad (23)$$

通常の揺動散逸関係を用いれば、この拡散係数から摩擦係数が関係付けられる。

$$\eta = \frac{D}{T} = \frac{8}{9} \sqrt{2\pi n} G^2 m^2 \langle v^2 \rangle^{-3/2} \ln N \quad (24)$$

この逆数として、緩和時間尺度がえられる[5]。

$$\tau_r = \eta^{-1} = \frac{9 \langle v^2 \rangle^{3/2}}{8 \sqrt{2\pi n} G^2 m^2 \ln N} \quad (25)$$

この緩和時間は、基本的に(速度分散) $\times$ (体積)の形をしていて、大まかに状態密度を与え、系のエントロピーと関連する。自己重力系の冷崩壊(cold collapse)において、この量が普遍的に重要なスケーリングを与えることなどを、講義ではお話しする。

2. 2次元重力 (ポール系)

2次元の場合、ポテンシャルは

$$\phi_{ij} = Gm^2 \ln(r_{ij}) \quad (26)$$

である⁸。ここで $r_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ 。

分配関数は、

$$Z = \int e^{-H/(kT)} \prod_{i=1}^N dx_i dp_i \quad (27)$$

で、ハミルトニアン H は、

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \phi(r_{ij}) \quad (28)$$

である。熱力学関係式から、圧力は

$$P = kT \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right|_{T, N} \quad (29)$$

と書けるのでこれを計算する。 V は面積である。変数変換、

$$x_i = V^{1/2} x'_i \quad (30)$$

で無次元の座標を定義する。これを使うと、

$$Z \propto V^N \int e^{-H/(kT)} \prod_{i=1}^N dx'_i \quad (31)$$

微分を取って、

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial Z}{\partial V} \right|_{T,N} &= NV^{-1}Z - \frac{V^N}{kT} \int e^{-H/(kT)} \frac{\partial H}{\partial V} \prod_{i=1}^N dx'_i \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\partial \left(\frac{V^{1/2} r_{ij}'}{\partial V} \right) \frac{\partial \phi(r_{ij})}{\partial r_{ij}}}{\partial r_{ij}} \\
&= NV^{-1}Z - \frac{V^N}{kT} \int e^{-H/(kT)} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{r_{ij}}{2V} \frac{\partial \phi(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \prod_{i=1}^N dx'_i
\end{aligned} \tag{32}$$

ポテンシャルの形 (26) を入れると、和がすぐ計算できて

$$PV = NkT \left(1 - \frac{(N-1)Gm^2}{4kT} \right) \tag{33}$$

となる。これは2次元重力系の厳密な状態方程式である。これには臨界温度

$$T_{cr} = \frac{(N-1)Gm^2}{4k} \tag{34}$$

があって、温度がこれ以下では、圧力が負! となって、いくらでも凝縮する。

これを van der Waals ガスの状態方程式

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - bn) = nRT \tag{35}$$

と対比してみよう。ここで $n = (N/A_{\text{bogadro number}})$ はモル数。また、 $a > 0$ は小さな引力、 $b > 0$ は有限サイズの粒子コアの効果を表す。式(33)と式(35)を対比すると、

$$a = \frac{A^2 G m^2 (N-1)}{4N} V, \quad b = 0 \tag{36}$$

となり、自己重力系では

1. 粒子のコアがない! (UV 発散)
2. パラメター a が示量的! (IR 発散)

→ 厳密には van der Waals ガスの状態方程式ではあわせない。

ということになる。

3. 1次元重力 (シート系)

1次元重力を考えよう[8]。エネルギーは

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + 2\pi \sum_{i < j}^N |x_i - x_j| \tag{37}$$

である。温度と圧力の与えられた系 ($\beta - P$ 系) の状態和は

$$Y(\beta, P) = \int_0^\infty dV \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta(H+VP)} \prod_{i=1}^N dx_i dp_i \tag{38}$$

となる。このうち座標の積分をすると

$$Q = \frac{1}{N!} \int_0^\infty dV \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi\beta \sum_{i < j}^N |x_i - x_j| - \beta PV} \prod_{i=1}^N dx_i \tag{39}$$

となる。ここで $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ と領域を制限して全体を $N!$ 倍すると

$$Q = \int_0^\infty dx_N \int_0^{x_N} dx_{N-1} \cdots \int_0^{x_2} dx_1 e^{-2\pi\beta \sum_{i<j}^N |x_i - x_j| - \beta P x_N} \quad (40)$$

となる。指数の肩は線形なのでまとめる：

$$\sum_{i<j}^N |x_i - x_j| = \sum_{i=1}^N \frac{(-N+2i-1)x_i}{c_i} \quad (41)$$

すると、

$$Q^{-1} = (2\pi\beta)^N c_1 (c_1 + c_2) (c_1 + c_2 + c_3) \cdots \left(\sum_{i=1}^N c_i + \frac{P}{2\pi\beta} \right) \quad (42)$$

$\sum_{i=1}^M c_i = M(M-N)$ 、 $\prod_{M=1}^{N-1} M(M-N) = -(-1)^N [(N-1)!]^2$ を使って、

$$Y(\beta, P) = -\left(\frac{m}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \frac{2\pi}{[(N-1)!]^2} \beta^{1-\frac{3}{2}N} P^{-1} \quad (43)$$

となる。これから、

$$V = \frac{-1}{\beta} \frac{\partial \ln Y}{\partial P} = \beta^{-1} P^{-1} \quad (44)$$

$$E + PV = -\frac{\partial \ln Y}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{3}{2}N - 1 \right) \quad (45)$$

などわかる。これは理想気体の状態方程式であり、1次元シート系は長距離系であるが、相転移を示さない。

一般に自己重力系には平衡状態が無いが、長い進化の過程で様々な相が準安定に出現する。これら準安定状態での揺らぎは異常である。このあたりを講義でお話したい。

§5 暗黒物質・エネルギーとボーズアインシュタイン凝縮

1. 宇宙を構成する物質

電磁波では感知できないが大きな重力は感じさせる源が存在しなければ様々な観測結果を説明できない状況が、何年も続いている[4]。実態が知れないので、空間的に局在するものは暗黒物質(DM=Dark Matter)と呼ばれたり、ほとんど一様に分布するものは暗黒エネルギー(DE=Dark Energy)と呼ばれたりする。これらは宇宙のエネルギーの96%を占めることがわかっている⁹。我々は宇宙の構成物質について、せいぜい4%しか理解していない。

これら暗黒物質・エネルギーの実態として、様々な起源の古典的スカラー場が考えられていたりしている。そのような物質の存在形態の自然な起源として、軽いボソンのボーズアインシュタイン凝縮(BEC)を考えてみたい。そして、暗黒物質と暗黒エネルギーの起源を説明する、一元論を展開してみよう^{10,11}。

モデルを構成する上で注意すべきことは、現象論として、暗黒物質・暗黒エネルギーを想定する現在の宇宙モデルは、観測を良く説明することである。特に、DE に関しては、観測されている加速宇宙膨張を説明するために、アインシュタイン方程式(3)から、それは負の圧力を持たなければならない $w \equiv p/\rho < -0.78$ ことである。DM に関しては、その線形不安定性の計算から、物質分布のパワースペクトルや宇宙背景輻射の揺らぎのスペクトルが得られているが、これが観測とあっているので、壊してはいけないことである。

一方、現在の宇宙モデルで成功している部分は主に線形の範囲であって、非線形領域では観測との対応が不明な点が多い。例えば、 $z \approx 20$ あたりでの再電離化が示唆されていることから[9]、非常に早い段階での構造形成が必要とされている。これには当然初期の星生成問題も含まれる。現在の宇宙モデルはこれらに明快には答えていない。

これらの要請を満たす自然な仮説として、DE は BEC であると考えてみよう。一元論で言えば、DM はこのボソンの励起ガスであると自然には考えられるが、後にそうではないことが示される。

2. 宇宙のボーズアインシュタイン凝縮機構

BEC は、ボソンの熱 de Broglie 波長が粒子の平均間隔を超えたときに、個々の波動関数がオーバーラップして生じる。

$$\lambda_{dB} \equiv \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{1/2} > r \equiv n^{-1/3} \quad \text{i.e.} \quad kT < \frac{2\pi\hbar^2 n^{2/3}}{m}. \quad (46)$$

一方、宇宙の密度変化は $n = n_0 \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{T}{T_0} \right)^{3/2}$ だから、温度の密度依存性は上と同じである。

($\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho_{Cond} + \rho_{Gas} + \rho_{Baryon})$ から物質優勢なら $\rho \propto a^{-3} \propto T^{3/2}$ 、輻射優勢なら $\rho \propto a^{-4} \propto T^4$ 。) 従って例えば $z = 3000$ で、ボソン温度が輻射温度と同じなら $T_{cr} = 0.0027K, \rho = \rho_{now} = 9.44 \cdot 10^{-30} \text{g/cm}^3$ であり、 $m < 1.96\text{eV}$ であれば現在 BEC が生じている (図 3)。

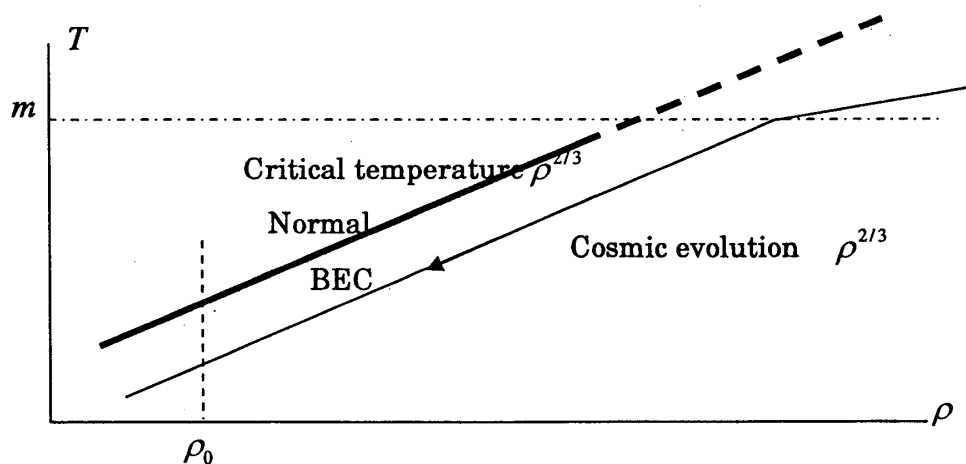


図3 BECの臨界温度 T_c と宇宙におけるボーズガスの温度。両方とも密度に対して同じ振る舞いをする。

3. BEC の量子流体モデル

BEC を、Gross-Pitaevskii 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi + g|\psi|^2 \psi \quad (47)$$

に基づいて平均場で記述していこう。ここで、 $\psi(\vec{x}, t)$ は凝縮波動関数で $V(\vec{x})$ はポテンシャル、 $g = 4\pi\hbar^2 a / m$ であり、 a はs波散乱長である。これは $\psi = \sqrt{n}e^{iS}$ と分解し $\vec{v} = \hbar \vec{\nabla} S / m$ とおけば、オイラー方程式

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{mv^2}{2} + V + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} \right) = 0 \quad (48)$$

となり、 $k^2 < k_c^2 \equiv 2mgn / \hbar^2$ であれば量子力学起源の圧力項は無視でき、古典流体と考えてよいだろう。さらに引力相互作用 $g < 0$ であれば、一般に $p = -A\rho^\alpha$ の形の状態方程式が得られる。

我々はまず最も簡単な $p = -\rho$ の場合を考えていこう。一般の場合や、相対論的な場合はモデルの本質は変わらないが、様相がずいぶん変わってくるので別に考える。また、BEC が進行するダイナミクスも不明なため、時間尺度 Γ^{-1} で非常にゆっくり凝縮が進行するという現象論でまず考える。

揺らぎが線形の領域で $\rho_c > \rho_g$ なら、ゲージ不変な線形摂動に対する時間発展方程式は

$$\delta_k'' + 5\delta_k' = -\left(6 - \left(\frac{k}{aH}\right)^2\right)\delta_k$$

となる¹²。ここで、 $\langle \dots \rangle' \equiv \frac{d\langle \dots \rangle}{d \ln a}$ 、であり、 $c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} = -1$ なので、音波は存在しない。小

スケールモード $\tilde{k}^2 > 6H^2$ は小スケールほど不安定で非常に速く $\delta \propto a(t)^{\tilde{k}/H}$ 成長する。そして小スケールで非線形構造を速く作ってバリオンが固まっていくのを助ける。一方、大スケールモード $\tilde{k}^2 < 6H^2$ は安定で線形揺らぎはゆっくり崩壊 $\delta \propto a(t)^{-5/2}$ する。ここで、共同波数 $\tilde{k} \equiv k/a$ を用いた。

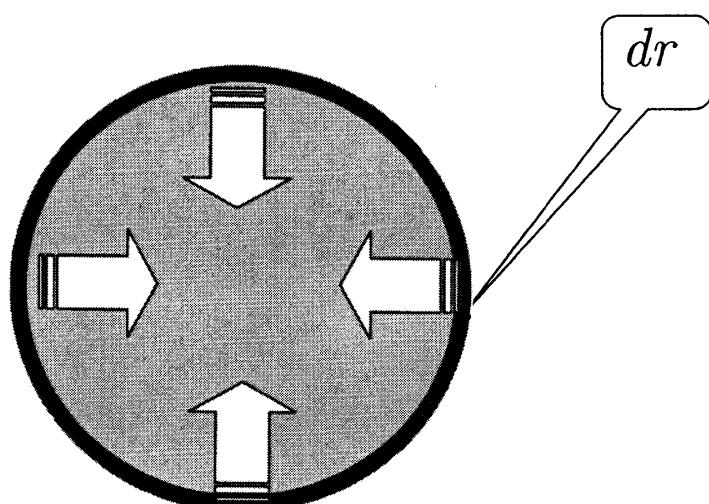


図4 BECの非線形発展。トップハット状のBECは表面が圧縮されて崩壊が始まる。崩壊速度はほぼ光速度である。

一方、非線形領域では、図4にあるように、ひとたび局在化したBECはその境界において圧力勾配を持ち、その皮の部分がBECをかき集めて高密度になりながら、一気に内側に潰れる。皮の厚みを dr とすると、かき集めるエネルギーは $4\pi r^2 dr (-p)' = 4\pi r^2 dr \rho$ なので、半径の運動方程式は

$$\frac{d(m_t \gamma \dot{r})}{dt} = -4\pi r_t^2 \rho \quad (49)$$

となる。ここで、 $m_t = \frac{4\pi}{3}(r_0^3 - r_t^3)\rho$ は皮の時間依存した質量。方程式(49)の解は、漸近的に光速に近い速度で潰れる解に収束する：

$$\gamma = 1.618, \dot{r} = 0.786. \quad (50)$$

このように、ひとたび崩壊が始まると負圧と重力が共同して構造の崩壊を促す。結果として、ボソン星 (BS)やブラックホール (BH)が大量に生成する。

4. ゆっくりした凝縮

ボーズガス成分の密度 $\rho_g(t)$ は宇宙膨張に従って薄まるが、BEC成分の密度 $\rho_c(t)$ は変化しない。これは、膨張により引き伸ばされたエネルギー $-pdV = \rho dV$ がそのまま場のエネルギーになるので、断熱的膨張を考える限り、膨張はBECに影響しない。新しい体積 dV に同じ密度のBECが生成されるのである。最初のBEC崩壊が起こる時間 t_0 が再結合の時間 t_{dec} より後 $t_{dec} < t_0$ であれば、WMAPによる宇宙背景輻射の一様性は保障される。現象論的な宇宙のスケールファクター $a(t)$ などの発展方程式は

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_c + \rho_g + \rho_l \\
\dot{\rho}_c &= \Gamma \rho_g \\
\dot{\rho}_g &= -3H\rho_g - \Gamma \rho_g \\
\dot{\rho}_l &= -3H\rho_l \\
H &\equiv \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}
\end{aligned} \tag{51}$$

となる。これを解いていくと、図5を得る。特徴的なのは、BECが何度も生成して不安定を起こし崩壊すること、及び、DE(ρ_c)とDM($\rho_g + \rho_l$)の量は自立的に同程度になっていくということである。後者は、DMのうち卓越成分 ρ_l が ρ_c の崩壊から供給されるという事実を反映している。これはいわば宇宙で実現する自己臨界組織化である。

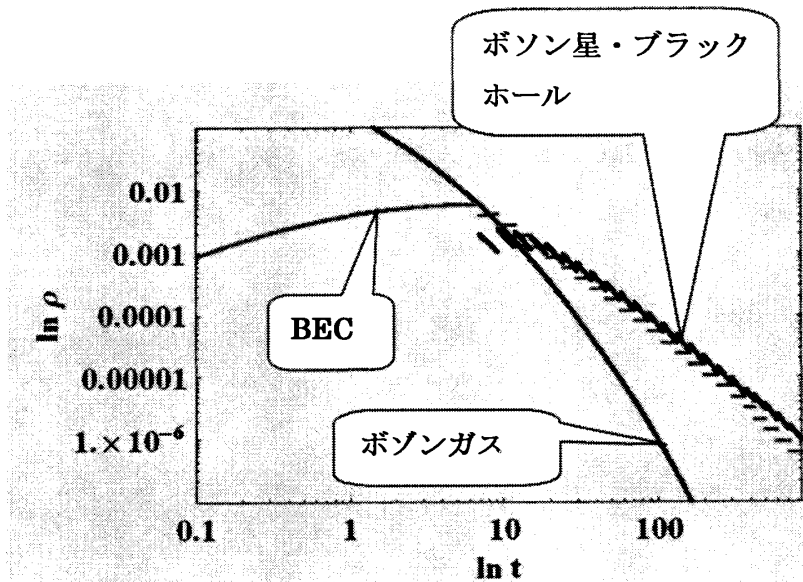


図5 BEC、ボソンガス、局在化したエネルギー密度（それぞれ ρ_c, ρ_g, ρ_l ）の時間発展。
 $8\pi G/3 = 1$ の単位で $\Gamma = 0.1$ とした。 ρ_c から ρ_l への遷移率を $1/3$ とした。22サイクルの後、
 スケール因子は200倍になる。DE(ρ_c)とDM($\rho_g + \rho_l$)の比は自律的に同程度になる。

5. 観測との比較

5.1 大スケールでの線形成長

BEC崩壊はほとんど光速で起こるので、小さなスケールで顕著になる。そしてそのスケールでブラックホールなどに局在化するので、さらにその局在化によってBECは解消し不安定性は即座に消滅するので、大スケールでの揺らぎの成長には影響をあまり与えない。具体的には、線形成長率は大きい成長時間が短いために、総合成長割合はその小さなスケールでせいぜい数倍程度になることを示せる。この

ように、BEC モデルは、現在の標準宇宙モデルが予言する線形揺らぎのパワースペクトルを変更しない。

5.2 宇宙背景輻射

BEC は再結合以降に起こるようにパラメータ Γ を調節できる。すると、宇宙背景輻射の現在の観測にはなんら抵触しない。

5.3 大量の局在化構造 (ボソン星やブラックホール)

ボソンにはフェルミオンのような縮退圧は無いので、ただハイゼンベルグの不確定性からくる量子圧力だけが構造を支えることができる。その特徴的なスケール

$$\lambda_{compton} = \frac{2\pi\hbar}{mc} \approx R \text{ を構造のサイズと同定し、これがブラックホール半径}$$

$$R_S = 3 \left(\frac{2GM}{c^2} \right) \text{ の外にあるという要請から、臨界質量が決まって、 } M_{critical} \approx m_{pl}^2 / m$$

となる。これがボソン星と呼ばれる構造である¹³。例えば、 $m = 10^{-5} \text{ eV}$ ととれば、構造は惑星質量程度である： $M_{critical} = 10^{-5} M_{\odot}$ 。

5.4 はじめて光る構造

もし $M > M_{critical}$ なら、量子力学的圧力では支えきれないので必然的にブラックホールが形成される。これが初めてできた銀河の種になったかもしれない。すると、銀河中心に頻繁に発見される巨大ブラックホールは BEC 崩壊のなれの果てかもしれない。もしそうなら、宇宙に初めての星ができる前に、ブラックホールにバリオンが降着して光を出す可能性がある。実際このような構造は現在からかなり過去にわたって ($0 < z < 6$) クエーサーとして観測されているが、このクエーサーが宇宙ではじめてできた光る構造であった可能性もある。そうであれば、宇宙背景輻射の観測から示唆されている非常に初期 $z \approx 20$ の宇宙再電離も可能である。

5.5 ブラックホール形成のダイナミクス

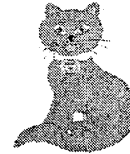
実際にどのようにブラックホールが形成されるか知りたいが、非常に非線形な過程であり、詳細はなかなかわからない。定性的には以下のようなになるだろう。崩壊により重力エネルギーが解放され BEC の温度が上昇する。その温度は、

$$NT \approx \frac{GM^2}{R} \approx Nm \text{ から、最大でボソンの質量と同程度になる。すると、ボソンは相}$$

対論的になりもはや粒子数は保存しないので、BEC は解けて高温ガスになる。すると、今度は正圧に転じて、激しく外に向かって膨張する。これらは暖かい DM としてエネルギー密度に寄与するだろう。これと銀河に付随するジェット構造との関連も興味がある。

6. 物性物理との関連

一方地上の実験室では、アルカリ原子の希薄ガスを使って BEC を作る実験が盛んに行われている¹⁴。また、Wieman et.al.^{15 16}により、負圧にした BEC が 10^{-5} まで崩壊し、5 ミリ秒で膨張を繰り返すことなどが報告されている。特に興味があるのが、放出されるジェット構造である。アルカリ原子の場合はジェットは単に波動関数の干渉であるかもしれないが、宇宙にあまねく存在しているジェット構造との関連があるかもしれない。



§6 対称性の自発的破れと量子測定論

量子力学は、シュレージンガー方程式に従う決定論的時間発展と、測定によって射影される確率的時間発展からなる二元論である。このことによって、特定の測定者のいない初期宇宙などには適用しにくい理論である。そこで、測定過程を単に数学的射影の公準ではなく、物理的過程として量子力学の一元化を試みる。つまり、von Neumann 射影公準を物理過程だと考えてその構造を解析する¹⁷。

測定過程の要点は、前半：系と測定系のエンタングルメント、そのデコヒーレンス、後半：系が純粋状態に移行する（エントロピーの減少）、それと相関を持った C-数自由度の出現（例えばメーターの読み）と分けられえ。ここでは特に、C-数自由度の発生と量子ブロッコヒーレンスを考えて、どのように量子・古典対応が可能か考えよう。これは、初期宇宙において、インフレーションが全宇宙の原構造をすべて均してしまっただ後、量子揺らぎから構造を発生させようとするいわゆる究極の構造形成の試みに対してその基礎を与える。

1. 量子力学らしさ

量子論の構造は、次のようにまとめられるだろう：

法則 1. 系の状態は複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトル（射線） ψ で表現される。

法則 2. 物理量＝観測量は $\mathcal{H}$ に作用する自己共役作用素 $\hat{A}$ で表現される。

法則 3. 状態 $\psi \in \mathcal{H}$ における物理量 $\hat{A}$ の期待値 $\langle \hat{A} \rangle$ は、 $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ 。

法則 4. 閉じた系の状態は、 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$ (Schrödinger Eq.) に従って時間変化する。

法則 5. 物理量 A の測定直後に、系の状態は $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle_{\text{after}} = N \hat{P}(a) |\psi\rangle$ となる。

これらは古典論の構造にそれぞれ対応している。

法則 1. 系の状態は位相空間 $\mathcal{X}$ 上の正値実関数 $f(q, p)$ で表現される。

法則 2. 物理量＝観測量は $f(q, p)$ の任意関数 $A[f]$ で表現される。

法則 3. 状態 f における物理量 A の値は $A[f]$ 。

法則 4. 閉じた系の状態は、 $-\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p}$ (Liouville Eq.) に従って時間変化（体

積保存)

法則 5. 物理量 A の測定直後に、系の状態は変化しない。

ただ、法則 5 だけが著しい対比を示す。量子論の法則から以下のように量子論らしさが現れる：

法則 1 (射線) からエンタングルメントの存在、Bell 不等式。また量子系は非加法的であり、全体は部分の合成でないこと。

法則 2 (作用素) から不確定性関係。特徴付けの干渉：特徴の列挙だけでは系を指定しないこと。

法則 3 (期待値) から確率的な予言しかできないこと。

法則 4 (発展) から量子圧力が構造の基礎を作っていくこと。つまり波動方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi \text{ を } \psi = \sqrt{n}e^{iS} \text{ と分解し } \vec{v} = \hbar \vec{\nabla} S / m \text{ とおくと } \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ (連続の式) と } m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{mv^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} \right) = 0 \text{ (オイラーの式) が得られる。}$$

法則 5 (測定) から量子系は本質的にオープンシステムであり、完全に閉じた系はありえないこと。測定系との相互作用を考えないと系は実在しないこと。

2. 量子測定論

量子論における時間発展の法則は 2 重構造を持っている。1 つは Schrödinger 方程式 (法則 4) によるユニタリー発展でありこれは決定論的である。もうひとつは測定過程 (法則 5) の von Neumann 射影公準であり、ここに確率の概念が入る。この 2 重構造は、観測者がいない宇宙論では困る。「我々人間」が観測者だと考えてなされた宇宙論の計算は無いのである。

まず量子測定の過程を分解してみよう。全体系は、 $|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle +$ 測定系 $|\phi\rangle +$ (環境系) であると想定すると、

測定過程 I S の初期状態をほぼ保持しながら状態はエンタングル(QE)する。

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \rightarrow c_1|\psi_1\rangle|\phi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle|\phi_2\rangle$$

測定過程 II 2 状態間の相関が消失—Quantum Decoherence (QD)

$$\rightarrow \rho = |c_1|^2|\psi_1\rangle|\phi_1\rangle\langle\psi_1|\langle\phi_1| + |c_2|^2|\psi_2\rangle|\phi_2\rangle\langle\psi_2|\langle\phi_2| + \text{small}$$

測定過程 III 有限の c-数秩序変数が現れる。

$$\rightarrow \text{value } \varphi_1 \text{ or value } \varphi_2$$

測定過程 IV S の状態は測定物理量に対しての純粋状態に移行 $\rightarrow |\psi_1\rangle \text{ or } |\psi_2\rangle$

$$\text{—III の状態との強い相関を持って } \rightarrow \{\text{value 1 \& } |\psi_1\rangle|\phi_1\rangle\} \text{ or } \{\text{value 2 \& } |\psi_2\rangle|\phi_2\rangle\}$$

となる。

過去に、デコヒーレンス過程までは盛んに議論されてきた¹⁸。しかしデコヒーレンスだけでは von Neumann 射影公準による変化を再現できない。C-数自由度が出現し系は自発的

に純粋状態に移行しなければならない。ここでは、von Neumann 射影を物理過程だと考えてそのプロセスを解析しよう。

特に、必然性が無いのに複数の中から1つを選び出す過程が必要である。もちろん非ユニタリー過程を Schrödinger 方程式だけでは記述できない。このような非決定論的な時間発展を持つ普遍的な物理過程は何だろうか？我々は、相転移における自発的対称性の破れ (SSB、対称性の自滅) に思い至る。SSB は自然界に普遍的に存在する機構で実際様々な構造を作り出している。従って我々は次の仮説を採用してみよう：量子測定過程は SSB である。

SSB (対称性の自滅) を複素スカラー場のモデルで見ておこう¹⁹。ラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (52)$$

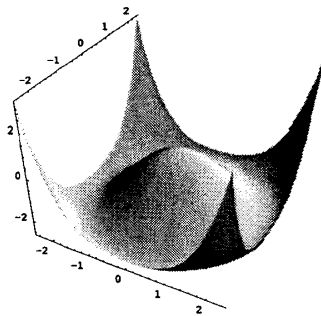


図6 対称性の自滅を起こす有効ポテンシャル。

で記述される場 $\phi(x)$ の系は、次の $U(1)$ 対称性を持っている。

$$\phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x), \quad \phi'^{\dagger}(x) = e^{-i\theta} \phi^{\dagger}(x) \quad (53)$$

有効ポテンシャル (図 6)

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + O(\hbar) \quad (54)$$

の停留点 $\partial V / \partial \phi = 0$ が真空を決めるが、その真空は2相ある。 $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$ の Wigner 相にある真空の上では、 ϕ の励起モードはタキオン (不安定) であり真空は不安定である。 $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = e^{i\theta} \sqrt{2\mu^2 / \lambda} \neq 0$ の NG 相にある真空の上では、 ϕ の励起モードは質量正の粒子 (安定) + 零質量の粒子 (NG ボソン) であり、 $U(1)$ は壊れるが真空は安定である (図 7)。自然は安定な NG 相の真空を選ぶ。特定の位相 θ が選ばれる理由は無いのに、「自発的に」どれかが選ばれたわけである。

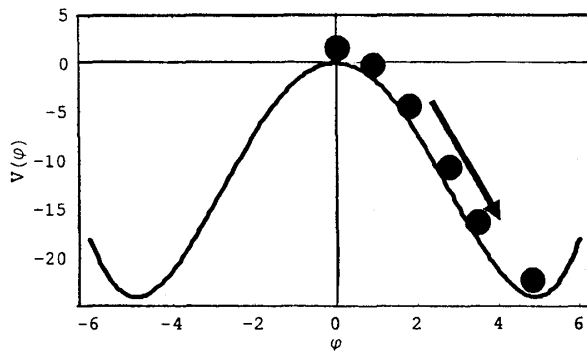


図7 対称性自滅のダイナミクス。測定理論には、相転移の動力学、つまり時間発展する秩序変数が必要となる。これはアニーリングでなくクエンチング相転移である。

表 1 には、測定過程（主に IV）と相転移（SSB）を様々な点から比較したが、良い対応が見られる。

	測定過程（主に IV）	相転移（SSB）
Local 過程	1 回毎の測定(Ψ)	単一相が実現
Global 過程	アンサンブルの測定(ρ)	たくさんのドメイン構造
local 過程の記述 （1 回の試行）	von Neumann 射影公理 or 多世界解釈の「分裂」	Langevin 方程式←ランダム力 （これは II の QD のと同起源）
Global 過程の記述 （複数回の試行）	密度行列の有効方程式	Fokker-Plank 方程式
古典変数	測定器メーターの読み	秩序変数—有限の
不可逆性	射影なので不可逆	1 次相転移は不可逆
（準）不安定性	エンタングル状態	準安定状態
スイッチ特性	vN 射影	転移（0 から有限の秩序変数）
相関距離	クラスター性成立のサイズか？	ドメインサイズを決定
精度・反作用	理想測定・不完全測定	以下議論

表 1 測定過程とSSBの比較。

図 8 は上に述べた測定過程 I,II,III,IV を模式的に描いたものである。

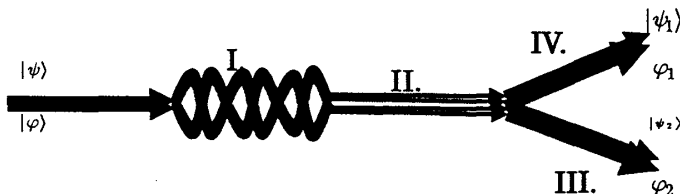


図8 測定過程I,II,III,IVの模式図。黒は測定系、青は被測定系を表す。

次に、量子測定の物理モデルを作るために、過程 III 及び IV の記述のために必要な物理を整理しておこう。

3. 対称性自滅の動力学： c-数自由度の出現と発展（過程 III SSB）

相転移の動力学、つまり C-数自由度の運動を記述するのに最も適した量は、有効作用

$\Gamma[\varphi]$ であり、これは量子力学的揺らぎと相関の総体を表す。量子補正の入った作用関数 $\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + O(\hbar)$ でもあるし、分配関数 $Z[J] = \langle \Psi_f, t_f | T \exp \left[i \int d^4x J(x) \hat{\phi}(x) \right] | \Psi_i, t_i \rangle$ のルジャンドル変換でもある。この点で、有効作用は熱力学の Helmholtz 自由エネルギー $F[T]$ と形式的な対応がある：

$$\begin{aligned} Z[J] &\leftrightarrow E[S] \\ J &\leftrightarrow S \\ \Gamma[\varphi] &\leftrightarrow F[T] = E - TS \\ \frac{\partial \Gamma[\varphi]}{\partial \varphi} = -J &\leftrightarrow \frac{\partial F[T]}{\partial T} \Big|_{V,N} = -S \end{aligned} \quad (55)$$

有効作用 $\Gamma[\varphi]$ の静的極限が有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}[\varphi]$ で、このそれぞれの極小値は異なる秩序変数 φ で特徴付けられる真空をあらわす。それぞれの真空は異なる Fock 空間を定義し、お互いに非同値であり、ユニタリー変換では遷移できない。

ただし、上の標準的な有効作用の方法は、秩序変数の因果性と実数性を壊してしまう。

つまり、 $\varphi(y) = -i(\delta / \delta J(y)) \ln Z = \langle \Psi_f, t_f | T \hat{\phi}(y) \exp \left[i \int d^4x J(x) \hat{\phi}(x) \right] | \Psi_i, t_i \rangle$ で定義された秩序変数は初期も終期も指定した、いわば遷移振幅であり、初期条件を与えて進化していく形の因果性を持った運動方程式には従わない。この問題は、初期条件をそろえた、閉じた時間経路の経路積分法²⁰(CTP)を使えば解決する。これは非平衡不可逆過程を扱う最適な方法であり、Keldish-Shwinger の方法の一般化である。特に、物理量の期待値の時間発展を追うのに便利であり、この方法に基づけば、通常量子補正に加えて、揺動散逸などの統計力学的な反作用も、整合的に取り込むことができる。

閉じた時間経路の経路積分法 (CTP) は、通常の場合の理論と境界条件が違うだけで、形式的な計算はほとんど同様に行うことができる。例えば分配関数は

$$\tilde{Z}[\tilde{J}] \equiv \text{Tr}[\tilde{T}(\text{Exp}[i \int \tilde{J} \tilde{\phi}]) \rho] \equiv \text{Exp}[i \tilde{W}[\tilde{J}]] \quad (56)$$

と表せる。ここで時間積分路は図9のように、 $-\infty \rightarrow \infty \rightarrow -\infty$ である。

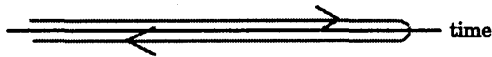


図9 CTP形式における閉じた時間経路。

上に波線の付いたあらゆる量は、この閉じた時間経路上に値を持つ関数を表す。又 $\tilde{T}$ はこの閉じた時間経路に対する時間順序への並べ替えの作用素である。 $\tilde{J}$ は外場である。 ρ は初期密度行列であり、場 ϕ はハイゼンベルグ表示のものである。この分配関数は相互作用表示では、

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[\tilde{J}] &= \text{Tr}[\tilde{T}(\text{Exp}[i \int \tilde{J} \tilde{\phi} - i \int V[\phi]] \rho)] \\ &= \text{Exp}[-i \int V[\frac{\delta}{\delta \tilde{J}}]] \text{Exp}[-\frac{i}{2} \iint \tilde{J}(x) \tilde{G}_0(x, y) \tilde{J}(y)] \text{Tr}[\text{Exp}[i \int \tilde{J} \tilde{\phi}] \rho]. \end{aligned} \quad (57)$$

となる。ここで、 $L[\phi] = L_0[\phi] - V[\phi]$ 、 $\tilde{J}(x) = J_+(x) - J_-(x)$ 、 $\tilde{\phi}(x) = \phi_+(x) - \phi_-(x)$ 、そして、 $\int \tilde{J}\tilde{\phi} = \int dx J_+(x)\phi_+(x) - \int dx J_-(x)\phi_-(x)$ 等と書いた。

この形式での2点相関関数は、 x, y がそれぞれ、+経路、-経路上にある場合を考えて、

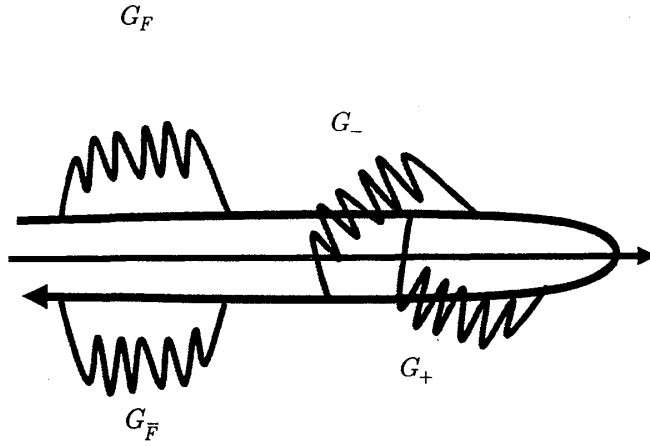


図10 CTP形式における2点関数。引数の位置によって4種類の2点関数が定義される。

$$\tilde{G}_0(x, y) = \begin{pmatrix} G_F(x, y) & G_+(x, y) \\ G_-(x, y) & G_{\bar{F}}(x, y) \end{pmatrix} \quad (58)$$

と書かれる。ここで、

$$\begin{aligned} iG_F(x, y) &= \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle, & iG_{\bar{F}}(x, y) &= \langle \bar{T}\phi(x)\phi(y) \rangle, \\ iG_+(x, y) &= \langle \phi(y)\phi(x) \rangle, & iG_-(x, y) &= \langle \phi(x)\phi(y) \rangle. \end{aligned} \quad (59)$$

である。ただしこれら4つのうち独立な関数は3つであり、これらを運動量表示で $A(k)$ 、 $B(k)$ 、 $C(k)$ と書くと式(59)の運動量表示は、

$$\hat{G}_F(k) = \frac{D(k) - iB(k)}{D(k)^2 + A(k)^2}, \quad \hat{G}_{\bar{F}}(k) = \frac{-D(k) - iB(k)}{D(k)^2 + A(k)^2}, \quad \hat{G}_{\pm}(k) = -i \frac{D(k) \mp iB(k)}{D(k)^2 + A(k)^2}. \quad (60)$$

となる。 $D(k)$ は波動関数、質量などの繰り込みを表す。 $A(k)$ は時間反転で非対称であり、 $B(k)$ は時間反転で対称な部分である。

ちなみに、Caldeira-Leggett のモデル²¹と完全な対応がある。

$$\begin{aligned} D(k) &\Leftrightarrow \text{質量の繰り込み} \\ A(k) &\Leftrightarrow \Sigma_F^R(x - x') = \text{Im } \alpha \\ B(k) &\Leftrightarrow \Sigma_F^I(x - x') = \text{Re } \alpha \end{aligned} \quad (61)$$

秩序変数の従う運動方程式を考えよう。秩序変数を

$$\tilde{\phi}(x) \equiv \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \tilde{J}} = \langle \Psi_i, t_i | T \hat{\phi}(y) \exp \left[i \int d^4x J(x) \hat{\phi}(x) \right] | \Psi_i, t_i \rangle \quad (62)$$

で定義し、 $\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}] \equiv W[\tilde{J}] - \int \tilde{J}\tilde{\phi}$ で有効作用を定義すると、それから従う式

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \tilde{\varphi}(x)} = -\tilde{J}(x) \quad (63)$$

は秩序変数に対する運動方程式とみなせる。これは因果的で実の方程式となる。しかしながら、もし初期に $\tilde{\varphi}(x) = 0$ なら原理的に常に $\tilde{\varphi}(x) = 0$ である。これでは相転移の記述はできない。 $\tilde{\varphi}(x)$ が 0 から発展しない理由は $\tilde{\varphi}(x)$ が平均量であって、例え系の部分部分が有限の秩序変数を持つようになって平均されて 0 に落ち着くからである。さらにこの有効作用は複素数になってしまうという問題もある。

これらの困難は、CTP の方法を少し一般化すれば解消する²²。有効作用 $\tilde{\Gamma} = \text{Re} \Gamma + i \text{Im} \Gamma$ の虚部は引き数 $\tilde{\varphi}_{\pm}$ の取り替えに対して偶であり、

$$\text{Im} \Gamma = (\text{even in } \varphi_{\Delta}(x)) = \frac{1}{2} \iint \varphi_{\Delta}(x) B(x-y) \varphi_{\Delta}(y) + \dots$$

と展開される。さらにこの積分核 $B(x-y)$ は正値をとることがわかる。従ってガウス近似の範囲で有効作用は、実数の補助場 $\xi(x)$ を用いて、

$$e^{i\Gamma[\varphi]} = \int [d\xi] P[\xi] \text{Exp}[i(\text{Re} \Gamma + \xi \varphi_{\Delta})] \quad (64)$$

と書ける。ここで、

$$P[\xi] = \text{Exp}\left[-\frac{1}{2} \iint \xi B^{-1} \xi\right] \quad (65)$$

はガウス型の統計的重み関数と解釈できる。一方、

$$\text{Re} \Gamma + \xi \varphi_{\Delta} \quad (66)$$

は実であって、分離された純正な有効作用と解釈される。ここで式(66)に、 $\varphi_{\Delta}(x)$ に関する変分原理を適用すれば、我々は秩序変数 $\varphi_C(x)$ に対するランジュバン方程式を得ることができる：

$$(\partial_x \partial^x + m^2) \varphi + (\text{interaction}) + \int_{-\infty}^t dt' \int dx' A(x-x') \varphi(x') = \xi \quad (67)$$

実際もしこの統計的平均を $\langle \dots \rangle_{\xi} \equiv \int [d\xi] \dots P[\xi]$ で定義すると、補助場の相関は $\langle \xi(x) \xi(y) \rangle_{\xi} = B(x-y)$ となる。このようにもとの作用は、全体系の有効作用が実で、統計的に独立な局所的有效作用の重ねあわせの形に分解された。

ちなみにここに現れたランジュバン方程式は古典的な方程式であって、ポピュラーな量子ランジュバン方程式とは異なる。つまり、量子力学に「等価な統計力学的表現」ではなく、量子力学に新しく出現する C-数変数の振る舞いを記述するのである。

さて、上に得られた方程式(67)は一般だが解くのはほとんど不可能である。そこでエッセンスを失わない最もシンプルな近似をしよう。重要な非ユニタリー変化は SSB 相転移の初期なので秩序パラメータはゆっくり進化し、さらに空間的一様という簡単化をしよう。すると、式(67)は

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\kappa} \left(m^2 \varphi + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 \right) + \frac{1}{\kappa} \xi \equiv \gamma \varphi - g \varphi^3 + \eta \quad (68)$$

となる。ここで、 $m^2 < 0$ 、 $\gamma > 0$ である。ゆっくりした秩序変数の時間変化を想定しているのでランダム場 η は、ガウス型

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \varepsilon \delta(t - t') \quad (69)$$

と近似してよい。これでもまだ解けないので、対応するフォッカープランク方程式の方法を使おう²³。線形力の場合には、

$$P(\varphi, t) = e^{A+B} P(\varphi, 0), \quad A = -\gamma t \frac{\partial}{\partial \varphi} \varphi, \quad B = \varepsilon t \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (70)$$

$$[A, B] = \alpha B \quad (71)$$

であり、解は具体的に、

$$\begin{aligned} P(\varphi, t) &= \exp \left[-t \frac{\partial}{\partial \varphi} \gamma \varphi \right] \exp \left[\left(1 - e^{-2\gamma t} \right) \left(\frac{\varepsilon}{2\gamma} \right) \right] P(\varphi, 0) \\ &= (2\pi \varepsilon_t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(y - e^{-\gamma t} \varphi)^2}{2\varepsilon_t} \right] P(y, 0) dy \end{aligned} \quad (72)$$

と書ける。ここで、 $\varepsilon_t = \varepsilon \frac{(e^{2\gamma t} - 1)}{\gamma}$ である。

4. 環境系の中での系の発展 - 混合状態から純粋状態へ (過程 IV QP)

被測定系の量子力学的発展を考えよう。簡単な例として大きさ 1/2 のスピン自由度を考えよう。環境系の中の有効発展方程式は

$$\dot{\rho}(t) = -i\omega[S_3, \rho(t)] + \left\{ a[S_+ \rho(t), S_-] + b[S_- \rho(t), S_+] + c[S_3 \rho(t), S_3] + h.c. \right\} \quad (73)$$

であり、係数 a, b, c は環境系の相関関数から決まる：

$$\begin{aligned} a &= \frac{g^2}{4} \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle R_+(t) R_-(0) \rangle = \pi D(\omega) n(\omega) \\ b &= \frac{g^2}{4} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle R_-(t) R_+(0) \rangle = \pi D(\omega) (n(\omega) + 1) \\ c &= g^2 \int_0^\infty dt \langle R_3(t) R_3(0) \rangle = (a + b)/2 \end{aligned} \quad (74)$$

これら係数の虚数部分は重要でない位相を出すだけなので、係数は実であると設定する。 $\omega = \mu B$ である。特に、環境系に関しては定常状態を想定し、普通の揺動散逸関係が成り立っているとする。

$$a = \exp[-\hbar \mu B / (kT)] b \quad (75)$$

ここで T は環境系の温度である。線型方程式(73)の解は、すべての係数が定数なら、すぐ求まって、 $\hat{S}_3$ を対角化する表示で、

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{b(c_1 + c_4) + e^{-2(a+b)t}(ac_1 - bc_4)}{a+b} & c_2 e^{-(a+b+c+i\omega)t} \\ c_3 e^{-(a+b+c-i\omega)t} & \frac{a(c_1 + c_4) + e^{-2(a+b)t}(-ac_1 + bc_4)}{a+b} \end{pmatrix} \quad (76)$$

となる。この漸近形は初期条件によらず、

$$\rho(t \rightarrow \infty) = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & 0 \\ 0 & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} \quad (77)$$

となる。つまり、 $a = \exp[-\hbar\omega_0/(kT)]b$ だから $\omega_0\hbar \gg kT$ の極限では ω_0 あるいは B の符号に因って、スピナップ状態 $|+\rangle = (1,0)$ あるいはスピンドアウン状態 $|-\rangle = (0,1)$ のどちらか一方だけが必ず実現することになる。

図 11 に示したように、数値解ははじめに QD (Quantum De-coherence) が、引き続いて QP: (Quantum Pro-coherence) が起きることを示している。系のエントロピーは減少することのできるのである。

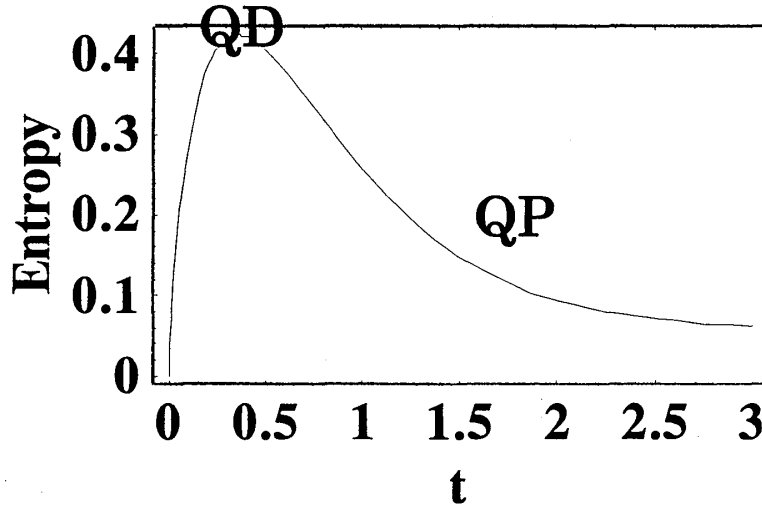


図11 環境系との接触で初めにQDが起こり、引き続きQPが起こる。漸近的にエントロピーは減少し、系の状態は純粋状態に向かう。

この QP は一般的で、Caldeira-Legget モデル: $H = H_A + H_I + H_B$

$$H_A = \frac{p^2}{2m} + v(x), H_B = \sum_k \left(\frac{p_k^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_k^2 x_k^2 \right), H_I = x \sum_k C_k x_k \quad (78)$$

においても実現する。時間発展の引き戻しを摂動に系統的に取り入れた TCL 形式の射影演算子法によって得られる微分方程式を解いて、漸近的に純粋状態の指標 $\text{Tr}\rho^2$ が

$$\text{Tr}\rho^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} [\text{Coth}(\frac{\hbar\omega}{2kT})]^{-1} \approx \begin{cases} 1 & \text{for } \frac{\hbar\omega}{2kT} \gg 1 \\ \frac{\hbar\omega}{2kT} & \text{for } \frac{\hbar\omega}{2kT} \ll 1 \end{cases}$$

となることが示せる²⁴。温度が系の振動数より小さければ「純粋性 $\text{Tr}\rho^2$ が増加する」。これは系が環境系に「熱」を捨てられるからである。

5. スピン測定の簡単なモデル

3.4 節に基づいて理想測定のモデルを考えよう。（実際は非理想的であることがわかるけど。）被測定系としてのスピン $\vec{S}$ と測定系としての場 ϕ を結合させ、ラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \mu\phi\vec{S} \cdot \vec{B} + (\text{bath}) \quad (79)$$

と設定しよう。ここで $\mu > 0$ である。我々はスピンの z 成分 $\hat{S}_3$ を測定することを考える。あからさまに書かないが系は環境系の中にいる。C 数秩序変数の時間発展は、非相対論局所近似で、

$$\dot{\phi} = \gamma\phi - \frac{\lambda}{3!}\phi^3 + \mu\langle\vec{S}\rangle \cdot \vec{B} + \eta \quad (80)$$

となる。このランダム力 η が SSB 相転移を引き起こす。

初期にもし $\langle\vec{S}\rangle \cdot \vec{B} > 0$ であれば、ポテンシャル $V(\phi)$ は原点で負の傾きをもつ。これは、c-数秩序変数 ϕ を $\phi_+ > 0$ のほうに発展するように促す。つまり $V(\phi)$ の中の $-\mu\phi\langle\vec{S}\rangle \cdot \vec{B}$ の項は $\phi_+ > 0$ をバイアスした。同様に、初期にもし $\langle\vec{S}\rangle \cdot \vec{B} < 0$ なら、 $\phi_- < 0$ がバイアスされる。

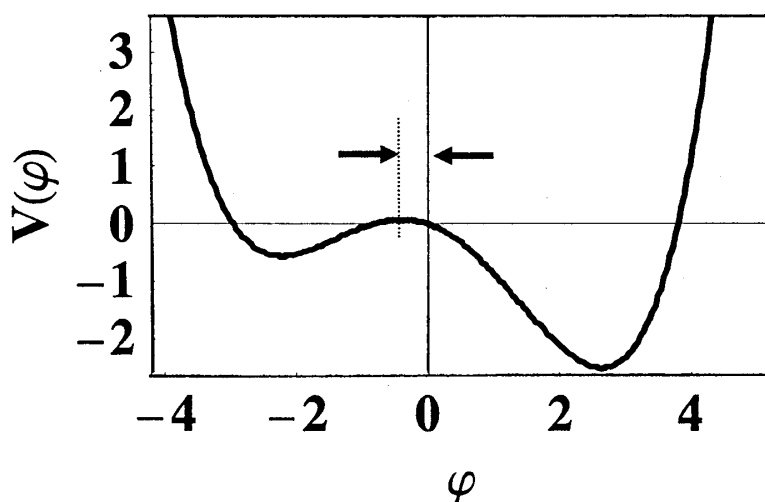


図12 $\lambda\phi^4$ モデル ($m^2 < 0$) において、 $\langle\vec{S}\rangle \cdot \vec{B} > 0$ によってバイアスされたポテンシャル

$V(\phi)$ 。

一方、スピンの密度行列の時間発展は

$$\dot{\rho}(t) = -i\omega[S_3, \rho(t)] + (a[S_+ \rho(t), S_-] + b[S_- \rho(t), S_+] + c[S_3 \rho(t), S_3] + h.c.) \quad (81)$$

となる。ここで $\omega(t) = \mu\varphi(t)B$ である。以前と違って $a = \exp[-\hbar\mu\omega(t)/(kT)]b$ のように、係数は変数 $\varphi(t)$ を通して時間依存する。我々は運動方程式(80)(81)を連立させて解けばいい。

先ほど、初期にもし $\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{B} > 0$ であれば、 φ は $\varphi_+ > 0$ にバイアスされることを見た。さらにここで、スピンのポテンシャルエネルギーは $-\mu\varphi\vec{S} \cdot \vec{B}$ なので、 $\vec{S}$ は $\vec{B}$ とますますそろおうとする。つまり、 $\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{B}$ がさらに大きくなり、ますます $\varphi_+ > 0$ をバイアスする。これは正のフィードバックであり、スピンは up-状態かつ秩序変数は φ_+ にロックされる。同様に、 $\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{B} < 0$ のときには、スピンは down-状態、秩序変数は φ_- にロックされる。このようなスピンのアップかダウンの一方だけが必ず実現し、それが秩序変数と強い相関を持っている特徴は、von Neumann 射影仮説そのものであり、量子測定でまさに必要なことであった。図 13 に数値計算結果を少し載せておいた。

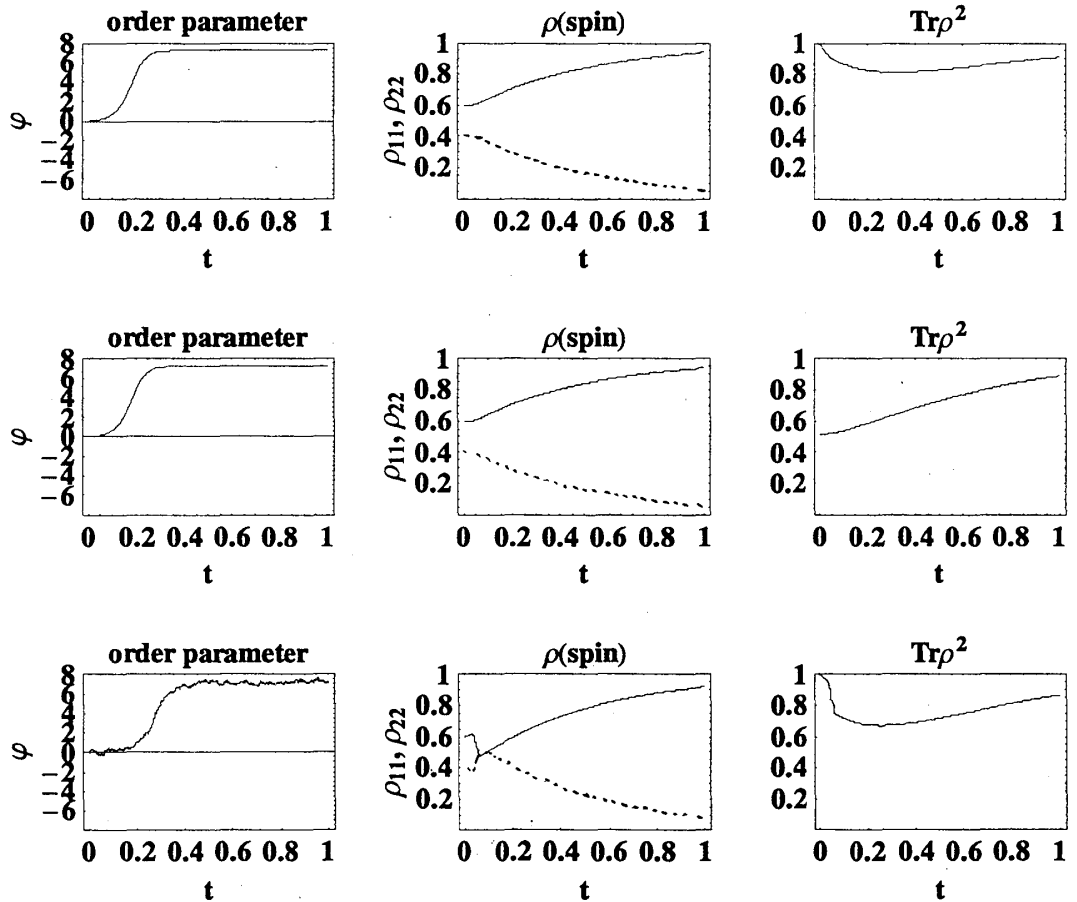


図13 秩序変数、スピンの確率(実線 ρ_{11} 、破線 ρ_{22})、純粋度($\text{Tr}\rho^2$)の時間発展。式(85)で定義された最適化パラメーターは上から順に $z = 10, 2.0, 0.08$ である。

6. 測定の有効性と精度

では実際、どの程度測定は精度良く行えるのだろうか？つまりどの程度理想測定になっているのだろうか？以上で考えてきた1回の測定だけでは、系の測定前の状態に関して何も言えないが、同じ系の多数のコピーに対して測定を繰り返し統計的に、系の初期状態を「測定」できるだろうか？これを次に考えよう。

先ほどの確率関数 $P(\varphi, t)$ (線形近似) を用いて、時刻 t に、秩序変数が+側にいる確率は

$$P_+ = \int_0^\infty P(\varphi, t) d\varphi = \frac{1 + \operatorname{erf}(\delta / \sqrt{2\varepsilon(t)})}{2} \quad (82)$$

であり、同様、一側にいる確率は

$$P_- = \int_{-\infty}^0 P(\varphi, t) d\varphi = \frac{\operatorname{erfc}(\delta / \sqrt{2\varepsilon(t)})}{2} \quad (83)$$

となる。ここで、 $\delta = (\mu/\gamma) \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{B}$ は初期バイアスを表す。これは線形近似の結果であって、 $t \rightarrow \infty$ としたら正しくない結果が出る。これらの確率は相転移終了時点で評価しなければならない。そのための重要な時間尺度として、SSB 相転移の完結時間 t_0 を導入しよう：

$$t_0 = \frac{1}{2\gamma} \ln \left[\frac{g}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} + \delta^2 \right) \right]^{-1} \quad (84)$$

これは、FP 方程式のスケーリング解の中に出てくる秩序時間[23]であるが、「系の緩和時間にランダム力を受けて分散する大きさと、初期のバイアスとの和だけ、中心から外れているとして古典力学的に解いた解が、ポテンシャルの変曲点に達するまでの時間」に等しい。測定前の系の状態を反映した正しい測定結果が現実的に出するためには $t = t_0$ で $P_\pm \approx 1$ 、つまり

$$z \equiv \frac{\delta}{\sqrt{2\varepsilon(t_0)}} \bigg|_{\langle S_z \rangle \rightarrow 1/2} \approx 2 \quad (85)$$

であることが必要 ($P_\pm = 0.995$) である。これが量子測定の最適化条件である。さらにまた、 $\delta \propto \langle \hat{S}_3 \rangle$ なので、理想的な確率は δ に関して線形でなければならないのに、実際(82)(83)はそうではない。従って、測定にはキャリブレーションが必要となる。

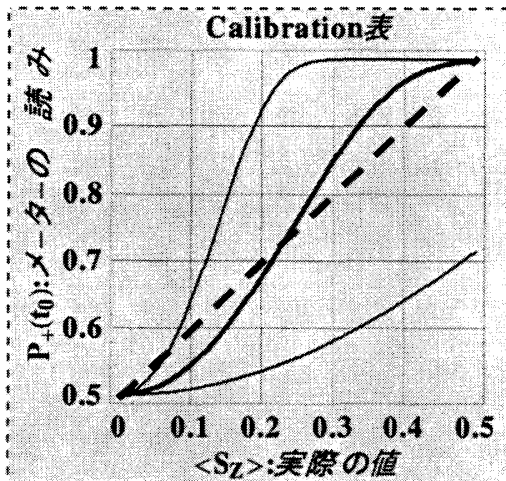


図14 この測定装置のCalibration表。実線：確率関数 P_+ 、破線：理想測定の場合（線形）。これらのすり合わせにCalibrationが必要となる。上： $z=6.5$ (小さな ε) では対応に縮退があるので実質的にCalibrationは無効である。中： $z=2.0$ の最適状態であり、もちろんCalibrationがたいへん有効となる。下： $z=0.4$ (大きな ε) でも一応Calibrationは有効である。

7. いくつかの応用

上で見てきたのは projective (理想)測定だが、吸収型測定、つまり系の量子が吸収され測定器の C 数秩序変数だけが残る測定、に対しても同様のモデルを立てることができる。このために測定器を代表する場 $\phi(t, \vec{x})$ が空間領域 Ω に広がっているとしよう。つまり準安定領域 Ω に系の量子が飛び込んでくるモデルであり、ここには過程 III が無いだけで基本的に上のモデルと同様の議論ができる。さらに、Negative result experiment や Quantum Zeno effects²⁵ に関しても定量的な議論展開ができるだろう。複素スカラー場のモデルを用いて、上と同様に、光子位相 ω の測定過程を記述することもできる。この場合、ポテンシャルは

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + \mu \frac{(\phi^\dagger a + a^\dagger \phi)}{N|\phi| \cos(\theta - \omega)} + O(\hbar) \quad (86)$$

となるが、初めの状態は $U(1)$ 対称性を持つ。SSB 相転移が進行し $|\varphi|: 0 \rightarrow \sqrt{2\mu^2/\lambda}$ が有限値となるに従って、光子の位相は $\omega \approx \pi - \theta$ に落ち着いていく。ここで秩序変数は $\varphi = |\varphi|e^{i\theta}$ である。ここでも正のフィードバックが基本的に重要な役割を果たす。宇宙の密度揺らぎの起源を考える場合、「被観測系」の量子状態でなく「出現する C 数秩序変数」が宇宙の構造を決めるので、観測者は不要になる。これは吸収型測定に近い状況である。

さて最後に、上のモデルが Born の確率規則を導いたことになっているか考えてみよう。Born の確率規則は、単に von Neumann 射影だけでなく、「状態 $\psi \in \mathcal{H}$ における物理量 $\hat{A}$ の測定で、測定値は $\hat{A}$ の固有値のどれかに限られる。その確率 $P(a)$ は $P(a) = \|\mathcal{P}_a |\psi\rangle\|^2$ である。」という内容である。もし $\gamma \gg \sqrt{g\varepsilon}$ 、あるいは $\varepsilon \gg \gamma\delta^2$ なら我々の上のモデルから線形関係が得られる：

$$P_+ = \frac{1}{2} + \alpha(2\|\mathcal{P}_+|\psi\rangle\|^2 - 1). \quad (87)$$

$\alpha = 0.5$ ならまさに $P_+ = \|\mathcal{P}_+|\psi\rangle\|^2$ であるが、今のモデルでは残念ながら $\alpha = 0.5$ では無いので、Born の確率規則はキャリブレーションの後に得られることになる。

まとめとして量子測定の四つ組を図 15 にイラストした。

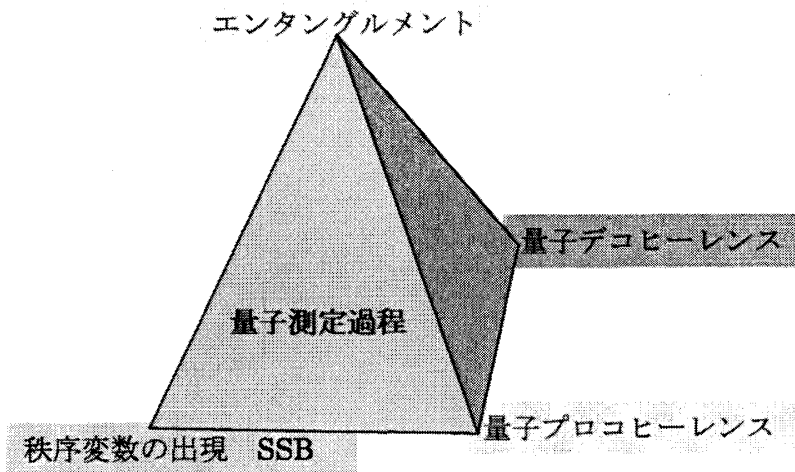


図15 量子測定の4つ組み。

参考文献

- ¹ G. de Vaucouleurs, *Science* **167**, 1203 (1970).
池内了, 観測的宇宙論 東大出版会 (1997).
- ² Albert Einstein, *How I Constructed the Theory of Relativity*, AAPPs Bulletin **15** No. 2 (2005)
<http://www.aapps.org/>.
- ³ Landau and Lifshits, *The classical theory of fields*, Pergamon press Oxford (1975).
- ⁴ G. Börner, *The Early Universe*, Springer Berlin (2004).
- ⁵ S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.* **15** 1(1943).
- ⁶ B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* Addison-Wesley Inc. Cambridge Mass. (1954).
- ⁷ E. P. Lee, *ApJ* **151** 687.
- ⁸ T. Padmanabhan, *Phys. Rep.* **188** 285 (1990).
- ⁹ <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- ¹⁰ M. Nishiyama, M. Morita, and M. Morikawa, astro-ph/0403571.
- ¹¹ Takeshi Fukuyama, Masahiro Morikawa, astro-ph/0509789.
- ¹² M. Sasaki and H. Kodama, *PTP Suppl.* **78** 1 (1984).
- ¹³ D.J. Kaup, *Phys. Rev.* **172** (1968) 1331.
- ¹⁴ <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html/>
- ¹⁵ J.R. Anglin and W. Ketterle, *Nature (London)* **416** (2002 March 14) 211 for review.

-
- ¹⁶ H. Saito and M. Ueda, Phys. Rev. A **65** (2002) 033624.
¹⁷ M. Morikawa, A. Nakamichi, quant-ph/0505077.
¹⁸ M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76** (2004) 1267-1305 (quant-ph/0312059).
¹⁹ C. Itzykson, Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory* McGraw-Hill (1986).
²⁰ J. Schwinger, J. Math. Phys. **2** (1961) 407.
L. V. Keldysh, JETP **20** (1965) 1018.
K. Cho, Z. Su, B. Hao, and L. Yu, Physics Report **118** (1985) 1-131.
²¹ A. O. Caldeira, and A. J. Leggett, Physica **121A** 587 (1983).
²² M. Morikawa, Phys. Rev. D **33** (1986), 3607; Prog. Theor. Phys. **93** 685.
²³ M. Suzuki, Adv. Chem. Phys. **46** (1981) 195.
²⁴ R. Yamagami, 修士論文 (2001).
²⁵ A. Shimizu, T. Morimae, quant-ph/0411145.
M.Hotta, M.Morikawa, Phys. Rev. A **69**, 052114 (2004).