

Disk dynamo モデルを用いた、揺らぎの成長に基づく 地磁気反転パターンの解釈*)

長崎大学工学部材料工学科 近藤 慎一郎

(1998 年 3 月 26 日受理)

Abstract

揺らぎの成長という観点に立脚して、地磁気反転についての議論及び考察を行った。特に相互誘導インダクタンスが系の動的挙動に及ぼす影響について、3 disk dynamo モデルを用いて、詳しく考察を行った。相互誘導インダクタンスは、系の相互作用の大きさを表す尺度であり、これが系の動的挙動に重要な影響を及ぼす。まず相互誘導インダクタンスが大きい場合、—これは系の相互作用が大きいことに対応する一定常状態に加えられた、極めて小さな電流の揺らぎも、短い時間に成長し、波長の短い成分で構成された不規則振動を呈するようになる。潜伏期間は非常に短い。対照的に、相互誘導インダクタンスが小さい場合、定常状態に加えられた揺らぎは、非常に長い潜伏期を経た後、成長する。しかしながら揺らぎの成長は極めてゆっくりであり、不規則振動を呈するものの比較的波長の長い成分で構成されている。このように、相互誘導インダクタンスの大きさは潜伏期間、揺らぎの成長及び振動の様相に極めて大きな影響を及ぼす。数学的に考えると、相互誘導インダクタンスの大小は時間軸の収縮・伸張に関連しており、相互誘導インダクタンスが大きい場合、時間軸は収縮し小さい場合伸張する。disk dynamo モデルから得られた結論と地磁気反転パターンとの類推より、現在から約 2500 万年前までは反転周期が短いことから、揺らぎの成長は極めて速いと考えられる。このことは disk dynamo モデルにおいて相互誘導インダクタンスが大きいことに対応する。それとは対照的に、白亜紀に於いてみられる極めて長い間地磁気が反転しない期間 (Cretaceous Superchron) には、系に生じた揺らぎの成長は極めて緩やかであると考えられ、disk dynamo モデルにおいて相互誘導インダクタンスが小さいことに対応する。これらの事を考慮に入れ、現象論的に地磁気反転パターンを説明するためには、disk dynamo モデルにおいて相互誘導インダクタンスに時間依存性がなければならない。解析を行った結果、時間依存性を有する場合の解は、時間依存性がない場合に得られる解に対して、時間軸のみを操作する事で得られる事が判った。換言すれば、disk dynamo モデルに於いて、相互誘導インダクタンスに時間依存性がない場合の解に対して周波数変調 (FM) を施せば、時間依存性を有する場合の解を得ることが出来る。これは現象論的には、不規則波の周波数変調によって地磁気反転パターンが得られることを示している。

*) 本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

【緒言】

力武に始まる 2 disk dynamo の研究(1958)¹⁾ は、その後、その挙動が詳しく研究されてきた²⁻⁶⁾。また更に複雑な disk dynamo も提案され、研究されている⁶⁻⁸⁾。これら一連の disk dynamo についての研究は、地球磁場反転を説明するのに重要な役割を果たしてきている。

確かに disk dynamo を含めてダイナモ理論は地球磁場の反転を説明することが出来る唯一の理論であり、地球磁気の研究で極めて重要な役割を果たしてきている。しかしながら、MERRILL と McFADDEN⁹⁾ の指摘にもあるように、Cretaceous や Kiaman Superchron の様に極めて長い期間、地磁気が反転しないことは、ダイナモ理論では説明しにくい。通常ダイナモ理論では、非常に長い反転期間と非常に短い反転期間の両方が存在する地磁気反転パターンを説明することは、出来ない。

それ故、Cretaceous や Kiaman Superchron の存在を現象論的に説明するために揺らぎの増幅という観点から disk dynamo モデルを用いて解析をおこなった。この論文では6つの自由度を有する 3 disk dynamo の挙動に注目して研究を行った。その際電気抵抗と円盤を動かす力のモーメントは非常に小さく無視出来ると仮定した。このような仮定を設けるのは以下の理由によるものである。

- (1) エネルギー保存則を用いて数値計算の精度を判定できる。
- (2) Liapounov 関数を容易に求めることが出来る。
- (3) 定常状態の安定性を吟味しやすい。
- (4) 系を支配する微分方程式が数学的に解析しやすい形になる。

揺らぎの増幅の観点で考える際、主に相互誘導インダクタンスの寄与について考察をおこなった。また数学的な観点から相互作用の大小について論じる。

【解析及び考察】

N -Disk dynamo について考えてみよう(LEBOVITZ model)⁷⁾。図1は 電磁氣的に結合した N -Disk dynamo を示したものである。系を支配する方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} L_n \frac{d}{dt} I_n(t) + R_n I_n(t) &= M_n \Omega_n(t) I_{n-1}(t) \\ C_n \frac{d}{dt} \Omega_n(t) &= G_n - M_n I_n(t) I_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N) \text{ and } I_0(t) = I_N(t), \quad \Omega_0(t) = \Omega_N(t)$$

ただしこの場合、緒言の処で述べた様に 3 disk dynamo について調べるので $N=3$ となる。ここで $I_n(t)$ と $\Omega_n(t)$ は電流と角速度である。 L_n と R_n は n 番目コイルにおける自己インダクタ

ンス及び電気抵抗である。 C_n と G_n は n 番目のコイルに於ける円板の慣性モーメント及び円板を動かす力の回転モーメントである。 $2\pi M_n$ は $n-1$ 番目と n 番目のコイルとの相互誘導インダクタンスである。(1)式を見て判るように、相互誘導インダクタンスは隣接するコイル間の相互作用の大きさを表すものであり、この為各 disk の運動は一体問題では捉えることが出来なくなる。多体効果が各 disk の運動に影響を与える。しかも相互誘導インダクタンスの存在により導入される多体効果のため(1)式の解(即ち $I_n(t)$ と $\Omega_n(t)$)は、解析的に求められなく、また非常に不規則な振動を呈する様になる。

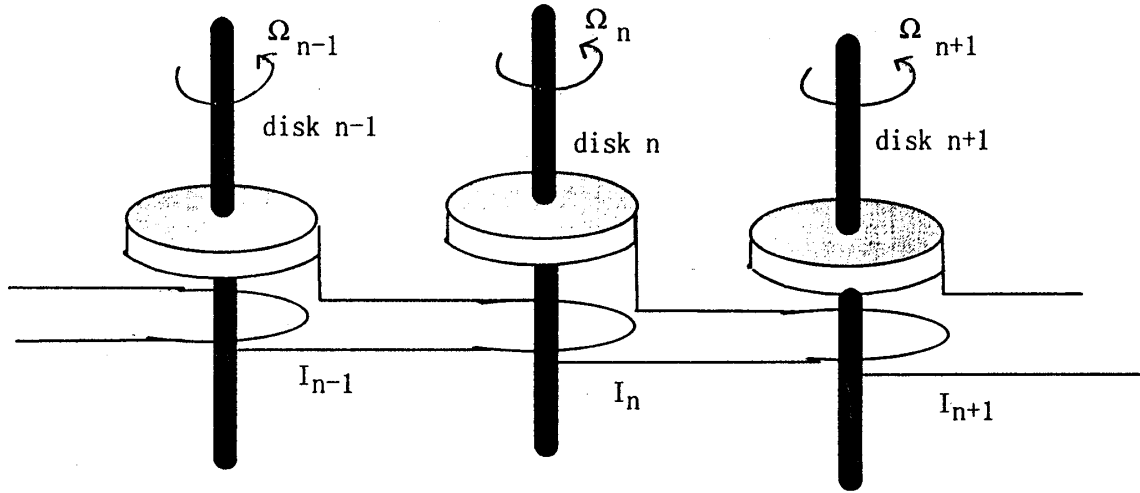


図1 N -disk dynamo の概略図

次に(1)式において、電気抵抗 R_n および G_n は他の項に比べ非常に小さく無視できると仮定しよう。このような仮定を設けるのは前述した理由によるものである。すると(1)式より

$$L_n I_n(t) \frac{d}{dt} I_n(t) = -C_n \Omega_n(t) \frac{d}{dt} \Omega_n(t) \quad (2)$$

($n=1, 2, 3$)

を得る。また上式を積分することにより

$$L_n [I_n(t)]^2 + C_n [\Omega_n(t)]^2 = (\varepsilon_n)^2 = \text{const} \quad (3)$$

を得る。ここで ε_n は系の初期条件で定まる定数である。上式は系のエネルギーが保存されていることを表している。更に(3)式を用いれば数値計算の精度が確認できる。

更に議論及び解析をやり易くするために系は均一であるとしよう。これは $C_1=C_2=C_3=C$, $L_1=L_2=L_3=L$, $M_1=M_2=M_3=M$ を意味する。すると方程式(1)は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}I_n(t) = \frac{M}{L}\Omega_n(t)I_{n-1}(t) \quad (n=1, 2, 3) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\Omega_n(t) = -\frac{M}{C}I_n(t)I_{n-1}(t)$$

$$I_0(t) = I_3(t), \quad \Omega_0(t) = \Omega_3(t)$$

更に $L=1\text{H}$ 及び $C=1\text{HA}^2\text{sec}^2$ とする。次に $I_n(t)$ 、 $\Omega_n(t)$ 及び t を無次元化するために、以下のように定義される無次元量 t' 、 $I'_n(t')$ 、 $\Omega'_n(t')$ を導入する。

$$t=t_0t'$$

$$I_n(t) = I_n^0 I'_n(t')$$

$$\Omega_n(t) = \Omega_n^0 \Omega'_n(t')$$

ここで、 I_n^0 、 Ω_n^0 及び t_0 はAmperes, rad/s及びsecの次元を持つ。計算の便宜上すべての n について $I_n^0=1\text{A}$ 、 $\Omega_n^0=1\text{rad/sec}$ 及び $t_0=1\text{sec}$ とする。すると方程式(4)は

$$\frac{d}{dt'}I'_n(t') = m\Omega'_n(t')I'_{n-1}(t') \quad (4)'$$

$$\frac{d}{dt'}\Omega'_n(t') = -mI'_n(t')I'_{n-1}(t')$$

となる。ただし $m = M/L$ とした (M の単位は L と同じくHとする。それ故 m は無次元量となる)。

便宜上Liapounov関数を表しやすい形にするため、方程式(4)'を次のように書き換える。

$$\frac{d}{dt'}J_n(t') = f_n(J_1(t'), J_2(t'), J_3(t'), J_4(t'), J_5(t'), J_6(t')) \quad (5)$$

ここで $J_1(t') = I'_1(t')$ 、 $J_2(t') = I'_2(t')$ 、 $J_3(t') = I'_3(t')$ 、 $J_4(t') = \Omega'_1(t')$ 、

$J_5(t') = \Omega'_2(t'), J_6(t') = \Omega'_3(t')$ とする。

最初に $J_n(t')$ を定常点 $J^* = (J_1(t'), J_2(t'), J_3(t'), J_4(t'), J_5(t'), J_6(t')) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 近傍での振る舞いについて考えてみよう。まず Liapounov 関数 $V(J_1(t'), J_2(t'), \dots, J_6(t'))$ を以下の様に定義しよう。

$$V(J_1(t'), J_2(t'), \dots, J_6(t')) = \sum_{n=1}^6 [J_n(t')]^2 \quad (6)$$

式 (3), (4)' 及び (6) より

$V > 0$ (定常点 J^* をのぞくすべての領域) 及び

$$\frac{d}{dt'} V = 0 \quad (7)$$

それ故、(7) で示される Liapounov 関数の存在により位相空間の領域 D で始まる $J(t') = (J_1(t'), J_2(t'), \dots, J_6(t'))$ の軌跡は、ずっと領域 D に留まる。そして定常点 J^* は軌跡の中心点である。

次に僅かな揺らぎが別の定常状態 $J_0 = (0, 0, 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ($\omega_n = 0$ でない定数 ($n=1, 2, 3$)) に加えられた場合について考えてみよう。もし定常状態 J_0 が安定ならば J_0 近傍から出発した $J(t')$ の軌跡は徐々に J_0 へ収束してゆくと考えられる。それ故、linear stability theory¹⁰⁻¹¹⁾ を用いて、定常状態 J_0 の安定性を調べてみよう。定常点 J_0 からの僅かな揺らぎを δJ とすれば (これは定常点に付け加えられた僅かな摂動である)、 δJ は線形近似の範囲内で以下の式を満たす。

$$\frac{d}{dt'} \delta J = A \delta J \quad (8)$$

ここで、行列 A の要素 A_{ij} は以下のように表される。

$$A_{ij} = \left[\frac{\partial}{\partial J_j} f_i \right]_{J_0} \quad (9)$$

ただし $\delta J = (\delta J_1, \delta J_2, \dots, \delta J_6)$ 。

もし行列 A の固有値の実数部がどれか一つが正であれば、定常点 J_0 は不安定であることが判っている。それ故 (9) 式で定義される行列 A の固有値 λ を調べなければならない。固有値 λ を決める方程式は次式で表される。

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & m\omega_1 & & \\ m\omega_2 & -\lambda & 0 & & 0 \\ 0 & m\omega_3 & -\lambda & & \\ & & & -\lambda & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & -\lambda & 0 \\ & & & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

(10) 式で行列 E は単位行列である。これより固有値 λ は容易に求められ、以下のようになる。

$$\lambda = 0 \quad (\text{三重根})$$

$$\lambda = m^{\frac{1}{3}} \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad \text{and} \quad \lambda = m^{\frac{1}{3}} \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right) \quad (11)$$

ところで式 (11) で $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \neq 0$ のためどれか一つの $\text{Re}(\lambda)$ は正であり、定常点 J_0 は不安定であることが判る。更に $\text{Re}(\lambda)$ は、 m に比例するため、定常点 J_0 からのずれは、 m が大きくなるにつれて増大する。即ち定常点 J_0 からの非常に僅かな揺らぎでも m が大きければ、容易に増幅される。

図 2 (A) (B) (C) は $m=0.1, 0.5$ 及び 1 の場合の $I'_n(t')$ ($n=1, 2, 3$) を示したものである。初期条件は $I'_1(0)=0.0, I'_2(0)=0.0, I'_3(0)=10^{-7}, \Omega'_1(0)=-2, \Omega'_2(0)=2, \Omega'_3(0)=1$ である。これは定常状態 J_0 に非常に僅かな揺らぎ ($10^{-7}A$) が $t'=0$ に於いて加えられた事を意味する。図を見て判るように m が大きくなるにつれて系に加えられた僅かな揺らぎでも大きく増幅され、やがて不規則振動を呈するようになる。これは定常点 J_0 に生じたきわめて僅かな擾乱も m が大きければすぐに拡大される事を意味し、熱平衡状態における揺らぎの挙動とは対照的である。また、 m の値が大きくなるにつれ振動の度合いが激しくなる。即ち高い振動数を有する成分が生じてくる。

数学的にみれば、 m の値が大きくなるにつれ振動の度合いが激しくなるということは次の様にして理解できる。まず次式で定義される無次元化された時間 t'' を導入する。

$$t'' = mt'$$

すると方程式 (4)' は次のように書ける。

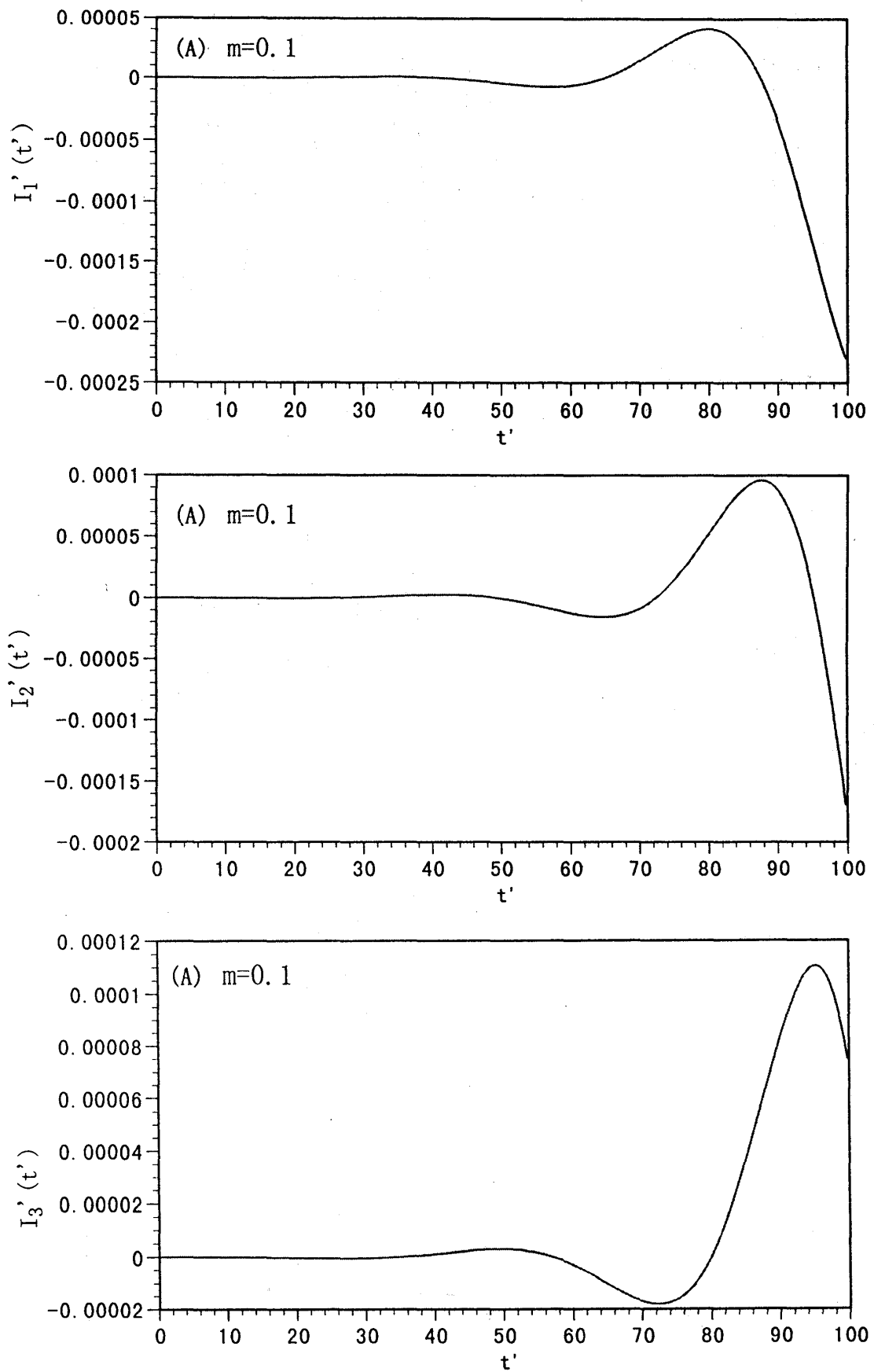


図 2 (A) $m=0.1$ に於ける $I_1'(t')$, $I_2'(t')$ 及び $I_3'(t')$

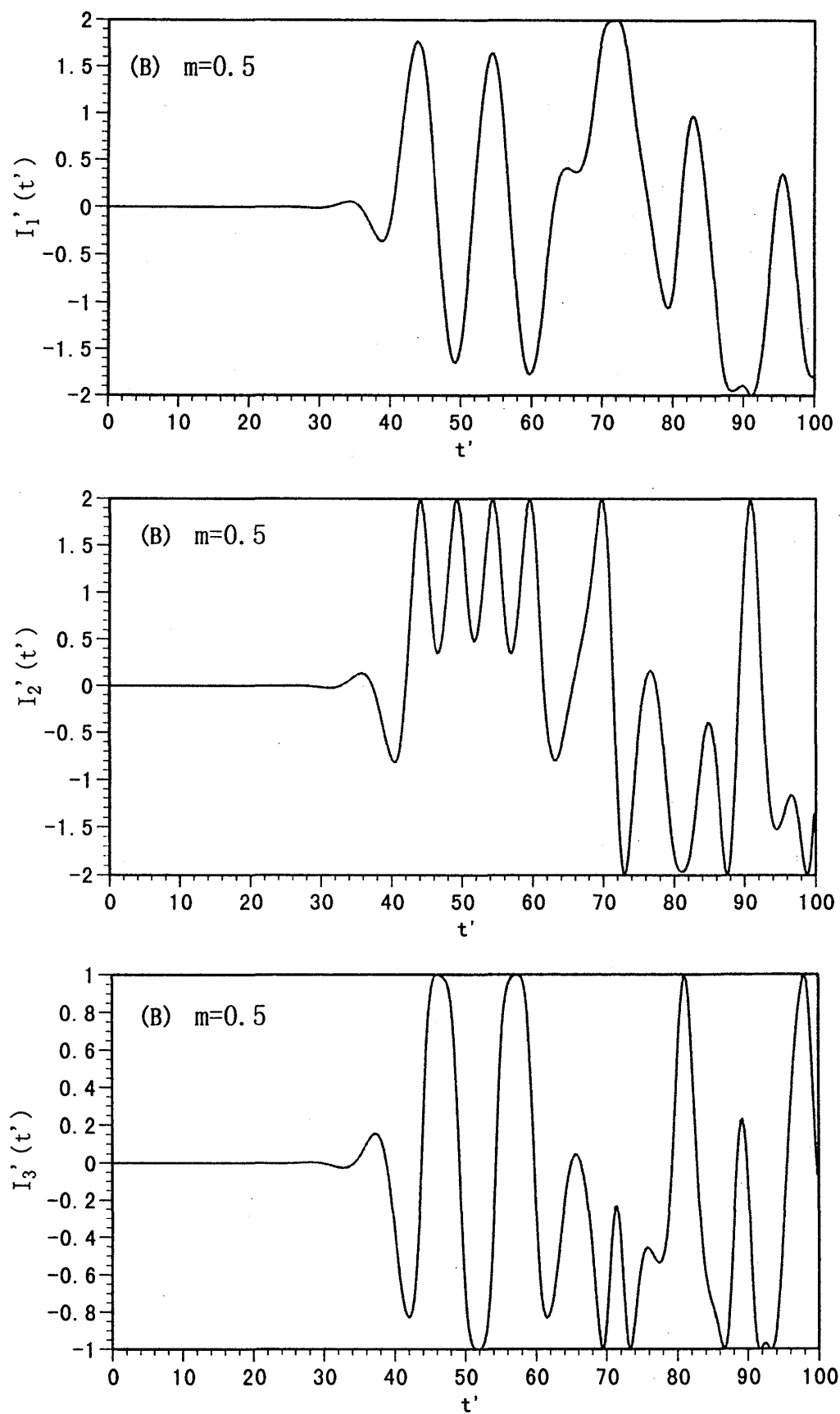


図 2 (B) $m=0.5$ に於ける $I_1'(t')$, $I_2'(t')$ 及び $I_3'(t')$

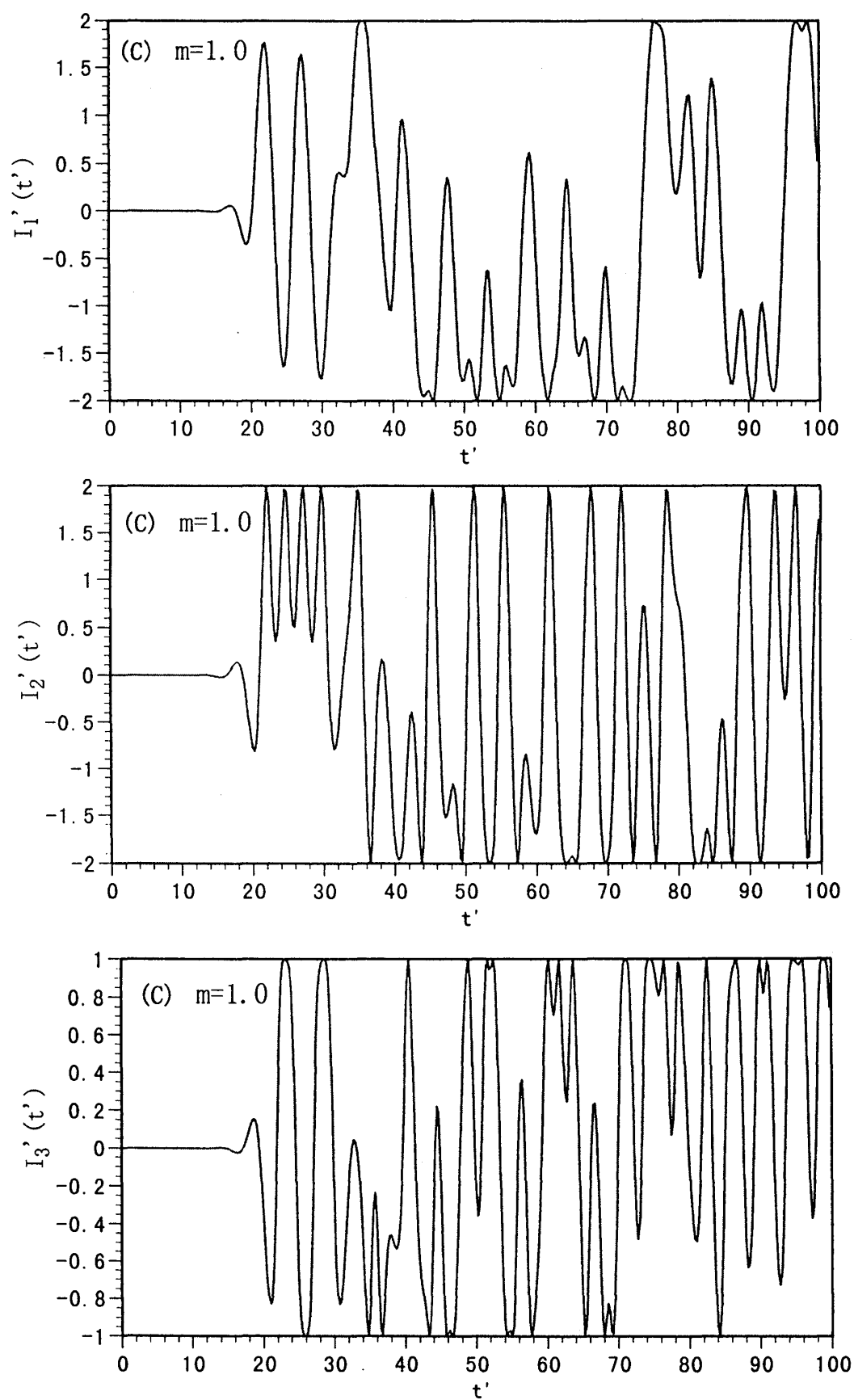


図 2 (C) $m=1.0$ に於ける $I_1'(t'), I_2'(t')$ 及び $I_3'(t')$

$$\frac{d}{dt''} I'_n(t'') = \Omega'_n(t'') I'_{n-1}(t'') \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt''} \Omega'_n(t'') = -I'_n(t'') I'_{n-1}(t'')$$

上式より、 t'' が 0 から 1 までの I'_n 及び Ω'_n の挙動は t' が 0 から $1/m$ までの挙動に対応する。それ故、 m の増加に伴う高周波成分の増加は時間軸の収縮によるものと解釈できる。 m は時間軸の伸張 ($m < 1$) および収縮 ($m > 1$) をあらわす scale factor である。図 3 に模式的にこのことを示す。

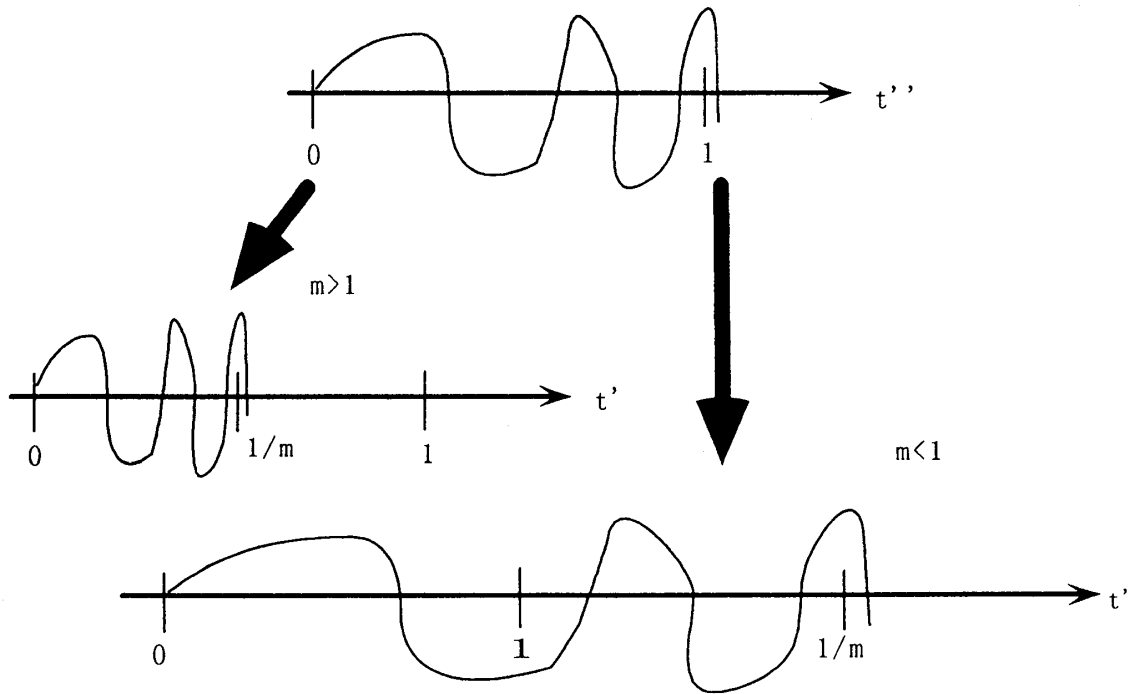


図 3 m の値による時間軸の伸張及び収縮

以上の議論を基に、 $I'_n(t'; m, J(0))$ 及び $\Omega'_n(t'; m, J(0))$ を方程式 (4)' の解とすれば、次のような関係が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} I'_n(t'; m, J(0)) &= I'_n(mt'; 1, J(0)) \\ \Omega'_n(t'; m, J(0)) &= \Omega'_n(mt'; 1, J(0)) \end{aligned} \quad (13)$$

よって一般化された形として

$$J_n(t'; m, J(0)) = J_n(mt'; 1, J(0)) \quad n = 1, 2, \dots, 6 \quad (13)'$$

それ故、正確な $J_n(t'; 1, J(0))$ が求まれば、(13)' より $J_n(t'; m, J(0))$ は解析的に求めることが出来る。これは $J_n(t'; m, J(0))$ が $J_n(t'; 1, J(0))$ をある意味で周波数変調 (FM) して得られることを意味している。

前述したように定常状態に生じた非常に僅かな揺らぎでも m が大きければ容易に増幅され、やがて不規則振動を呈するようになる。また対照的に m が小さければ、ゆらぎはなかなか増幅されなく定常状態は安定であるように見える。これは数学的に考えれば m が大きければ時間軸の収縮のため高周波成分が出現し、また m が小さくなると時間軸の伸長することで、揺らぎの増幅が遅くなる。

では、これらの議論を基に揺らぎの増幅という観点から地磁気反転を考えてみよう。図 4 は、170 Ma までの地磁気反転パターンを示したものである (after COX, 1982)¹²⁾。図をみて判るように、現在からおおよそ 25 Ma までは、地磁気の反転間隔が短い。これは高周波成分によるものであり、数学的には m が大きいことに対応する。しかし反転間隔は、25 Ma から 83 Ma にかけて緩和しているように思われ、 m の値が小さくなっていることに対応している。そして Cretaceous Superchron に至る。更に注目すべき事として、Cretaceous Superchron に前後して比較的長い間 (4 から 6 myr) 地磁気反転が生じない期間があることである。これらの期間の存在により、反転プロセスが Cretaceous Superchron 前後は緩やかであると思われる。それ故、地磁気反転プロセスは全くのランダムではなく、むしろある秩序性を有していると考えられる。

揺らぎの増幅という観点から考えると、Cretaceous Superchron のような極めて長い期間 (約 3500 万年) 地磁気が反転しないということは、この期間、揺らぎの成長が極めて緩やかであると考えられる。この期間は、一見すると極めて安定であるように思われるが、揺らぎは極めてゆっくりと成長しているように思われる。前述した linear stability theory によれば、揺らぎはおおよそ $\exp(C_0 m t)$ (C_0 は正の定数) に比例する。それ故もし m の値が、 $1/10$ 程度になれば、揺らぎの成長は極めてゆっくりであると予想できる。重要なのは、Cretaceous Superchron の存在が決して磁氣的に安定な平衡状態に達した期間ではなく、不安定な状態ではあるが、揺らぎの成長が極めて緩慢な期間として特徴づけられるのではないかという点である。Cretaceous Superchron は熱平衡下における揺らぎの生成消滅として捉えるのではなく、揺らぎの成長が極めて緩やかな期間として位置づけられると推察しうる。換言すれば Cretaceous Superchron は、disk dynamo model において、非常に小さい m によって誘起された期間の長い潜伏期間と考えられる。

それ故、地磁気反転を現象論的に表そうと思えば相互インダクタンスに時間依存性を盛り込まなければならない。それ故 m を、 $m(t')$ と見なさなければならず、当然方程式 (4)' は、以下のように表される。

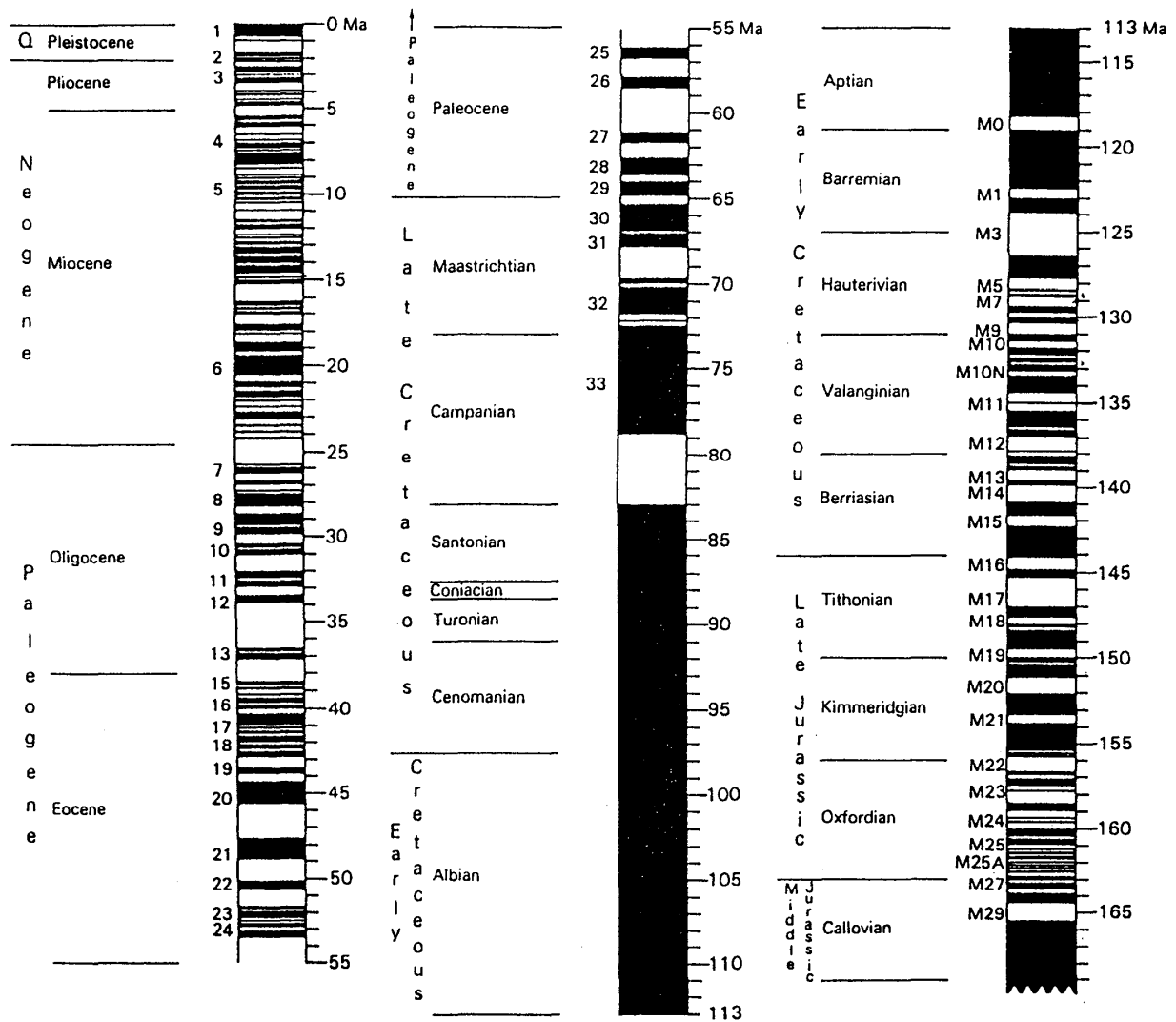


図4 地磁気反転パターン (Cox^{1 2}) による)

■Normal □Reversed

$$\frac{d}{dt'} I'_n(t') = m(t') \Omega'_n(t') I'_{n-1}(t') \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt'} \Omega'_n(t') = -m(t') I'_n(t') I'_{n-1}(t').$$

ここで、次のように定義される新しい変数 τ を、導入する。

$$\tau = \int_0^{t'} m(x) dx \quad (15)$$

すると方程式 (14) は、(12) と同じタイプの方程式に還元できる。よって式 (14) の解を $I'_n(t'; m(t'), J(0))$ 及び $\Omega'_n(t'; m(t'), J(0))$ とすれば、

$$\begin{aligned} I'_n(t'; m(t'), J(0)) &= I'_n(\tau; 1, J(0)) = I'_n\left(\int_0^{t'} m(x) dx; 1, J(0)\right) \\ \Omega'_n(t'; m(t'), J(0)) &= \Omega'_n(\tau; 1, J(0)) = \Omega'_n\left(\int_0^{t'} m(x) dx; 1, J(0)\right) \end{aligned} \quad (16)$$

これは、 $I'_n(t'; 1, J(0))$ 及び $\Omega'_n(t'; 1, J(0))$ が求まれば、(14) 式の解を解析的に得ることが出来ることを示している。別の見方をすれば、上式は、 $I'_n(t'; 1, J(0))$ 及び $\Omega'_n(t'; 1, J(0))$ を周波数変調 (FM) すれば、(14) 式の解 $I'_n(t'; m(t'), J(0))$ 及び $\Omega'_n(t'; m(t'), J(0))$ を得ることが出来るということを示している。現象論的には、不規則振動の周波数変調によって地磁気反転パターンが得られることを意味している。よって図 3 に示した地磁気反転パターンを満たす $m(t')$ を求める操作は FM 波から音声信号を取り出すことに対応していると思われる。

次に disk dynamo model と地球内部との対応について考えてみよう。前にも述べたとおり disk dynamo model による解釈は、あくまでも現象論的なものであり、地球の内部構造と明確な対応はなしていない。しかしながら地球内部現象を正確に捉える場合にも、disk dynamo model から得られる結論は示唆的であり、且つ有効性があると考えられる。これは強磁性体におけるワイスの分子場近似が 一勿論 disk dynamo model と同じく、ワイスの分子場近似は現象論的な取り扱いだが— ハイゼンベルグの交換相互作用の提唱に先だって提案され、磁性物理学の発展に重要な役割を、果たしたのをみれば判る。

地球内部との明確な対応がない以上ははっきりしたことは言えないが、何らかの相互作用が存在し、これが時間と共に変化して図 4 にみる地球磁気の複雑な反転パターンを形成するのではないだろうか。たとえば一例として、地球の核には幾つかの対流セルが存在する仮定しよう。その対流セルの一つ一つが disk dynamo model における disk に対応しているとすれば、 m は対流セル間の相互作用の大きさに対応すると思われる。この仮定に立脚すれば、

Cretaceous Superchron の期間において対流セル間の相互作用は極めて小さいと考えられる。それとは対照的に今からおおよそ 2500 万年前までは、対流セル間の相互作用は大きかったものと思われる。McFadden と Merrill らによると白亜期には外核とマントルとの界面温度が高い可能性があるとの指摘もあり¹³⁾、これが対流セル間どうしの相互作用を小さくしているのかもしれない。しかしながらこれら地球内部の記述についてはあくまでも disk dynamo model からの推察であり、更なる測定及び研究が望まれるところである。

【結論】

我々は 3-disk dynamo model において相互インダクタンスに時間依存性を有する場合について、数値計算及び解析的なアプローチを通じて地磁気反転との対応を試みた。このような相互作用が時間依存性を示す系においては、以下のことが明らかになった。

- (1) 隣接する disk との相互作用が大きい場合 (m が大きい事に対応する)、系に生じた非常に僅かな揺らぎも極めて短時間に成長する。対照的に相互作用が小さい場合 (m が小さいことに対応する)、系に加えられた揺らぎは非常に長い時間をかけて成長する。このような非常にゆっくりとした揺らぎの成長プロセスは一見すると、平衡状態と非常に似ているものの、熱平衡下で生じる揺らぎの生成・消滅とは本質的に異なり、非平衡状態であり、時間的にゆっくりと推移しているにすぎない。
- (2) 地磁気反転パターンとの類推より、現在から約 2500 万年の期間は、僅かな揺らぎでも非常に大きく増幅されると考えられる。一方 Cretaceous Superchron のように地磁気が極めて長い時間反転しないという事は、この期間、揺らぎの成長の極めて遅いと考えられる。それ故地球磁気反転プロセスを現象論的に説明しようと思えば、相互インダクタンスに時間依存性がなければならない。これは m を $m(t')$ に置き換えることに対応する。
- (3) 数学的に考えると相互作用が大きいことは、時間軸の短縮に相当し一方相互作用が小さいことは時間軸の伸張に対応する。相互作用に時間依存性が存在する場合の解は、時間依存性のない場合について得られた解の周波数変調によって得られる。これは現象論的には、不規則振動の周波数変調によって地磁気反転パターンが得られることを示している。

文献

- 1) Rikitake, T., *Proc. Cambridge Philos. Soc* **54** (1958) 89
- 2) Allan, D. W., *Proc. Cambridge Philos. Soc* **58** (1962) 671
- 3) Cook, A. E. and P. H. Roberts, *Proc. Cambridge Philos. Soc* **68** (1970) 547

- 4) Kono, M., *Geophys. Res. Lett.*, **14** (1987) 21
- 5) Hoshi, M and M. Kono, *J. Geophys. Res.*, **93** (1988) 11643
- 6) Shimizu, M. and Y. Honkura, *J. Geomag. Geoelectr.*, **37** (1985) 455
- 7) Lebovitz, N. R., *Proc. Cambridge Philos. Soc* **56** (1959) 154
- 8) Miura, T. and T. Kai, *Phys. Lett.*, **101A** (1984) 450
- 9) Merrill, R. T. and P. L. McFadden, *J. Geophys. Res.*, **100** (1995) 317
- 10) Saarty, T. and J. Bram, *Nonlinear Mathematics*, McGraw-Hill Book, New York, 1964.
- 11) Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*, Van Nostrand, Princeton, 1962
- 12) Cox, A., Magnetostratigraphic time scale, in *A Geologic Time Scale*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982
- 13) McFadden, P. L. and R. T. Merrill, *J. Geophys. Res.*, **89** (1984) 3354