

p 群と corestriction algebras

北大理学部 池田 正 (Tadashi Ikeda)

M. Broué, L. Puig は誘導加群を環論的に一般化して corestriction algebra を導入し、いくつかの応用を与えている ([2], [5])。これらの基礎は M. Broué によるイリノイ大の講義としてまとめられているが、邦語では澤島 [6] による簡潔な紹介がある。ここでは次の誘導加群と block に関する D. Barry の結果 (定理 2.1) を corestriction algebra にまで拡張することを目標とする。

1. interior G -algebra と corestriction algebra

記号は以下の通りとする。

$(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$: complete discrete valuation ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$

$k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$: characteristic $p > 0$

$R = \mathcal{O}$ または k

$B(e)$: G の p -block e の central primitive idempotent

$D(B)$: B の defect group

定義 A を有限生成 R -algebra とし、 R -algebra homomorphism $f: RG \rightarrow A$ が与えられた時、 $A_f \in$ interior G -algebra とする。

定義 $B_f \in$ interior RH -algebra (但し $H \leq G$) とした時、

$$A = RG \otimes_{RH} B \otimes_{RH} RG$$

$$(積) (g_1 \otimes e \otimes g_2^{-1})(g'_1 \otimes e' \otimes g_2'^{-1}) = \begin{cases} 0 & g_2 H \neq g'_1 H \text{ のとき} \\ g_1 \otimes e \cdot f(g_2^{-1} g_1) e' \otimes g_2'^{-1} & g_2 H = g'_1 H \text{ のとき} \end{cases}$$

$$f_H^G(x) = \sum_{g \in [G/H]} xg \otimes 1 \otimes g^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } g_1, g_2, g'_1, g'_2, x, e, e' \in G \\ [G/H] \text{ は } G \text{ の } H \text{ に対する left unit の代表系} \end{array} \right)$$

とおくと interior G -algebra を作る、これを B_f の corestriction algebra とする ($\text{Cor}_H^G B, f_H^G$) と記す。

interior G -algebra, corestriction algebra の性質は澤島 [] にゆずるが、加群との関係は、それは丁度、 M を RG -加群としたとき、 $A = \text{End}_R(M)$

$f: RG \rightarrow \text{End}_R(M)$: 表現とおくと A_f は interior G -algebra になり

$H \leq G$ に対して $M \in RH$ -加群とし、 $\text{Cor}_H^G(\text{End}_R(M))$ f_H^G が、

$\text{End}_R(M^G)_{f'}$ (f' は M^G の表現) と同型となることである (例 example 3)

なおその他の記号は澤島 [6] に従い次の様にする。

$A_f \in$ interior G -algebra としたとき

$$H \leq G \text{ に対し } A^H = \{a \in A \mid f(h^{-1})a f(h) = a \text{ for } \forall h \in H\}$$

$$H \leq K \leq G \text{ に対し } \text{Tr}_H^K: A^H \longrightarrow A^K$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a \longmapsto \sum_{R \in [H \backslash K]} a^R = \sum_{R \in [H \backslash K]} f(h^{-1})a f(h)$$

$\text{Tr}_H^k(A^H) = A_H^k$ とし、 A_H^k は A^k の両側 ideal になる。

$P \leq G$: p -部分群 とし、 $I^P(A) = \sum_{0 \neq p} A_p^P + \sum A^P$ とすると
 $I^P(A)$ は A^P の両側 ideal となる。この時、標準写像

$$A^P \longrightarrow A^P / I^P = A(P)$$

を Br_P で表し、 P による Brauer homomorphism と呼ぶ。

$H \leq G$ とし、 $B_P \in \text{interior } H\text{-algebra}$ とし、 $A = \text{Cor}_P^G B$ とする。

今、 $g, g' \in G$ に対し $e_{gg'} = g \otimes 1 \otimes g^{-1}$ で表すと、

$$\{e_{gg'} \mid g, g' \in [G/H]\}$$

は A の K -基底 をなし、 $g, g', h, h' \in [G/H]$ に対し

$$e_{gg'} \cdot e_{hh'} = \delta_{g'h} e_{gh'} \quad (\delta_{g'h} : \text{Kronecker の記号})$$

が成立する。

以下、interior algebra, corestriction algebra のいくつかの性質を述べておく。

(1-1) $H \leq G$ で、 $B_P, B_{P'}$ を 2つの interior H -algebras と

$\ker P \subset \ker P'$ が成立すると仮定すると $\ker P_H^G \subset \ker P_H'^G$ が成立する。更に P が injection ならば P_H^G も injection になる。

(証明) 以下、 G の元 g に対し、 $g = \bar{g}g$ ($\bar{g} \in [G/H]$, $g \in H$) と表すことにする。今 RG の元 $x = \sum_{g \in G} a_g g$ が $P_H^G(x) = 0$ を満たしていると仮定する。定義に任せて次の式が成立する。

$$\begin{aligned} P_H^G(x) &= \sum_{g \in [G/H]} \sum_{h \in [G/H]} \left(\sum_{g \in H} a_{ghg} P(g h g) \right) P \bar{g} h g \\ &= 0 \end{aligned}$$

とこより、 $g, h \in [G/H]$ に対し $e_{gh} \cdot g$ はすべて異なっているから、 $\text{Cor}_H^G B$ の基底となる。よってすべての $g, h \in [G/H]$ に対し

$$\sum_{y \in H} a_{ghy} \cdot p'(ghy) = p\left(\sum_{y \in H} a_{ghy} \cdot gh \cdot y\right) = 0$$

が成立し $\ker p \subset \ker p'$ となり

$$\sum_{y \in H} a_{ghy} \cdot p'(ghy) = 0$$

となり、逆に $x \in \ker p'$ ならば $p'(x) = 0$ がいえ証明される。||

次の例も後に利用される

(1-2) $P \triangleleft G$: P -群, $p_0: RP \rightarrow R$: augmentation map とし、

$(\text{Cor}_P^G R, p_0^G)$ を作る。 RG の任意の centrally primitive idempotent e に対し $p_0^G(e) \neq 0$ とする。

(証明) $(\text{Cor}_P^G R)^G \cong R[G/P]$ となり、natural map $G \rightarrow G/P$ から作られる RG から $R[G/P]$ への準同型 π とすると上の同型を通して

$$\pi|_{Z(RG)} = p_0^G|_{Z(RG)}$$

が成立する。一方 $\ker \pi \subset J(RG)$ より容易に示される。||

定義 $A_P, A_{P'}$ を interior G -algebras とし、 A^G の中等元 e' に対し、

$$\begin{array}{ccc} p^{e'}: RG & \longrightarrow & e'A'e' \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & e'p'(x) \end{array}$$

とすると $(e'A'e', p^{e'})$ は再び interior G -algebra となる。ここで

$A_P \times (e'A'e')_{p^{e'}}$ が同型な時、 A_P は $A_{P'}$ に direct embed されていると呼ぶ。

定義 $A \in \text{interior } G\text{-algebra}$ とし, $\sigma \in \text{Aut}(G)$ とする. この時

$$\cdot A^\sigma = A \quad (\text{基礎の algebra は同じ})$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot p^\sigma: RG & \longrightarrow & A^\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \longrightarrow & \pi(g^{\sigma^{-1}}) \end{array}$$

とすると新しい interior G -algebra (A^σ, p^σ) が定義される.

次の2つの補題は容易に示される

(1-3) $A_1, A_{1,1}, A_{2,2} \in$ 3つの interior G -algebras とし, $\alpha_i \in A_1 \in A_{1,1}$ 内に direct embed する homomorphism ($i=1,2$) とする. この時 A_1^G 内に原始中等元 e_1 , A_2^G 内に原始中等元 e_2 があって, e_1, e_2 のそれぞれの defect group ([6] の [1.8] 参) は同じである.

(1-4) $A \in \text{interior } G\text{-algebra}$, $\sigma \in \text{Aut}(G)$ としたとき, $A^G = (A^\sigma)^G$ となり, A^G の原始中等元 e に対し e の $(A^\sigma)^G$ 内での defect group は $D \in e$ の defect group とし, D^σ となる.

2. p -群と corestriction algebras

1. の準備を用いてこの小論の目標である D. Burry の結果の拡張とその証明をこの節で与える.

定理 2.1 (D. Burry) $P \in G$ の p -部分群, $U \in \text{vertex}$ が P となる直既約 KG -加群と仮定する. この時 defect group が $P \in$ 含む G の任意の block B に対し U^G の直既約直和因子で B に属し U vertex が P となるものが存在する.

これを corestriction algebra に拡張すると次の様になる

定理 2.2 $P \in G$ の P -部分群. B_P は interior P -algebra とし. B^P は local で. B^P の原始巾等元 1 の defect group は P と仮定する. この時. B_P の corestriction algebra $\in (\text{Corp}^G B, p_P^G)$ とし. defect group が P を含む任意の RG の centrally primitive idempotent e に対し $p_P^G(e) \neq 0$ となり. 更に $p_P^G(e) = f_1 + f_2 + \dots + f_r$ と $(\text{Corp}^G B)^G$ 内で直交原始巾等元分解をすると. ある f_i に対し f_i の defect group は P となる.

証明は次の形に書き直しておこう

定理 2.3 定理 2.2 の仮定のもとで. corestriction algebra $(\text{Corp}^G B, p_P^G)$ の P に依る Brauer homomorphism $\in \text{Br}_P: (\text{Corp}^G B)^P \rightarrow (\text{Corp}^G B)(P)$ とし. defect group が P を含む任意の RG の centrally primitive idempotent e とすると $\text{Br}_P \circ p_P^G(e) \neq 0$ が成立する.

((2.2) と (2.3) の同値性の証明) Brauer homomorphism による defect group の特徴付け ([6] の (1.8)) と Higmann の criterion の corestriction algebra への拡張 ([1] Ch II (2.7)) を用いて容易に示される. $\square$

以下 (2.3) をまず $P \triangleleft G$ の場合とし. 一般の場合を証明する. そのため (2.3) の証明が完結するまで次の記号を用いることにする.

P : G の P -部分群.

B_P : interior P -algebra で Th 2.2 の仮定を満たしているもの

$(A, p_P^G) = (\text{Corp}^G B, p_P^G)$: B の corestriction algebra

e : defect group が P を含む RG の centrally primitive idempotent.

$\text{Br}_P: A^P \rightarrow A(P)$: (A, p_P^G) の Brauer homomorphism

(2.4) $P \triangleleft G$ とし, $f \in A^G$ の原始中等元とすると, f の defect group は必ず P となり 特に $\text{Brp}(f) \neq 0$ となる.

(証明) $A = \text{Corp}^G B$ 内にて $e_{11} = 1 \otimes 1 \otimes 1$, $p_p^G(g) e_{11} p_p^G(g) = e_{11}^g$ と記すと $P \triangleleft G$ より $e_{11}^g \in A^P$ ($g \in G$) が成立する. 更に e_{11} が A^P の原始中等元より e_{11}^g も A^P の原始中等元となる. (1.4) を用いて e_{11}^g の A^P 内の defect group は P となる. 次に f の defect group を D とおくと, 容易に $D \leq P$ がいえる. 今 $|D| \neq |P|$ と仮定する. $f \in A^G \subset A^P$ より f は A^P 内で直交原始中等元分解すると, この分解内には A^P 内の defect group が D となるものが現れる. 一方 A^P の原始中等元の defect group はすべて P となるからこれは $|D| \neq |P|$ に矛盾する. //

(2.5) $P \triangleleft G$ のとき定理 2.3 は正しい.

(証明) diagram $\text{REG}^G \xrightarrow{p_p^G} A^G \xrightarrow{\text{Brp}} A(p)$ において,

$\text{Brp} \circ p_p^G(e) \neq 0$ を示せばよい. (2.4) より $p_p^G(e) \neq 0$ を示せばよい.

と示すか (1.2) (1.1) を用いると, $p_p^G(e) \neq 0$ が示される. //

次に一般の場合を示すが, 次の補題は Green の transfer 定理の類似で有益である.

(2.6) (Green [4] 参照) $N = N_G(P)$ とし, B_P の corestriction algebra $(\text{Corp}^N B, p_p^N) \in (\tilde{A}, p_p^N)$ と記すことにする. このとき, interior N -algebra として, $A(p)$ と $\tilde{A}(p)$ は同型になり 特に $A(p)^N$ と $\tilde{A}(p)^N$ は algebra として同型になる.

(証明) A^G 内にて 1 を次のように直交原始中等元分解する

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_r + e_{r+1} + \cdots + e_n$$

但し,

$$e_i \text{ の defect group (Dier)} \quad \begin{cases} \cong P & i=1, 2, \dots, r \\ \not\cong P & i=r+1, r+2, \dots, n \end{cases}$$

$A^G \subset A^N$ より e_i を更に A^N 内で直交原始中等元分解してよく,

$$e_i = f_{i1} + f_{i2} + \cdots + f_{in_i}$$

[6] 1.9 の論法を用いて, $1 \leq i \leq r$ に対して,

“ f_{i1} の defect group が P かつ f_{ij} の defect group が P ではない”

小さい ($j=2, 3, \dots, n_i$) ”

と仮定してよい. すると

$$f = f_{11} + f_{21} + \cdots + f_{r1}$$

とおくと f は A^N の中等元となり $1-f \in I^P(A) = \sum_{Q \leq P} A_Q^P + mAP$ となる.

一方 $fAf \oplus fA(1-f) \oplus (1-f)Af \oplus (1-f)A(1-f) = A$ より上のことを

$$fAf(P) \cong A(P) \quad (\text{interior } N\text{-algebra として})$$

が示される. 一方 $\tilde{A}^N$ 内で 1 は直交原始中等元分解する.

$$1 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{f}_s + \tilde{f}_{s+1} + \cdots + \tilde{f}_m$$

$$\text{但し, } \tilde{f}_i \text{ の defect group (Dier)} \quad \begin{cases} \cong N^P & i=1, 2, \dots, s \\ \not\cong N^P & i=s+1, \dots, m \end{cases}$$

全く同様にして, $\hat{f} = \tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_s$ として

$$\hat{f}\tilde{A}\hat{f}(P) \cong \tilde{A}(P) \quad (\text{interior } N\text{-algebra として})$$

が成立する.

今 $(A, P_P^G) \in N$ に制限したものを $(\text{Res}_{\mathbb{R}}^G A, (P_P^G)_N)$ とする. また

A 内で $e_{gg'} = g \circ 1 \circ g^{-1}$ ($g, g' \in [G/p]$) を考え、 $\tilde{A}$ 内で $\tilde{e}_{gg'} = g \circ 1 \circ g^{-1}$ ($g, g' \in [N/p]$) を考える。

$$\beta: \tilde{A} \longrightarrow \text{Res}_N^G A$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{e}_{gg'} & \longmapsto & e_{gg'} \end{array} \quad (g, g' \in [N/p])$$

とすると、 β は $(\tilde{A}, P_P^N) \in (\text{Res}_N^G A, U_P^G)_N$ へ direct embed. する。

更に、 $\beta(1) = \text{Tr}_P^N(e_{11})$ 、 $\beta(\tilde{f}) = f$ が成立して、 $(\tilde{f} \tilde{A} \tilde{f}, U_P^N)^{\tilde{f}}$ と $(f A f, (U_P^G)^f)$ は internal N -algebra として同型になる。よって完全に証明された。

この補題を用いて一般の場合の定理 2.3 を証明する。

(定理 2.3 の証明) G における P による通常の Brauer homomorphism を S とし、 $N = N_G(P)$ 、 $C = C_G(P)$ とする。このとき定義より次の homomorphism P_P が存在する。

$$\begin{array}{ccc} R[G]^P & \xrightarrow{P_P^G} & A^P \\ \downarrow S & \circlearrowleft & \downarrow \text{Br}_P \\ R[C]^N & \xrightarrow{P_P} & A(P)^N \end{array}$$

同様に次の diagram も作れる

$$\begin{array}{ccc} R[N]^P & \xrightarrow{P_P^N} & \tilde{A}^P \\ \downarrow S & \circlearrowleft & \downarrow \text{Br}_P \\ R[C]^N & \xrightarrow{\tilde{P}_P} & \tilde{A}(P)^N \end{array}$$

とすると (2.6) の $A(P)^N$ と $\tilde{A}(P)^N$ との同型写像を β とおくと、

2 の diagram が可換になる。

$$\begin{array}{ccc}
 R[G]^G & \xrightarrow{f_p^G} & A^G \\
 \downarrow s & & \downarrow \text{Br}_p \\
 R[G]^N & \begin{array}{c} \nearrow p_p \\ \searrow \tilde{p}_p \end{array} & \begin{array}{c} A(p)^N \\ \uparrow s^p \\ \tilde{A}(p)^N \end{array} \\
 \uparrow s' \downarrow z & & \uparrow \text{Br}_p \\
 R[N]^N & \xrightarrow{f_p^N} & \tilde{A}^N
 \end{array}$$

更に z を $R[G]^N$ から $R[N]^N$ への包含写像とすると $\text{Br}_p \circ z = \text{id}$ となる.

(2.5) より $\text{Br}_p \cdot p_p^N(e') \neq 0$. (但し e' は $R[N]^N$ の原始中等元) が成立する.

今 $e' = z \circ s(e)$ とおくと

$$\text{Br}_p p_p^N(e') \neq 0$$

より上の可換性から

$$\tilde{f}_p s(e) \neq 0$$

よって $f_p \cdot s(e) = \text{Br}_p p_p^G(e) \neq 0$ が示されて、完全に証明

された. //

3. 応用

1 で注意した interior G -algebra と KG -加群の関係を用いると、容易に、定理 2.2 から定理 2.1 を導くことができる. 更に K の商体 K が代数閉体の時、定理 2.2 はもう少し拡張することが出来る.

系 3.1 $\mathbb{K}$ の商体 K が代数的閉体とし、 $P \in G$ の p -部分群、 $B_P \in \text{interior } P\text{-algebra}$ で B^P が local、 B^P の原始巾等元 1 の defect group が $Q \leq P$ と仮定する。この時 B_P の corestriction algebra を $(\text{Cor}_P^G B, f_P^G)$ 、defect group が Q を含む任意の RG の centrally primitive idempotent e とすると、 $f_P^G(e) \neq 0$ となり更に $f_P^G(e) = f_1 + \dots + f_e \in (\text{Cor}_P^G B)^G$ 内で互に原始巾等元分解すると、ある f_i に対し f_i の defect group は Q となる。

(証明) Higmann の criterion の corestriction algebra への一般化と Green の定理の corestriction algebra への一般化 ([1] Ch II, 3.7 または [6] (2.9) 参) を用いてある interior Q -algebra B_P^Q で B^Q は local、 B^Q の原始巾等元 1 の defect group が Q となるものがある。 B_P は $(\text{Cor}_P^G B^Q, f_P^G)$ と interior P -algebra として同型になることがわかる。よって、 $(\text{Cor}_P^G B, f_P^G)$ と $(\text{Cor}_Q^G B^Q, f_Q^G)$ は interior G -algebra として同型になるから定理 2.2 が適用される。 //

従って、定理 2.1 を導いた方法と全く同様にして、次の系をえよ。

系 3.2 $\mathbb{K}$ の商体 K が代数的閉体とし、 P が G の p -部分群、 v は vertex が $Q \leq P$ となる直既約 RP -加群と仮定する。この時、defect group が Q を含む任意の G の block B に対し、 v^G の直既約直和因子で vertex が Q となりかつ B に属しているものが存在する。

更に系 3.2 に於いて、 $R \in K$ に係数拡大することによって、 KG -加群の場合へと拡張することができ次の系をえよ。

系 3.3 ϕ の商体 K が *splitting field* とし, $W \in$ 既約 KP -加群で $B \in$ defect group が $P \in$ 含む G の ϕ -ブロックとする. この時 WG の既約因子で B に属しているものが必ず存在する.

(参考文献)

- [1] M. Br  e , Illinois Univ. での講義録
- [2] M. Br  e and L. Puig , Character and local structure in G -algebras, J. Alg. 63 (1980), 306-317
- [3] D. Burry , The distributions of modular representations into blocks, Proc. of A. M. S. 78 (1980), 14-16
- [4] J. A. Green, A transfer theorem for modular representations, J. Alg. 1 (1964), 73-84
- [5] L. Puig , Sur theoreme de Green , Math. Z. 166 (1979) 117-129
- [6] 津島行男 , modular 表現の現状と問題, 数理研究究録 429 (1981), 22-36