

Semicharacteristic classes と 群 $O(48, k, l)$ について

北大理 神島芳宣

§ 1

球面に free に act する finite group を決定する問題において, Milnor は [1] の中で 3 次元球面 S^3 上に free に act するか否かの finite group を次のように分類した.

- a) 群 $Q(8n, k, l)$ n even $n \geq 2$ $k > l \geq 1$
- b) 群 $Q(8n, k, l)$ n odd $n > k \geq l$
- c) 群 $O(48, k, l)$ $l \not\equiv 0 \pmod{2}$ $l \not\equiv 0 \pmod{3}$.
- d) 群 $A \times \mathbb{Z}_l$ (A は上の任意の群で $(\text{ord } A, l) = 1$ をみたす).

このうち Milnor は c) の $l \neq 1$ の場合, S^3 に free に act しないことを示したが, その他については決定していない. その後 R. Lee は [2] において a) と c) について, S^3 (もっと一般に $8t+3$ 次元の mod 2 homology sphere) に free に act しないことを示したが, c) の場合の証明は $l=1$ の時は正しくない. (See [3]) 従って, ここで $O(48, k, l)$ のある subgroup を選ぶことに.

より, Lee の bordism invariant を使って $O(48, k, l)$ が $8t+3$ 次元の mod 2 homology sphere に free に act しないことを示す。

なお, 中岡氏は, 彼の定義した Equivariant Point Theorem の応用として, $O(48, k, l)$ が free に act しないことを示している ([4])

Lee の bordism invariant $\chi_{\frac{1}{2}}$ とは, finite group G の un-oriented bordism group $\mathcal{H}_{2n+1}(G)$ から標数 2 の有限体 K 上の G -representation のつくる Relative Grothendieck group $\widetilde{R}_{GL, ev}(G)$ への homomorphism $\chi_{\frac{1}{2}}: [G, M] \mapsto \chi_{\frac{1}{2}}(M; K)$ である。

この時, Lee は次のことを示した ([2], Th. 4.13)

$\mathbb{Z}_{2,p}$ (p : odd) を dihedral group とする時, $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2,p})$ の元 $[M]$ に対して, $\chi_{\frac{1}{2}}(M; K) = \widehat{\chi}([K] + [V_1] + \cdots + [V_{\frac{p-1}{2}}])$,

ここで, $\mathbb{Z}_{2,p}$ は, x, y が generate され, $x^2 = y^p = (xy)^2 = 1$ をみたすもの, $[K], [V_i]$ は $\mathbb{Z}_{2,p}$ の irreducible representation であり, $\widetilde{R}_{GL, ev}(\mathbb{Z}_{2,p})$ において, $\mathbb{Z}_2$ -basis をなす ($i=1, \dots, \frac{p-1}{2}$)

$\widehat{\chi}$ は, Kervaire semi-characteristic: $\widehat{\chi} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H_i(M; \mathbb{Z}_2) \pmod{2}$.

(Note, K は, $\mathbb{Z}_2$ に primitive p -th root of unity を付加した体 $\mathbb{Z}_{2,p}$ の splitting field となっている).

群 $O(48, k, l)$ ($l \not\equiv 0 \pmod{2}, l \not\equiv 0 \pmod{3}$) は, generator X, P, Q

R, A と次の生成関係をもつものである: $X^{3^k} = P^4 = A^l = 1$

$P^2 = Q^2 = R^2, PQP^{-1} = Q^{-1}, XPX^{-1} = Q, XQX^{-1} = PQ, RXR^{-1} = X^{-1}$

$$RPR^{-1}=QP, RQR^{-1}=Q^{-1}, AP=PA, AQ=QA, RAR^{-1}=A^{-1}$$

$$AX=XA.$$

§ 2.

定理 群 $O(48, k, l)$ ($l \not\equiv 0 \pmod{2}$, $l \not\equiv 0 \pmod{3}$) は
 $8t+3$ 次元の mod 2-homology sphere に free に
 act しない. ([2] の Cor. 4.17)

証明

1) $l \neq 1$ の場合. $\{X, P, Q\}$ によって generate される subgroup
 は, $T(8, 3^k)$ に isomorphic な $O(48, k, l)$ の normal subgroup であり
 その quotient group $O(48, k, l)/T(8, 3^k)$ は, dihedral group $Z_{2, l}$ に
 isomorphic である. ここで $T(8, 3^k)$ とは, x, y, z によって generate
 され, relation $x^2 = (xy)^2 = y^2$, $zxz^{-1} = y$, $zyz^{-1} = xy$, $z^{3^k} = 1$ ($k \geq 1$)
 をもつものである. (see [2] or [1]) また, $T(8, 3^k)$ の cohomology
 に関して, 次のことが知られている. $H^i(T(8, 3^k); \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (i \equiv 0, 3) \\ 0 & (i \equiv 1, 2) \end{cases}$
 (48 法, 2.12).

今, M を $8t+3$ 次元の mod 2-homology sphere とし, $O(48, k, l)$
 が free に act するとすれば, quotient manifold $M/T(8, 3^k)$ には
 natural に $Z_{2, l}$ が free に act する. $H_i(M; K) = H_i(M; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} K = 0$
 ($i < 8t+3$) より, vector space として, $H_i(M/T(8, 3^k); K) \cong H_i(T(8, 3^k); K)$
 ($i < 8t+3$).

従って,
$$H_i(M/T(8,3k); K) = \begin{cases} K & i \equiv 0, 3 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2 \pmod{4} \end{cases} \quad (0 \leq i \leq 8t+3)$$

$H_i(M/T(8,3k); K)$ には, $\mathbb{Z}_2$ が α として i 個 (homology の induce action に関して), 上のことより trivial であるから,

$$\begin{aligned} \text{Semi-characteristic } \chi_{\frac{1}{2}}(M/T(8,3k); K) &= \sum_{i=0}^{4t+1} (-1)^i [H_i(M/T(8,3k); K)] \\ &= [K] \end{aligned}$$

$$\hat{\chi} = \sum_{i=0}^{4t+1} \dim H_i(M/T(8,3k); K) \pmod{2} = 1 \quad \text{よって, [2] の Th. 4.13}$$

に反する. よって矛盾.

2) $k=1$ の場合 即ち $A=1$ の時. この時 $k \geq 2$ で

ある ($O(48, 1, 1)$ は, binary octahedral group でこれは free に act する (see, [1])) $\bar{X} = X^{3^{k-1}}$ とおくと, $\bar{X}^3 = 1$, $\bar{X}P = P\bar{X}$

$\bar{X}Q = Q\bar{X}$ をみたす. $O(48, k, 1)$ において $\{\bar{X}, P, Q, R\}$ によって generate される subgroup O' を考える. O' において $\{P, Q\}$ によって generate される subgroup は $Q(8)$ に isomorphic な O' の normal subgroup である. ここで $Q(8)$ は, binary dihedral group $\{x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^2\}$ となるものである.

また, quotient group $O'/Q(8)$ は $\mathbb{Z}_{2,3}$ に isomorphic である. 今,

$O(48, k, 1)$ が $8t+3$ 次元の mod 2-homology sphere M に free に act するとすれば, その subgroup O' は M に free に act し, quotient mani-

fold $M/Q(\mathcal{E})$ には, natural に $Z_{2,3}$ が free に act する. 前と同様

$$に, \quad H_i(M/Q(\mathcal{E}); K) \cong H_i(Q(\mathcal{E}); K) = \begin{cases} K & i \equiv 0, 3 \pmod{4} \\ K \oplus K & i \equiv 1, 2 \pmod{4} \end{cases} \quad (i < 8t+3) \\ \text{(see [5])},$$

- 又, $H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)$ は, $KZ_{2,3}$ -module であるから, $Z_{2,3} = \{[\bar{x}] = S, [\bar{x}] = T\}$ とおくと, $H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)$ には, $S_*: H_i(M/Q(\mathcal{E})) \rightarrow H_i(M/Q(\mathcal{E}))$ が act しているが, $\delta: Q(\mathcal{E}) \rightarrow Q(\mathcal{E})$ を $\delta(U) = \bar{x} \cup \bar{x}^{-1}, U \in Q(\mathcal{E})$ なる automorphism とすると, δ は classifying space への map $\delta: BQ(\mathcal{E}) \rightarrow BQ(\mathcal{E})$ を induce し, 上の同型対応で S_* に対応するものは, $\delta_*: H_i(Q(\mathcal{E}); K) \rightarrow H_i(Q(\mathcal{E}); K)$ である. ところが

$$\delta(P) = P, \delta(Q) = Q, Q(\mathcal{E}) = \{P, Q\} \quad \text{であるから,} \quad \delta = id$$

即ち, 対応する $S_* = id$ となる. よって $KZ_{2,3}$ -module $H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)$ において, S の作用は, trivial involution T に対しては,

$H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)$ の元 $x (\neq 0)$ で $T_*x = x$ なるものがあるから,

$$0 \rightarrow Kx \rightarrow H_i(M/Q(\mathcal{E}); K) \rightarrow H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)/Kx \rightarrow 0 \quad \text{より}$$

$$\text{Grothendieck group } R_K(Z_{2,3}) \text{ で, } [H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)] = [K] + [H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)/Kx]$$

$$\text{inductively に } [H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)] = \dim H_i(M/Q(\mathcal{E}); K) [K]$$

よって, Relative Grothendieck group $\widetilde{R}_{GL, ev}(Z_{2,3})$ において,

$$[H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)] = \dim H_i(M/Q(\mathcal{E}); K) [K] \pmod{2}. \quad \text{従って,}$$

$$\begin{aligned} \text{semi-characteristic } \chi_{\frac{1}{2}}(M/Q(\mathcal{E}); K) &= \sum_{i=0}^{4t+1} (-1)^i [H_i(M/Q(\mathcal{E}); K)] \\ &= \widehat{\chi} [K] \end{aligned}$$

$\hat{\chi} = \sum_{i=0}^{441} \dim H_i(MV_{\mathbb{Q}(K)}(K)) = 1$ より, $\hat{\chi}$ 値である.

証明終り.

References

- [1] J. Milnor : Groups which act on S^n without fixed points
Amer. J. Math. 79(1957) PP623-630
- [2] R. Lee : Semicharacteristic classes, Topology 12
(1973) PP183-199
- [3] 中岡 稔 : 群作用をもつ多様体のトポロジー
数理研講究録(1974) PP56.
- [4] 中岡 稔 : Groups which act freely on Manifolds, (to appear)
- [5] Cartan-Eilenberg: Homological Algebra, Princeton Press, PP.253.