

グラフの正方格子への単位長配置について

高田 健司*

天野 一幸†

1 はじめに

グラフ G の各頂点を格子に配置し (埋め込み), G の隣接する任意の 2 頂点について, 2 頂点の格子点での距離が 1 となる配置を単位長配置と呼ぶ. 単位長配置は VLSI のレイアウトなどに応用を持ち, その判定問題は入力を木に限定しても NP 完全であることが証明されている [1]. 本稿では単位長配置の別解問題 (ASP) の計算複雑性をテーマとし, 1-in-3 SAT からの多項式時間 ASP 還元を示すことにより, 木の単位長配置の ASP 完全性を証明する.

2 定義

2.1 単位長配置

グラフ G の頂点から整数値の二次元座標 (x, y) への単射 $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^2$ を, グラフの正方格子への配置と呼ぶ. $f(u) = (i, j), f(v) = (i', j')$ である $uv \in E(G)$ に, 距離関数 d による以下のコストを与える.

$$d(f(u), f(v)) = |i - i'| + |j - j'|$$

全ての辺のコストが 1 ($\mathbb{Z}^2$ 上の単位距離) である f を単位長配置と呼ぶ (図 1).

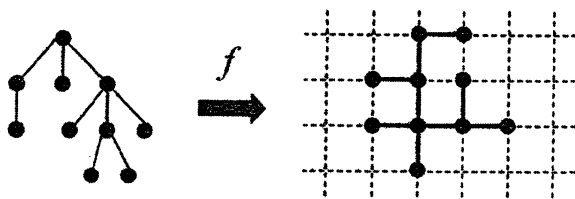


図 1: 単位長配置の例

単位長配置の関数問題を次のように定義する.

入力 グラフ G .

問題 G の単位長配置 f を求めよ.

配置 f_1 が配置 f_2 の平行移動・回転・対称で表せるとき, f_1 と f_2 を同じ配置とみなし, これらを同一解として扱う. また, 配置後のグラフはラベルなしグラフとして扱い, 同一の親を持つ葉の座標を入れ換えたものなどを同じ配置として扱う.

2.2 ASP

ASP (Another Solution Problem) とはある問題 Π のインスタンス I とその解 s が 1 つ与えられたとき, I の s 以外の解を求める問題である. 関数問題 Π とそのインスタンス I , 関数問題 Π' について以下の (1), (2) が成り立つとき, Π から Π' へ多項式時間 ASP 還元可能という [3].

- (1) Π の判定版から Π' の判定版への多項式時間還元 φ_D が存在する.
- (2) I の解集合から $\varphi_D(x)$ の解集合への多項式時間計算可能な全単射 φ_S が存在する.

クラス FNP (NP の関数版) の問題 Π が, クラス FNP の任意の問題 Π' から多項式時間 ASP 還元可能であるとき, 問題 Π を ASP 完全と呼ぶ [3]. ASP 完全に属する問題 Π から, FNP に属する問題 Π' へ多項式時間 ASP 還元可能であるとき, 問題 Π' の ASP 完全性が証明できる. ASP 完全である問題 Π の性質の 1 つとして, Π のインスタンス I とその解が k 個 ($k \geq 0$) 与えられたとき, I が与えられた k 個以外の解を持つかの判定が NP 完全であることが知られている.

3 木に対する ASP 完全性

本節で, 木の単位長配置の関数問題の ASP 完全性を証明する. 上記問題が FNP に属することは明らか

*群馬大学大学院工学研究科情報工学専攻

†第 1 著者に同じ

であり (解として各頂点の座標が与えられたとき, 解が正しいかのチェックが頂点数の多項式時間内で可能), 1-in-3 SAT からの多項式時間 ASP 還元を示すことによって ASP 完全性の証明を行う. 1-in-3 SAT とは与えられた 3CNF 式 ϕ に対して, 各節が真の値のリテラルを丁度 1 つ持つ割当てが存在するかどうかを判定する問題である. この問題の関数版が ASP 完全であることは Yato, Seta によって証明されている [3]. これ以降, 充足という言葉をも “1-in-3 SAT の条件での充足” という意味で使う.

はじめに, 小節 3.1 で還元後のグラフの大部分の部分を構成するスパイングラフについて説明する. 小節 3.2 では, ϕ の任意の節 C_j に対応する, グラフ G_{C_j} の構成を述べる. 小節 3.3 にて, 各 G_{C_j} の構造を変更・接続し, 任意の式 ϕ に対応するグラフ G_ϕ への還元を示す.

3.1 スパイングラフ

スパイングラフ L_k は以下の頂点と辺を持つ [1].

$$\begin{aligned} V(L_k) &= \{u_i, u'_i, u''_i \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{u_0, u_{k+1}\} \\ E(L_k) &= \{(u_i, u_{i-1}), (u_i, u_{i+1}), (u_i, u'_i), \\ &\quad (u_i, u''_i) \mid 1 \leq i \leq k\} \end{aligned}$$

特に頂点 u'_i, u''_i ($2 \leq i \leq k-1$) をリブと呼ぶ. 単位長配置において, スパイングラフは水平または垂直の一通りの配置を持つ (図 2).

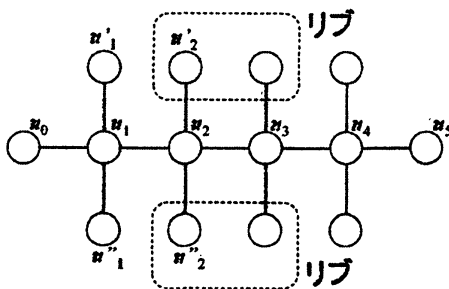


図 2: スパイングラフ L_4

3.2 節の還元

n 変数 3CNF 式 ϕ の任意の 1 節 $C_j = (l_L \vee l_C \vee l_R)$ ($1 \leq L < C < R \leq n$, $l_i = x_i$ または $\bar{x}_i$) からグラフ G_{C_j} への還元について述べる.

まず, 水平に L_{4n+3} (頂点を u_k とし, 以後水平軸と記述) を配置し, 頂点 u'_{4k+1}, u''_{4k+1} ($1 \leq k \leq n$) を基点とした垂直の $2n$ 個の L_2 を追加する. 水平軸によって二分割された平面の上側を上部, 下側を下部とする. 頂点 u_{4k-1} ($1 \leq k \leq n+1$) の 2 つ上の座標, 2 つ下の座標を配置点と呼ぶ. 配置点は上部・下部にそれぞれ $n+1$ 箇所ある. ただし上部右端の配置点は, 他の頂点によって使用されているものとする (図 3).

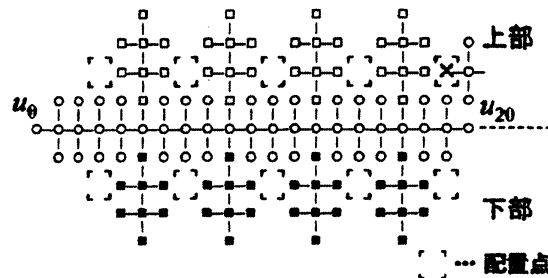


図 3: $n = 4$ の場合の基本構成

水平軸の正対する 2 つのリブを基点とした, 2 つの垂直のスパイングラフは上下で対になっており, この 2 つのスパイングラフをまとめて変数アンテナと呼ぶ. 変数アンテナには ϕ 中の変数に対応したインデックスを左から順に割り当てる (以降, A_i と表記する). 各 A_i は水平軸のリブの位置を入れ換えることにより, 上部と下部を入れ換えることができる. 便宜上頂点に色を付け, 入れ換えによる区別を明示的にする. 変数アンテナについて A_i の白頂点が上部にあるとき A_i の状態を *True*, 黒頂点が上部にあるとき A_i の状態を *False* とする. 数式中では A_i を 2 値変数として使用し, 図 4 の状態を $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} =$

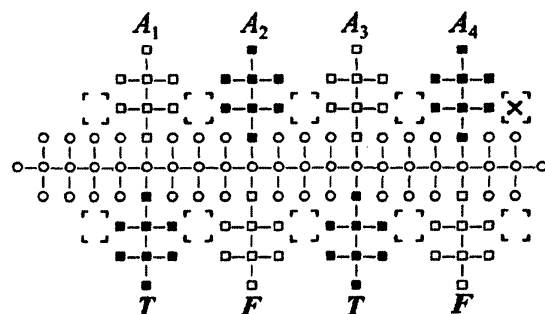


図 4: 変数アンテナの入れ換え

$\{T, F, T, F\}$ のように記述する。 A_i の状態が、SAT 上の変数 x_i への割り当てと対応する。

水平軸と各変数アンテナに、 C_j の構成に対応して以下の規則でガジェットを追加する。 (A_C は節内のソートされた3つのリテラルのうち、中央のリテラル l_C と対応していることに注意)

ガジェットの追加規則 I

- (1) 変数 x_i が節内で肯定で使われているなら、 A_i に隣接するいずれかの配置点を1つ埋める頂点を、 A_i の白頂点部に追加 (図6の☆)
- (2) 変数 x_i が節内で否定で使われているなら、 A_i に隣接するいずれかの配置点を1つ埋める頂点を、 A_i の黒頂点部に追加 (図6の★)
- (3) 変数 x_i が節内で使われていなければ、 (1),(2) の両方の頂点を追加 (図6の◆)
- (4) 上部の最左端の配置点、または $A_{C-1}-A_C$ 間の配置点を埋める上ハンガーを追加
- (5) 下部の最左端の配置点、または最右端の配置点を埋める下ハンガーを追加
- (6) $A_{C-1}-A_C$ 間の上下両方の配置点を埋める頂点を、水平軸に追加 (図6の▲, ▼)

(1),(2),(3) の頂点をストライカーと呼び、 (1),(2) で追加されたストライカーを SS、 (3) で追加されたストライカーを DS と表記する。 (4),(5) のハンガーは図5に示すようにスパイングラフの組合せによって構成できる。 図中の◎頂点の入れ換えによって頂点群▽を▼の位置に移動させ、使用する配置点を選択することができる。 ハンガーの頂点の配置場所を制限するためには他にもグラフが必要であるが、その構造については全体図を参照されたい。

節 C_j に対応するグラフ G_{C_j} は、以上で定めた各ガジェットを接続して構成される。 G_{C_j} の各ガジェッ

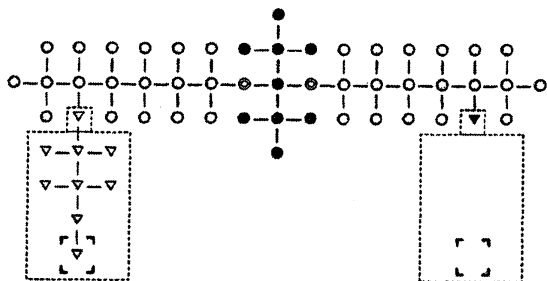


図 5: ハンガーの構成

トの接続に要するガジェットを壁とし、壁は並列に置かれたスパイングラフの組合せで構成されており、配置は図6に示す1通りのみである。これにより G_{C_j} の配置は変数アンテナの状態、及びストライカー、ハンガーの左右の選択を除いて、置き方が固定される。全体図は図6ようになる。

以上の G_{C_j} について定理1が成り立つ。

定理 1 節 C_j を充足する割り当て x から G_{C_j} の単位長配置 f への全射が存在し、 x に対応する f は n の線形時間で求められる。

上記定理を証明するため、以下の3つの補題を用いる。

補題 1 G_{C_j} について、 A_i の SS を上部 (下部) に配置する状態 A_i は、節 C_j のリテラル l_i を $T(F)$ にする割り当て x_i と一致する。

補題 2 G_{C_j} が単位長配置ならば、そのときの状態 A は3つの SS のうち1つを上部、2つを下部に配置する。

補題 3 G_{C_j} について、状態 A が3つの SS のうち1つを上部、2つを下部に配置するなら、その A に対応する G_{C_j} の単位長配置 f が丁度1つ存在する。また A が与えられたとき、それに対応する f は n の線形時間で計算可能である。

はじめに補題1を証明する。

補題 1 証明 A_i の SS が上部に配置される状態のとき

- 規則 (1) で追加された頂点を有する A_i が *True*
- 規則 (2) で追加された頂点を有する A_i が *False*

のいずれかである。これは

- C_j 内の肯定リテラル x_i に *True* を割り当てる
- C_j 内の否定リテラル $\bar{x}_i$ に *False* を割り当てる

に対応するため、リテラルを *True* にする割り当てと一致する。同様に、SS を下部に配置する状態と、リテラルを *False* にする割り当てが一致するため、補題1が成り立つ。 □

次に補題2を証明する。

補題 2 証明 SS 以外のガジェットは上下どちらの配置点を埋めるかが固定されている。下部の配置点を埋

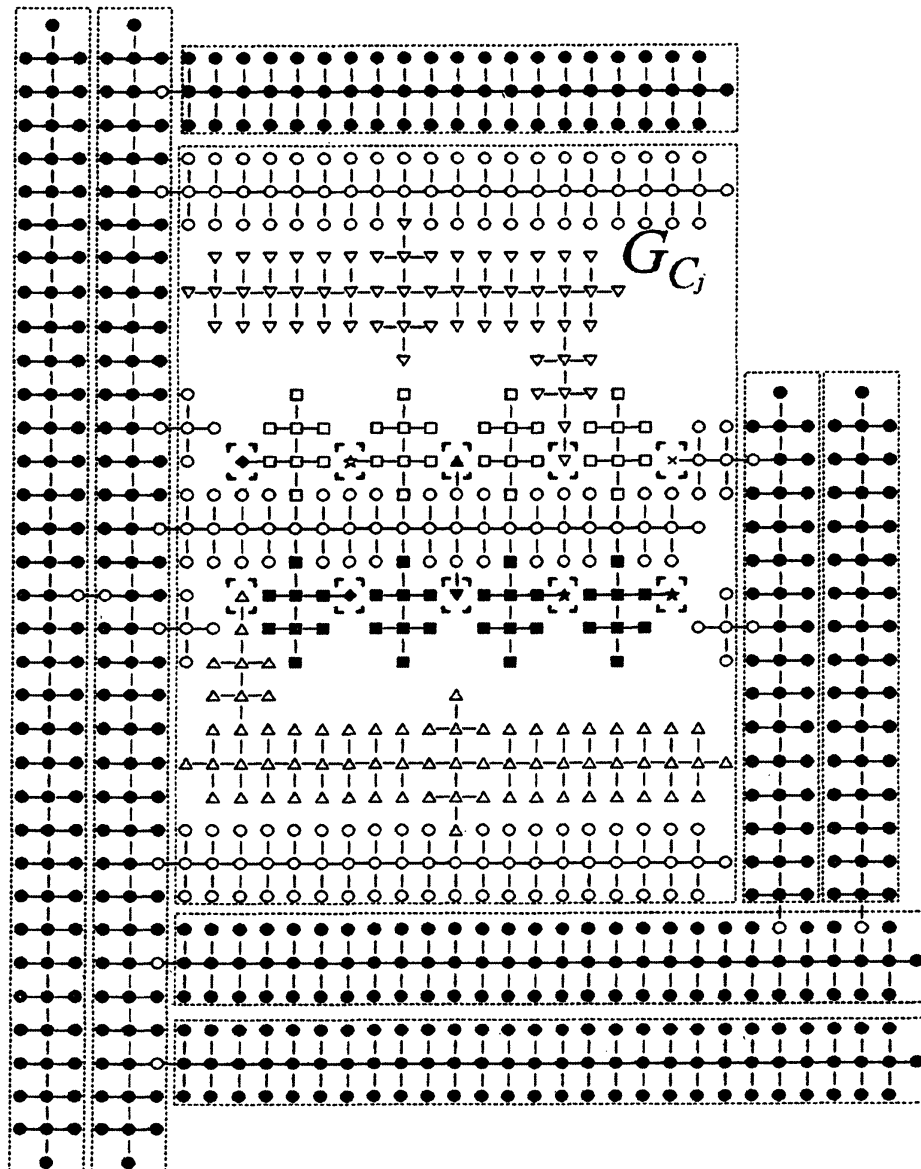


図 6: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 上の ϕ の $C_j = (x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ から変換したグラフ

めるガジェットは DS($n-3$ 個), 下ハンガー (1 個), 規則 (6) による頂点 (1 個) であり, 計 $n-1$ 個の配置点を使用される. 上部の配置点を埋めるガジェットは, 下部と同様のガジェットに加えて右端の配置点を埋める頂点である. よって計 n 個の配置点を使用される. この時点で, 上部で使われていない残りの配置点は 1 つ, 下部の残りの配置点は 2 つである.

残りのガジェットの 3 個の SS は, 変数アンテナの状態を変えることによって上下どちらの配置点を埋めるかが選択可能である. 配置点の数から, G_{C_j} で

単位長配置を成立させるためには SS を上部に 1 個, 下部に 2 個配置することが必要条件である. $\square$

最後に補題 3 を証明する.

補題 3 証明 アンテナ (A_L, A_C, A_R) の SS の位置が (上, 下, 下), (下, 上, 下), (下, 下, 上) となる状態 A について考察する. 上記 3 通りの SS の上下の位置に対して, 単位長配置がそれぞれに丁度 1 つずつ存在する (図 7, 8, 9). 図に示した以外の配置を持たないのは, 配置方向が固定されているストライカー

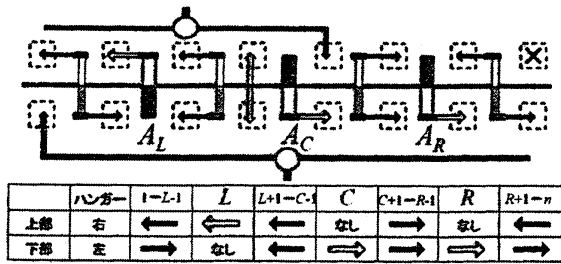


図 7: ストライカー (上, 下, 下) の単位長配置

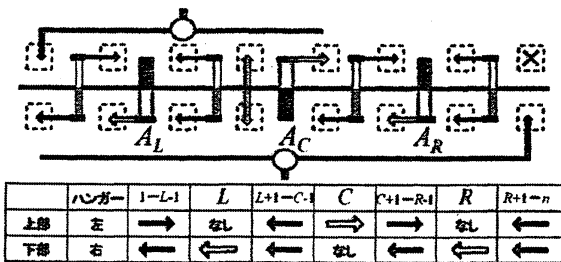


図 8: ストライカー (下, 上, 下) の単位長配置

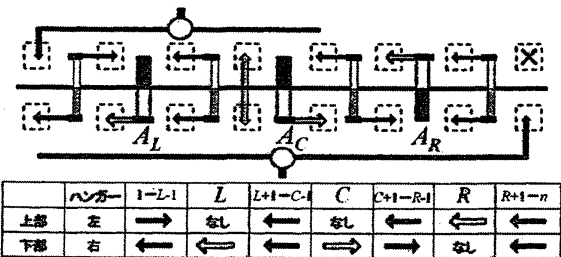


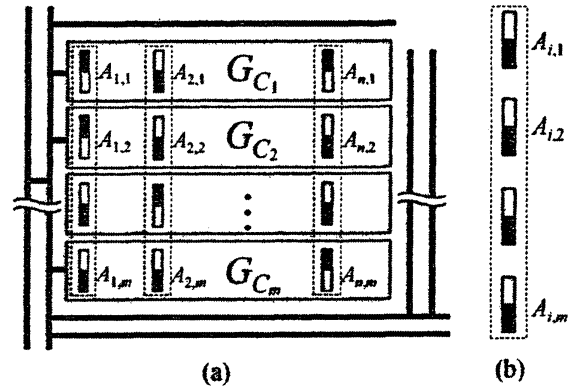
図 9: ストライカー (下, 下, 上) の単位長配置

から順番にガジェットを配置していくことで容易にわかる。よって状態 A に対応する f が丁度 1 つ存在する。また A が与えられたとき、対応する f は図 7, 8, 9 の表を参照することで n の線形時間で求められる。□

定理 1 証明 補題 2,3 から, “SS を丁度 1 つ上に配置する状態”である A から G_{C_j} の単位長配置 f へ, n の線形時間で計算可能な全射が存在することがわかる。また補題 1 より, “SS を丁度 1 つ上に配置する状態”である A は, “節内のリテラルが丁度 1 つ $True$ となる割り当て”である x に一致する。よって定理 1 が成り立つ。□

3.3 3CNF 式 ϕ から木 G_{phi} への還元

n 変数 m 節の 3CNF 式 ϕ 中の全ての節 C_j を G_{C_j} に変換し, 各 G_{C_j} を列上に並べて同一の壁で接続する (10(a)).

図 10: (a) 各 G_{C_j} の接続 (b) 状態の統一

ここで G_{C_j} の変数アンテナ A_i を $A_{i,j}$ と表記する。今, 任意の i について変数アンテナ $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,m}$ はそれぞれの状態に関連性がない。これは SAT 式 ϕ においては, 異なる節 $C_j, C_{j'}$ 中に存在する変数 x_i について, 節ごとで x_i への割り当てが違うことを意味する。そこで本小節では, 任意の i について変数アンテナ $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,m}$ の状態を統一 (図 10(b)) するための, 各 G_{C_j} のグラフ構造の変更点について述べる。

はじめに, 変数アンテナの構造について述べる。変数アンテナの構造を図 11 のように変更し, 白頂点部を凸, 黒頂点を凹とする。凸・凹共に配置方法は図 11 に示す一通りしかない。配置点を w', w'', b', b'' の左右, ストライカーを追加する頂点を w', b' とすることで, このアンテナへの変更後も前小節の G_{C_j} と同じく 1-in-3 SAT の 1 節と同一の性質を持つ。

次にハンガーの構造を変更する。今, 変数アンテナ $A_{1,j} - A_{1,j+1}$ の間には, C_j の下ハンガーと C_{j+1} の上ハンガーとして使われている 4 つの水平のスパイニンググラフが存在する (図 12)。これらを以下のように変更する (図 13)。

- 変数アンテナとスパイニンググラフの間の空白座標の行を詰める。
- 各スパイニンググラフの間には空白座標の行を 1 つ用意する。

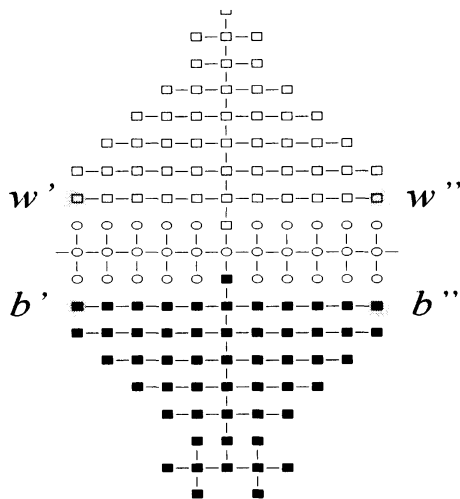


図 11: 凹凸形状の変数アンテナ

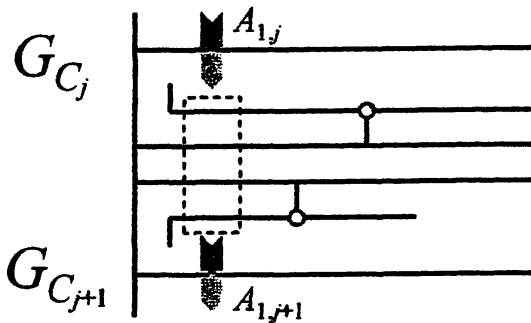


図 12: 変数アンテナ間の4つの水平スパイングラフ

- 変数アンテナの中心点の x 座標を X として, x 座標が $X-1, X, X+1$ であるスパイングラフのリップの片側に頂点を1つ追加 (図 13 の $\blacktriangle$, $\blacktriangledown$)

以上のガジェットをトランスミッターとする. $A_{1,j}$ – $A_{1,j+1}$ 間の構造は図 13 のようになり, $A_{1,j}$ と $A_{1,j+1}$ 間の配置は (a), (b) に示す2通りのみである. トランスミッターによって変数アンテナの動きが制限され, $A_{1,j}$ の凸部と $A_{1,j+1}$ の凹部が必ず向かい合うことになる. すなわち $A_{1,j}$ と $A_{1,j+1}$ の状態が同じになる.

$C_j = (l_L \vee l_C \vee l_R)$ について C が奇数であるとき, G_{C_j} の上ハンガーの対称軸と変数アンテナ $A_{(C+1)/2,j}$ の中心点と同じ列上となる. 同様に n が奇数であるとき, 下ハンガーの対称軸と変数アンテナ $A_{(n+1)/2,j}$ の中心点と同じ列上となる. 以上の場合にはトランスミッターが配置できない. (図 14).

これを解決するために1つの節グラフに対して変

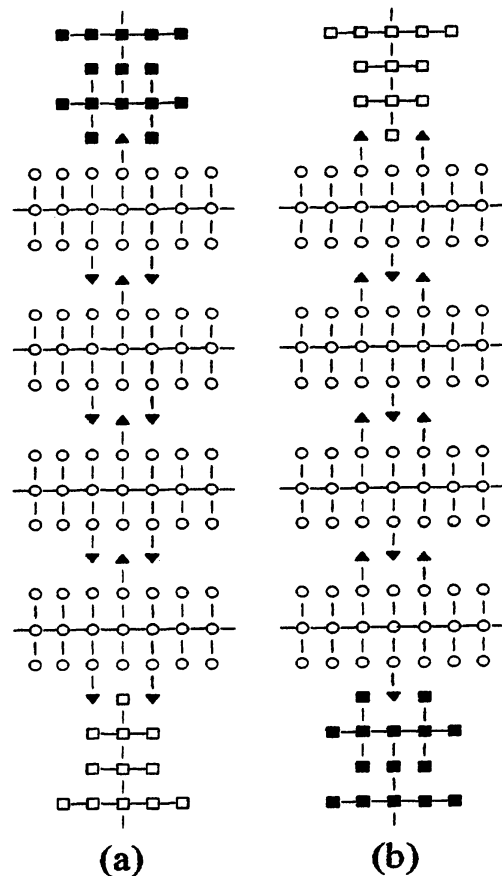


図 13: トランスミッターの構成とその配置

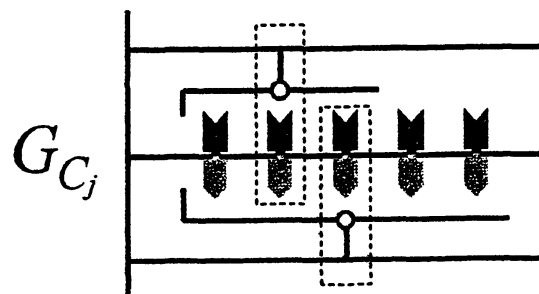


図 14: トランスミッターの問題点

数アンテナを $2n$ 個設置し, 論理変数 x_i を A_{2i} と対応させる. $A_k (k = 1, 3, \dots, 2n-1)$ をダミー変数アンテナとし, ϕ のどの節にも使われていない変数に対応しているものとして扱う. つまり, 全てのダミー変数アンテナは DS が付与される. この変更により, ハンガーの対称軸は変数アンテナの中心点の列と重ならない. さらに $G_{C_j} (2 \leq j \leq m)$ の上ハンガーの延長線上に, 壁の右内側に接続するスパイングラフ

を配置する。

以上の変更で、全ての $A_{i,j}-A_{i,j+1}$ 間に4つのスパイングラフが存在することになり、それぞれに前述のトランスミッターを配置することで、任意の i について $A_{i,j} (1 \leq j \leq m)$ の状態を揃えることができる。

また G_{C_1} のダミー変数アンテナを凸・凸の組合せにすることで、ダミー変数アンテナの状態を固定する (図 15)。

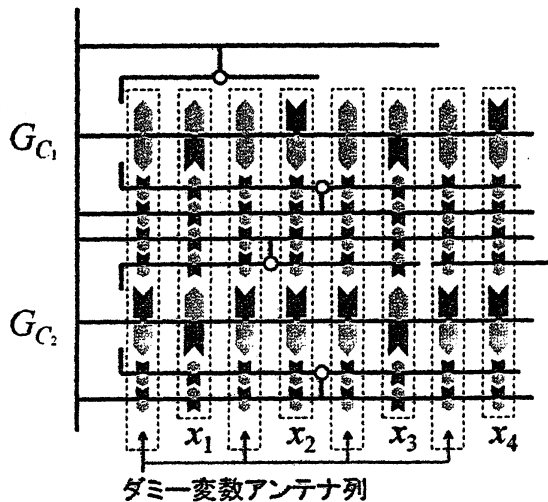


図 15: ダミー変数アンテナの固定

以上の n 変数 m 節 3CNF 式 ϕ からの変換で得られたグラフを G_ϕ として、以下の定理が成り立つ。

定理 2 ϕ を充足する割り当て x から G_ϕ の単位長配置 $f \in \mathcal{F}$ は、 n, m の線形時間で計算可能な全単射が存在する。

証明 定理 1 より、 ϕ を充足する割り当て x は、任意の G_{C_j} に対して丁度 1 つの単位長配置を持つので、 x に対応する G_ϕ の単位長配置 f も丁度 1 つ存在する。また、異なる割り当て x, x' に対応する f, f' は、いずれかの変数アンテナの状態が異なる (凹凸の向きが変わる) ため、必ず $f \neq f'$ となる。よって、SAT の解と単位長配置の解は一対一対応である。

定理 1 より、 x から $G_{C_j} (1 \leq j \leq m)$ の単位長配置が n の線形時間で求められるので、 x に対応する G_ϕ の f は n, m の線形時間で求められる。□

n 変数 m 節の ϕ から G_ϕ への変換は n, m の線形時間で行える (各 G_{C_j} への変換が n の線形時間で、それを m 回行う) ので、上記還元は多項式時間 ASP 還

元である。 G_ϕ は木構造となっているため、以下の定理が成り立つ。

定理 3 木の単位長配置の関数問題は ASP 完全である。

4 まとめ

1-in-3 SAT から最大次数 4 の木の単位長配置への多項式時間 ASP 還元を示すことにより、上記問題が ASP 完全であることを証明した。この問題から Vinicius らの還元 [2] を行うことで、最大次数 3 のグラフについても ASP 完全性が証明できる。また、単位長配置の一般化である二次元バンド幅問題 (全ての辺コストが k 以下になる配置が可能かどうかの判定) についても、木の関数問題の ASP 完全性が証明できる。

今後の課題として、最大次数 3 の木の単位長配置が ASP 完全であるかどうかの調査が挙げられる。

参考文献

- [1] S N. Bhatt and S S. Cosmadakis. The complexity of minimizing wire lengths in VLSI layouts. *Inf. Process. Lett.*, Vol. 25, pp. 263–267, June 1987.
- [2] Vinicius G. P. de Sa, Guilherme Dias da Fonseca, Raphael C. S. Machado, and Celina M. Herrera de Figueiredo. Complexity dichotomy on partial grid recognition. *Theor. Comput. Sci.*, pp. 2370–2379, 2011.
- [3] T. Yato and T. Seta. Complexity and Completeness of Finding Another Solution and Its Application to Puzzles. *IEICE Trans. Fund. Elect. Comm. Comp. Sci.*, Vol. 86, No. 5, pp. 1052–1060, 2003-05-01.

付録

還元によって $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ ($C_1 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$, $C_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$, $C_3 = (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$) から得られる G_ϕ と、 ϕ の充足解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (T, F, T, F)$ に対応する単位長配置を記載する。なお、SS が付与された変数アンテナには二重線の囲いを付けている。

