

Moret-Bailly 族 とその応用

横浜市大文理 桂 利行 (Toshiyuki KATSURA)

§0. 序

Moret-Bailly は, 標数 $p > 0$ において, $\mathbb{P}^1$ 上の principally polarized abelian surfaces の family で constant moduli ではないものを構成した ([6], [7] および Oort [9] 参照)。これは標数 0 のときには存在し得ない family である (Oort [9] 参照)。本稿では, 今までに得られた Moret-Bailly family の 2 つの応用を挙げる。第 1 の応用は principally polarized abelian surfaces の moduli variety $A_{2,1}$ に関するもので, この family を用いて, $A_{2,1}$ における supersingular abelian surfaces に対応する点の locus のなす subscheme V の irreducible component の数を数えることができる。第 2 の応用は Kummer surface の unirationality に関するもので, この family を用いて, 標数 $p \geq 3$ において, supersingular abelian surface からつくった Kummer surface が unirational であるという塩田の定理

([14]参照) の新しい証明を与えることができる。詳しい内容はそれぞれ Katsura-Port [4], Katsura [3] にある。

§1. Moret-Bailly family

本節では Moret-Bailly family について整理する。 k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし, $\alpha_p = \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^p)$ を k 上の local-local group scheme とする。 α_p は

$$\begin{array}{ccc} m^*: k[\varepsilon]/(\varepsilon^p) & \longrightarrow & k[\varepsilon]/(\varepsilon^p) \otimes k[\varepsilon]/(\varepsilon^p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varepsilon & \longmapsto & \varepsilon \otimes 1 + 1 \otimes \varepsilon \end{array}$$

により、積 $m: \alpha_p \times \alpha_p \longrightarrow \alpha_p$ が定義されている。

A を k 上 g 次元の abelian variety とする。 $\operatorname{Hom}(\alpha_p, \alpha_p) \cong k$ であるから, $\operatorname{Hom}(\alpha_p, A)$ を k 上の right vector space とみなすことができる。

$$a(A) = \dim_k \operatorname{Hom}(\alpha_p, A)$$

とおく。 $0 \leq a(A) \leq g$ が成立する。 $g=1$ のときには, $a(A)=1$ となる elliptic curve を supersingular elliptic curve, $a(A)=0$ となる elliptic curve を ordinary elliptic curve という。次の2つの定理は基本的である。

定理 1.1 (Port [10]). A が g 個の supersingular elliptic curves の直積に同型になるための必要十分条件は $a(A)=g$ となることである。

定理 1.2 (Deligne-Serre-Ogus). $E_1, \dots, E_{2n}$ ($n \geq 2$) を supersingular elliptic curves とする。そのとき

$$E_1 \times \dots \times E_n \cong E_{n+1} \times \dots \times E_{2n} \text{ (同型)}$$

が成立する。

(わかりやすい証明が Shioda [13] にある。)

E を 有限体 $\mathbb{F}_p$ 上定義された supersingular elliptic curve で, $\text{End}(E)$ が $\mathbb{F}_{p^2}$ 上定義されているものとする(こういう elliptic curve の存在はよく知られている)。以下,

$$A = E \times E$$

とおく。 $(i, j) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \setminus \{(0, 0)\}$ とし, (i, j) によって定義される α_p の埋め込み

$$\alpha_p \xrightarrow{(i, j)} \alpha_p \times \alpha_p \subset E \times E = A$$

を考える。この像は i と j の比のみによってきまるから, $a = \frac{j}{i}$ とおいて, 以下 $(1, a)$ を考える。ただし, $a = \infty$ は, $(0, 1)$ を表わすものとする。

定理 1.3 (Oort [13]). $E \times E / (1, a)\alpha_p$ が 2 つの supersingular elliptic curves の直積に同型になるための必要十分条件は, $a \in \mathbb{F}_{p^2}$ かつ $a \neq \infty$ となることである。とくに, $E \times E / (1, a)\alpha_p$ が, 2 つの supersingular elliptic curves の直積に同型になるような a の値は丁度 $p^2 + 1$ 個存在する。

こういう埋め込みを一音に考えるために, A の零点におけ

3 tangent space T_A をとる。これは A に対応する Lie algebra となるが、 T_A の 1 次元 Lie subalgebra と、 A の subgroup scheme で α_p と同型なものに 1 対 1 に対応する。そこで、

$$S = \mathbb{P}(T_A), \quad K_S = \alpha_p \times \alpha_p \times S, \quad A_S = E \times E \times S$$

とおく。 $(X, Y) \in S$ の homogeneous coordinate とする。

$K_S = \text{Spec } \mathcal{O}_S[\alpha, \beta] / (\alpha^p, \beta^p)$ とかけるが、この中で $Y\alpha - X\beta = 0$ によって定義される S 上の subgroup scheme を H とする。

$\mathcal{A} = A_S / H$ とおけば、次のような group schemes の diagram を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & A_S & \longrightarrow & \mathcal{A} \longrightarrow 0 \text{ (exact).} \\ & & & & \swarrow \text{pr}_1 & & \searrow f \\ & & & & A & & S = \mathbb{P}^1 \end{array}$$

(Note: In the original image, there is also a diagonal arrow from A_S to $S = \mathbb{P}^1$ labeled pr_2)

ただし、 π は自然な射影; pr_1, pr_2 は各々の成分への射影, f は pr_2 から誘導された morphism である。こうして, supersingular abelian surfaces の family $f: \mathcal{A} \rightarrow S$ を得る。定理 1.3 によって, supersingular elliptic curves の直積に同型になるような fibre は丁度 $p^2 + 1$ 個存在し, その他の fibre は elliptic curves の直積にはならない。

さて, $\mathcal{L}$ を A 上の invertible sheaf, $A^t \in A$ の dual とする。 A の元 x による translation を T_x とおけば

$$\varphi_{\mathcal{L}}: A \longrightarrow A^t \quad (x \longmapsto T_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1})$$

なる homomorphism がある。

$$K(L) = \ker \varphi_L$$

とおく。

ここで, $f: X \longrightarrow S$ に relative principal polarization
を入れることを考える。以下, $\text{char. } k = p \geq 3$ を仮定する。
invertible sheaf L として次の2条件をみたすものを考える:

(i) L は symmetric, 即ち, A の inversion をしとすると

$$\iota^* L \cong L.$$

(ii) $K(L) \cong \alpha_p \times \alpha_p$

(こういう L の存在は Moret-Bailly [7] で示されている。)

しからば, Mumford [8] の descent theory の relative version
(Moret-Bailly [7] 参照) を用いて, X 上の invertible sheaf M で

$$p_1^* L \cong \pi^* M$$

をみたすものが存在する。さらに, $f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の構成
から, X 上の relative effective divisor D で

$$M \otimes f^* \mathcal{O}_S\left(\frac{p-1}{2}\right) \cong \mathcal{O}_X(D)$$

となるものが存在することがわかる。 D は non-singular

irreducible surface であって, 構成法から, f の D への制限

$$f|_D: D \longrightarrow S$$

は, genus 2 の stable curves の family となる。さらに詳しく
言えば, elliptic curves 2個が1点でまじわってできる

stable curve になるような fibres が丁度 $5p-5$ 個あり、
それ以外の fibres は genus 2 の non-singular irreducible
curves になる。即ち $\mathcal{X} \rightarrow S$ に relative principal polarization
 $D \subset \mathcal{X}$ を入れることができた。このようにして構成された
family $(\mathcal{X}, D) \rightarrow S$ を Moret-Bailly family という (Moret-Bailly
[6], [7] より前に Oort [9] により、その存在は知られていた)。

注意 1.4. $p=2$ の場合にも、少しちがうやり方で、同様の
principally polarized supersingular abelian surfaces の family
 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ ($\mathcal{X} \supset D$ relative principal polarization) をうる。
この場合もやはり、 $f^{-1}(x)$ ($x \in S$) が supersingular elliptic
curves の直積になるものが丁度 2^2+1 個あり、 $f|_D: D \rightarrow S$
において、degenerate した fibres が丁度 $5 \cdot 2 - 5$ 個存在する
ことがわかる (Moret-Bailly [6] 参照)。

§2. Moduli variety $A_{2,1}$ の応用.

k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする。 k 上定義された
principally polarized abelian surfaces の coarse moduli scheme を
 $A_{2,1}$ と書く。 $A_{2,1}$ における principally polarized supersingular
abelian surface (A, Θ) に対応する点全体 V は、 $A_{2,1}$ の閉集合
になる。よく知られているように、 $A_{2,1}$ は 3 次元の代数多様
体であるが、 V はその中で純 1 次元の subscheme になる (Koblitz [5] 参照)。 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を §1 で構成された family

で, relative principal polarization D を持っているとする。しか
らば, moduli の性質から,

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X \supset D & & \\ \downarrow f & & \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}_{2,1} \end{array}$$

なる morphism φ が存在する。 $\text{Im } \varphi$ は V の 1 つの既約成分
を与える。逆に次の定理が成立する。

定理 2.1 (Katsura-Oort [4]). V の任意の irreducible
component は, §1 の条件 (i) (ii) をみたす invertible sheaf L を
適当に選んで Moret-Bailly family を作れば, 外に於ける φ の
image として得られる ($p=2$ のときも同様)。

これを用いて よく知られた次の命題の 1 つの証明を得る。

命題 2.2. $p=2$ とする。このときには, genus 2 の
non-singular irreducible curve C で, その Jacobian variety
 $J(C)$ が 2 個の supersingular elliptic curves の直積に同型と
なるようなものは存在しない。

証明) もし存在すれば, 定理 2.1 より ある Moret-Bailly
family の fibre として得られる。1 つの Moret-Bailly family
 $f: X \rightarrow S$ ($X \supset D$ relative polarization) の中で, $f^{-1}(x)$ が
supersingular elliptic curves の直積に同型となるものの数は
先にのべたように p^2+1 個。 $f|_D: D \rightarrow S$ において,

degenerate する fibre は先にのべたように $5p-5$ 個。よって,
genus 2 の non-singular irreducible curve C で Jacobian $J(C)$ が
supersingular elliptic curves の直積に同型となるようなものは,
丁度 $p^2+1 - (5p-5) = (p-2)(p-3)$ 個出てくる。従って,
 $p=2$ 又は 3 以外は存在しない。 g.e.d.

$\mathcal{O} = \text{End}(\bar{E})$, $B = \text{End}(\bar{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく。 B は discriminant p
の $\mathbb{Q}$ 上の division quaternion algebra で, $\mathcal{O}$ はその maximal
order になっている。 B 上の 2 次元 left vector space
 $V = B \oplus B$ を考えよう。 V を definite な quaternion hermitian
space とみて, その principal genus の類数を H_2' とおく。
これは, p を用いて具体的に計算されている (Hashimoto -
Ibukiyama [1] 参照)。定理 2.1 と Ibukiyama-Katsura-Gort [2]
を用いて次の定理をうる。

定理 2.3 (Katsura-Gort [4]). V の irreducible component の
数は H_2' に等しい。

系 2.4. V が irreducible $\Leftrightarrow p \leq 11$.

§3. Shioda's theorem.

k を標数 p の代数的閉体とする。 algebraic surface X は
projective space $\mathbb{P}^2$ と birational であるとき rational surface
といわれる。 また X は, $\mathbb{P}^2$ からの generically surjective rational
mapping が存在するとき, unirational surface といわれる。

rational surface は unirational surface である。 $p=0$ ならば、Enriques-Castelnuovo の rationality 判定条件が使えて、unirational ならば rational になるが、 $p>0$ ならば、これはかたらずしと成立しない。 K3 surface X については、次のような conjecture がある。

Conjecture (Artin-Shioda). $\text{char } k = p > 0$ とし、K3 surface X を考える。このとき次の同値である。

$$X : \text{unirational} \Leftrightarrow \text{Picard 数 } \rho(X) = \text{第2 Betti 数 } B_2(X)$$

X が K3 surface ならば $B_2(X) = 22$ だから、 $\rho(X) = B_2(X)$ ならば、 $\rho(X) = 22$ ということである。この conjecture について、次のことが知られている。

- 1) $\Rightarrow$ は正しい (Shioda [12])。
- 2) $p=2$ ならば conjecture は正しい (Rudakov-Shefarenich [11])。
- 3) $p \geq 3$ とする。 A を任意の abelian surface, $\iota \in A$ の inversion ($A \ni x, \iota: x \mapsto -x$) とする。 quotient surface A/ι の minimal non-singular model を $K_m(A)$ とかけ、Kummer surface と言う。これは K3 surface になる。Kummer surfaces に対しては conjecture は正しい (Shioda [14])。
- 4) $p \geq 7$ とする。generalized Kummer surfaces に対しては conjecture は正しい (Katsura [3])。

Shioda [14] による 3) の証明は,

$$y^2 = x^L - 1$$

で定義される non-singular complete curve C の Jacobian variety を用い, 問題を Fermat surface の unirationality 判定法に帰着させる巧妙なものである。我々は, Moret-Bailly family を用いて, 3) を示せることをいう。詳細は Katsura [3] にあるので, Kummer surface X が $\rho(X) = 22$ をみたせば unirational になることの証明の要点をのべる。

まず, A を任意の abelian surface とし, ι を A の inversion とする。 A/ι には A_1 型の特異点が 16 個あることから,

$$\rho(A) + 16 = \rho(K_m(A))$$

であることがわかる (Shioda)。よって,

$$\rho(K_m(A)) = 22 \Leftrightarrow \rho(A) = 6 \Leftrightarrow A : \text{supersingular}$$

となる。また, Shioda [14] によれば, ある supersingular abelian surface から得られる Kummer surface が unirational ならば, どんな supersingular abelian surface から得られる Kummer surface も unirational になる。よって, 以下, 特別な supersingular abelian surface から得られる Kummer surface が unirational になることを言えばよい (この部分が本質的な部分である)。

§1 で構成した $\mathcal{E}|_D: D \rightarrow S$ を考える。しかるに, 容易にわかるように D の Albanese variety $\text{Alb}(D)$ は, 2次元 supersingular

abelian surface $A = E \times E$ (§1の記号で) に同型となる。

$\pi_D: D \rightarrow S$ は genus 2 の curve の family だから fibre 方向に inversion ι_D をもつか、 φ もうまくとれれば、 $\text{Alb}(D)$ の inversion ι と commute することがわかる、即ち、

$$\begin{array}{ccccc}
 & D & \xrightarrow{\iota_D} & D & \\
 \pi_D \swarrow & & \searrow \varphi & \circlearrowleft & \searrow \varphi \\
 S & & \text{Alb}(D) & \xrightarrow{\iota} & \text{Alb}(D)
 \end{array}$$

よって、 $D/\langle \iota_D \rangle \rightarrow \text{Alb}(S)/\iota$ を得る。 D/ι_D は $S = \mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ を general fibre にする ruled surface である ($p \neq 2$ に注意)。

よって、 D/ι_D は rational surface である。従って、 $\text{Alb}(D)/\iota$ 即ち $\text{Km}(\text{Alb}(D))$ は unirational surface である。

参考文献

- [1] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (II), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA, 28 (1981), 695-699.
- [2] T. Ibukiyama, T. Katsura and F. Oort, Supersingular curves of genus two and class numbers, Compositio Math. (1985).
- [3] T. Katsura, Generalized Kummer surfaces and their unirationality in characteristic p , to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

- [4] T. Katsura and F. Oort, Families of supersingular abelian surfaces, to appear in *Compositio Math.*
- [5] N. Koblitz, p -adic variation of the zeta-function over families defined over finite fields, *Compositio Math.*, 31 (1975), 119-218.
- [6] L. Moret-Bailly, Polarisation de degré 4 sur les surfaces abéliennes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 289 (1979), 787-790.
- [7] L. Moret-Bailly, Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$, *Asterisque* 86 (1981), 109-140.
- [8] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, (1970).
- [9] F. Oort, Subvarieties of moduli spaces, *Invent. Math.*, 24 (1974), 95-119.
- [10] F. Oort, Which abelian surfaces are products of elliptic curves?, *Math. Ann.*, 214 (1975), 35-47.
- [11] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Supersingular K3 surfaces over fields of characteristic 2, *Math. USSR-Izv.*, 13 (1979), 147-165.
- [12] T. Shioda, An example of unirational surfaces in characteristic p , *Math. Ann.*, 211 (1974), 233-236.
- [13] T. Shioda, Supersingular K3 surfaces, *Lect. Notes in Math.* 732, Springer (1979), 564-591.
- [14] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, *Math. Ann.*, 230 (1977), 153-168.