

Poiseuille 流 - 乱流遷移の非線形モデル

日本総研 宗 像 健 一 (Ken-iti Munakata)

1. はじめに

円形断面をもった長いパイプの内部を粘性流体が流れるという問題は、三次元流の典型的な例として、実験的にも、また理論や計算の面からも、多数の研究者によって取り上げられてきた。前世紀以来の知見の蓄積は膨大なものになっているに相違ないが、しかしながら現状では、未だに混沌からぬけだしたとは云えないのではあるまいか。簡単のために、層流から乱流への移り変わりの過程に問題を限定してみても、運動方程式に立脚した、判りやすい描像が得られたという話を聞かない。これまでによく研究が行われている線形理論に加えて、運動方程式に現れる非線形項のはたらきを分析的に調べることによって、この問題を解明するための緒をつかめるならばという意図をもって、第一近似ともいべき簡単なモデルを構築して、若干の計算を実行した。これまでに得られた結果について、要点を報告しておきたい。

2. 運動方程式とその解法

無次元化された円柱座標 (r, θ, z) に於て、主流である Poiseuille 流 $W = 1 - r^2$ に攪乱速度 (u, v, w) を加えた時に発生する渦度の成分を $(\omega_r, \omega_\theta, \omega_z)$ とし、Navier-Stokes 方程式から圧力項を消去して得られる、非線形の渦度方程式を運動方程式として使用することにする。

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + (1 - r^2) \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R_e} \left(\Delta \omega_r - \frac{\omega_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} \right) \\ + u \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} + w \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \omega_r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + (1 - r^2) \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{R_e} \left(\Delta \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) \\ + u \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + w \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} - \omega_r \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ + \frac{1}{r} (v \omega_r - u \omega_\theta) = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (1 - r^2) \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - 2 r \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{R_e} \Delta \omega_z \\ + u \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_r \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 R_e は主流の Reynolds 数を表し、また方程式 (2) - (4) において非線形の相互作用を表現する項は、各々の第2行以降の形をとっていることに注意しておきたい。これらの方程式を厳密に扱うことはできないが、線形近似の問題において有効性が実証されているところの直交関数展開法を、あらたに非線形問題に適用することはもちろん可能である。

筆者^{1~4)} は Poiseuille 流の線形安定性の問題に関して、これまでに種々の

計算を行ってきたが、2次元の非線形問題に関しても、今回と同様な直交関数展開法による解析を行ったことがある。すなわち、円柱の背後に発生して時間とともに成長する渦が、剥離して流れ出すまでの過程を追跡するために、当時の大型コンピュータを断片的に長時間にわたり使用して、200元の非線形連立常微分方程式を解き、その時間的发展を調べたものである。

最近の傾向である小型コンピュータの高性能化と、大規模メモリーおよび数式処理ソフトの実用化によって、基本的な重要性をもっておりながら、3次元の流れの問題としては比較的簡単である、Poiseuille 流の非線形安定問題に取り組む時期が到来したものと考えている。

3. 直交関数展開法と座標関数の選択

3次元の偏微分方程式の解を求めることは、一般的にいて極めて困難であるが、一定の境界条件を満たす特解を求めるためには、直交関数展開法を適用することができる。

まず変数 θ に関しては、常套手段である $\exp(in\theta)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) の形の Fourier 級数展開を採用する。円管の軸方向についても、現象が周期的と考える訳ではないが、Fourier 級数に分解して、 $\exp(im\alpha z)$ の形を仮定する ($m=0, 1, 2, \dots$)。円管の長さを無限大とするときには、 α を決める手がかりは存在しない訳であるが、線形安定性理論との関連を調べる上でパラメータとして α を残しておく都合がよい。

次に、いささか天下りの的であるが、円管の任意断面における速度成分 (u, v, w) を次の形におくことにする ($\nu=1, 2, 3, \dots$)。

$$v = \sum_n \sum_{\nu} \sum_m m \alpha X_{n\nu m} \{ 2 r \phi_{n\nu}(r) + r^2 \phi_{n\nu}'(r) \} \cdot \exp i(n\theta + m\alpha z), \quad (5)$$

$$u = \sum_n \sum_{\nu} \sum_m i m \alpha Y_{n\nu m} r \phi_{n\nu}(r) \exp i(n\theta + m\alpha z), \quad (6)$$

$$w = - \sum_n \sum_{\nu} \sum_m (n X_{n\nu m} + Y_{n\nu m}) \{ 2 \phi_{n\nu}(r) + r \phi_{n\nu}'(r) \} \cdot \exp i(n\theta + m\alpha z). \quad (7)$$

ここに導入した関数系列 $\phi_{n\nu}(r)$ は、以下の境界条件 (8), (9) をみたすことが必要である：

$$r \rightarrow 0 : \quad \phi_{n\nu}(r) \rightarrow r^n, \quad (8)$$

$$r = 1 : \quad \phi_{n\nu}(r) = 0, \quad d\phi_{n\nu}(r)/dr = 0. \quad (9)$$

方程式 (5) - (7) で表される速度 (u, v, w) は、時間の関数である $X_{n\nu m}(t)$, $Y_{n\nu m}(t)$ と組み合わせることによって、時間と空間の任意の点 (r, θ, z, t) において、連続方程式

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

をみたしていることは容易に確かめられる。このような関数列はベクトルポテンシアルから導かれるという特徴を有している訳であるが、以下の議論では $\phi_{n\nu}(r)$ を (ポテンシアル) 座標関数と呼ぶことにする。それに対して、 $r \phi_{n\nu}$, $2 r \phi_{n\nu} + r^2 \phi_{n\nu}'$ および $2 \phi_{n\nu} + r \phi_{n\nu}'$ はそれぞれ速度の u , v および w 成分を表す座標関数と考えてよいであろう。

また、これらの座標関数に掛かる $X_{n\nu m}(t)$, $Y_{n\nu m}(t)$ 等は、攪乱速度

成分の時間的发展を表現するものであって、これを係数ベクトルと呼ぶことにしよう。

上記の考察によって、運動方程式としては、方程式(2) - (4)のうちの任意の二つを選んで、これらを重み付き平均的に満足するように努めることが要求される。

筆者はこれまでに座標関数として、円形の薄板の振動の固有関数とか、座屈の固有関数、その他を使用してきた。今回は簡単のために、これを多項式でおきかえることを考えて、Jacobi の多項式を利用した座標関数を開発することができたので次節においてこれを説明しよう。

4. Jacobi の多項式の応用

Jacobi の多項式 $G_n(\alpha, \gamma; x)$ は Gauss の超幾何関数 $F(a, b, c; x)$ において、級数が有限項で打ち切りになる場合として次のように定義される：

$$G_n(\alpha, \gamma; x) \equiv F(\alpha + n, -n, \gamma; x). \quad (10)$$

また、次式に示す重み付きの直交関係を有している：

$$\int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-\gamma} G_n(\alpha, \gamma; x) G_m(\alpha, \gamma; x) dx = 0. \quad (m \neq n) \quad (11)$$

ここで、 $x = r^2$ と置き換えるものとし、 $\gamma - 1 = n$ 、 $\alpha - \gamma = 4$ と選んで、さらに、重みの関数を振り分けにするならば、当面の問題に必要なポテンシャル座標関数が次のように得られる。

$$\phi_{n\nu}(r) = r^n (1 - r^2)^2 G_{\nu-1}(n+5, n+1, r^2) \quad (12)$$

このようにして、座標関数として多項式を使用することによって計算が簡単になるばかりでなく、数式処理ソフトを利用すれば各種の重みつき平均値が、累積誤差を伴うことなしに、有理数として正確に求められるというメリットがある。従って、今後大型の計算に移行するときには役に立つものと予想される。

今回報告する簡単な非線形モデルにおいては、前述の式 (5) - (7) において $n=0$, $\nu=1$ および $m=0, 1$ の項だけを使用した。また、 X および Y の実部、虚部を区別するために添字 c と s を使うことにする。

偏微分方程式の解を近似的に求めるために、高さ $2\pi/\alpha$ をもつ円柱状領域において、微分方程式の残差の重み付き平均値を 0 とおくことによって、以下に示すような発展方程式がえられる（ここでは、添字を省略形式で使用している）。

$$dX_0/dt = -(1/R_c)C_1X_0 - \alpha^2C_2(X_sY_c - X_cY_s) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} dX_c/dt = & -(1/R_c)(C_1 + \alpha^2)X_c + \alpha(1 + C_3)X_s \\ & + C_4X_0Y_s - \alpha C_5X_sY_0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} dX_s/dt = & -(1/R_c)(C_1 + \alpha^2)X_s - \alpha(1 + C_3)X_c \\ & - C_4X_0Y_c + \alpha C_5X_cY_0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$dY_0/dt = -(1/R_c)C_6Y_0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
dY_c/dt = & -(1/R_e) \left((C_7 + C_8\alpha^2 + C_9\alpha^4)/(1 + C_{10}\alpha^2) \right) Y_c \\
& + \alpha \left((1 + (C_{11} + C_{12}\alpha^2)/(1 + C_{10}\alpha^2)) Y_s \right. \\
& \left. - \alpha \left((C_{13} + C_{14}\alpha^2)/(1 + C_{10}\alpha^2) \right) Y_o Y_s \right. \\
& \left. + C_{15}\alpha^2/(1 + C_{10}\alpha^2) X_o X_s \right.
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
dY_s/dt = & -(1/R_e) \left((C_7 + C_8\alpha^2 + C_9\alpha^4)/(1 + C_{10}\alpha^2) \right) Y_s \\
& - \alpha \left((1 + (C_{11} + C_{12}\alpha^2)/(1 + C_{10}\alpha^2)) Y_c \right. \\
& \left. + \alpha \left((C_{13} + C_{14}\alpha^2)/(1 + C_{10}\alpha^2) \right) Y_o Y_c \right. \\
& \left. - C_{15}\alpha^2/(1 + C_{10}\alpha^2) X_o X_c \right.
\end{aligned} \tag{18}$$

$t = 0$ において, Poiseuille 流に有限の攪乱を加えるものとして, その後の渦あるいは攪乱速度の変化を追跡する訳であるが, 簡単のためにここでは, 係数ベクトルに任意の初期値を与えて, 発展方程式を解くことにする. こうした数値実験を繰り返すことは, 容易に実行できるから, 経験の積み重ねによって, 層流から乱流に移り変わる過程に関する, 何等かの知見を獲得する可能性があるものと期待される.

Reynolds 数 R_e 及びパラメータ α がどのような役割をしているか, あるいは線形項に対比して, 非線形相互作用を表す項の働き等に関する知識は, これらの微分方程式にも既に内蔵されていると考えてよいであろう.

5. 非線形モデルによるコンピュータ実験

図1は模式的に, 乱流における軸方向速度成分の時間空間的平均値を, 層流速度

分布と比べたものであるが、非線形理論を構成する以上、少なくともこのような定性的表現の可能性が期待できなければならない。図2にはこの論文で使った u -座標関数と v -座標関数を示している。また、図3に w -座標関数を、図4にはポテンシャル座標関数を示している。 w -座標関数に適当な重みを掛けて、層流の速度分布に加えることにより、**乱れた速度分布**を表現することは可能であると云ってよいであろう。

図5には一例として、攪乱を表す初期値として、 $(X_0, X_c, X_s, Y_0, Y_c, Y_s)$ に $(0.02, 0.01, 0, -0.01, 0.01, 0)$ を与えて、6元の非線形連立微分方程式を $t=0$ から $t=2$ まで積分した結果を示している ($Re=2000, \alpha=30$)。

この図に於て最も特徴的な点は、 X_0 の挙動に現れている。初期条件として与えられた 0.02 だけのジャンプが、その2倍を超える値まで飛び上がった後に、大きな振幅の、しかも緩やかに減衰振動する変化を引き起こしていることが解る。

図6と図7は、その同じ解の時間的経過を表現する為に、係数ベクトルとしての (X_0, X_c, X_s) 及び (Y_0, Y_c, Y_s) の変化を、3次元グラフとして立体的に描いたものである。乱れた変動と規則的な変化が、共存していることを示している。

今後は、更に多数のモード間の相互作用を取り入れた上で、初期条件やパラメータを変えて、数値実験を繰り返すことが望まれる。

文 献

- 1) 宗像健一：数理解析研究所講究録477(1983)203.
- 2) 宗像健一：数理解析研究所講究録661(1988)13.
- 3) 宗像健一：数理解析研究所講究録719(1990)58.
- 4) 宗像健一：数理解析研究所講究録800(1992)54.

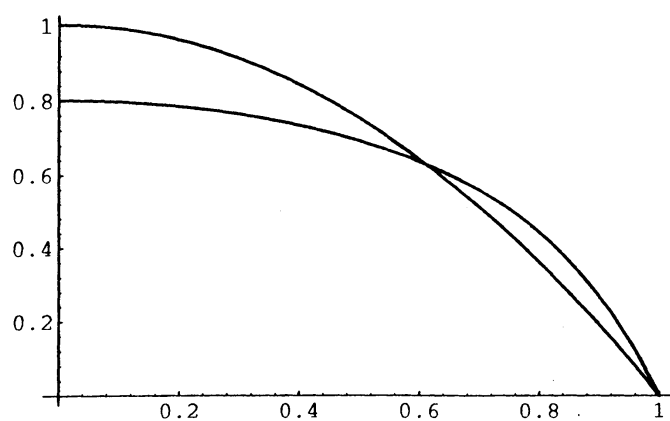


図1 層流速度分布の乱流への移行

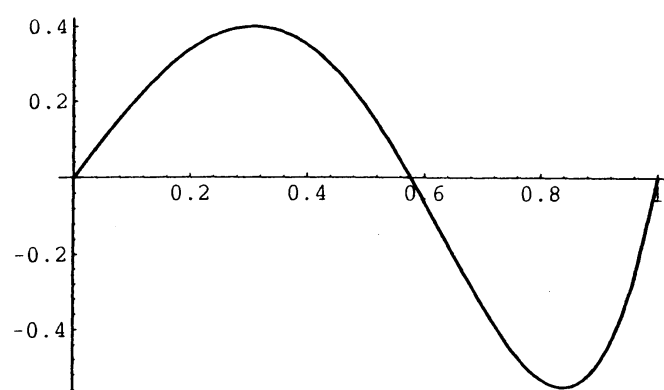
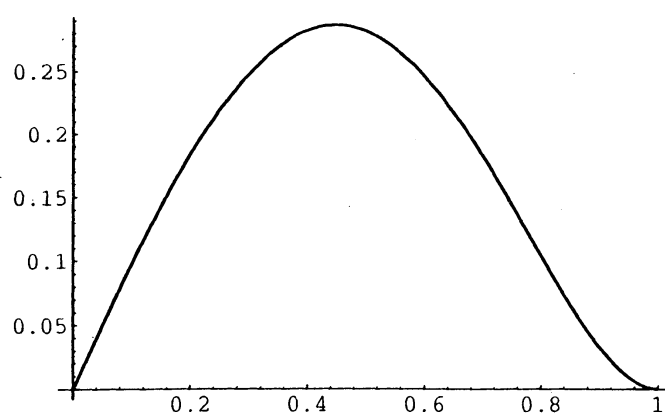


図2 u -座標関数と v -座標関数 ($n=0$, $\nu=1$)

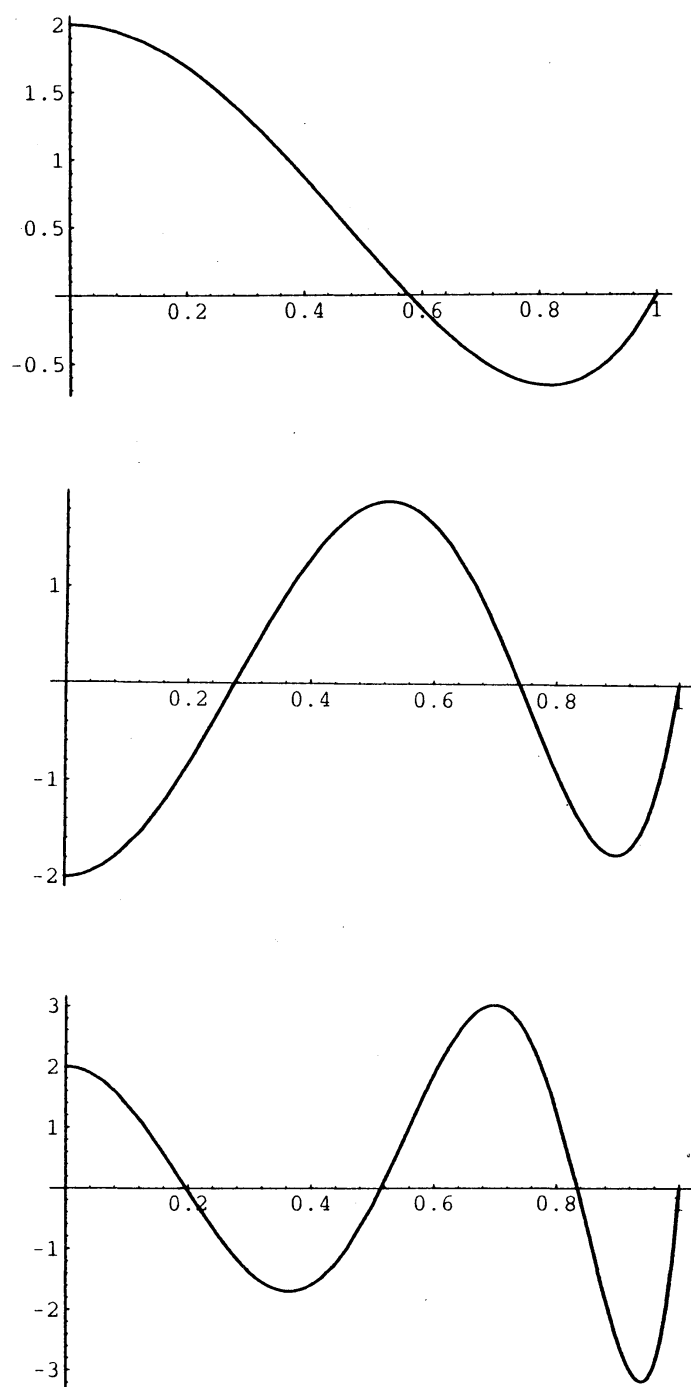


図3 w -座標関数 ($n=0, \nu=1, 2, 3$)

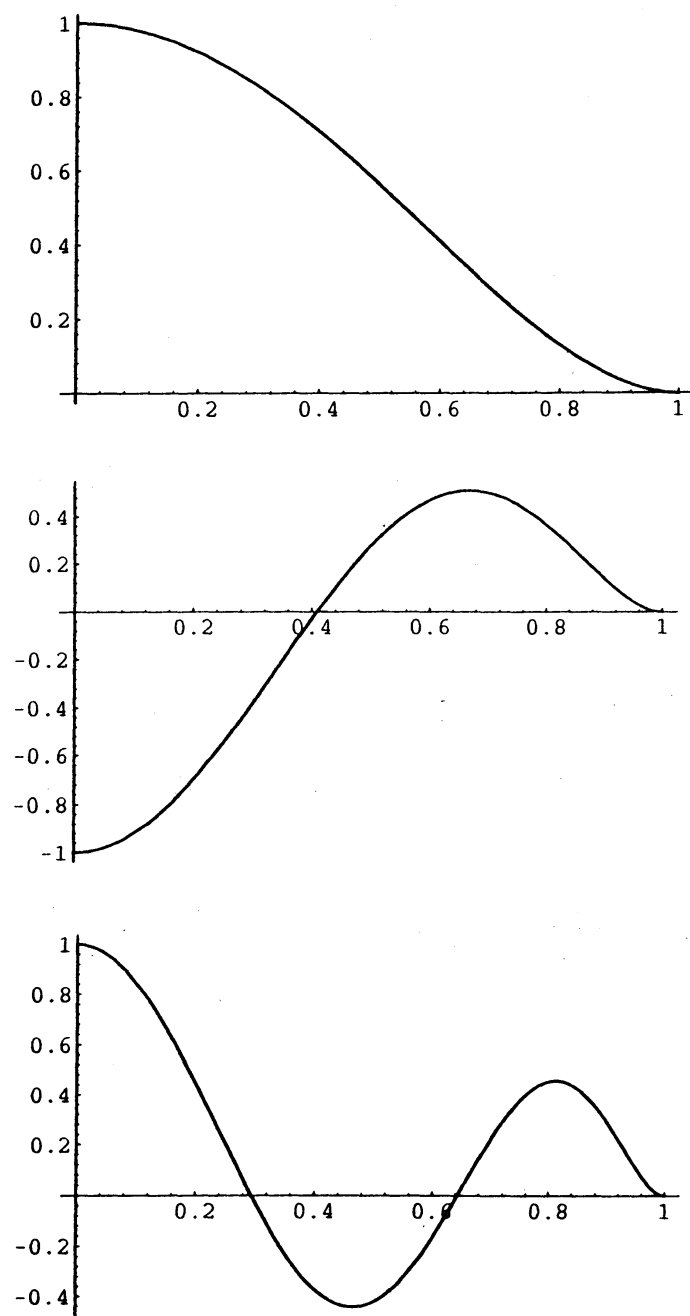


図4 ポテンシャル座標関数. ($n=0$, $\nu=1, 2, 3$)

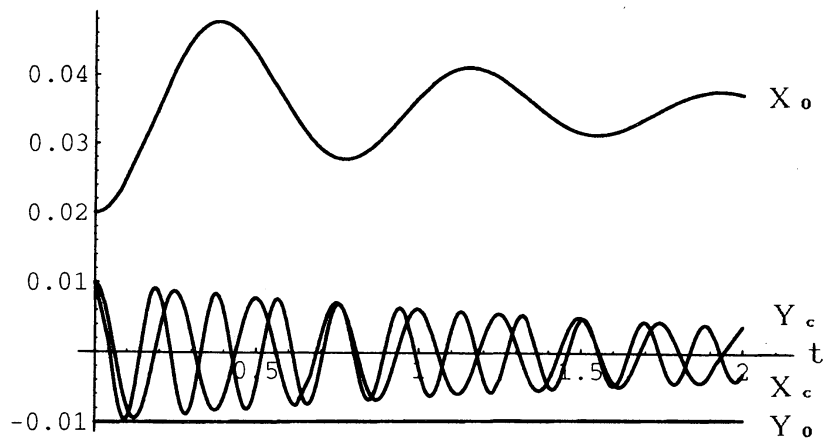


図5 攪乱速度成分の係数ベクトルの変化

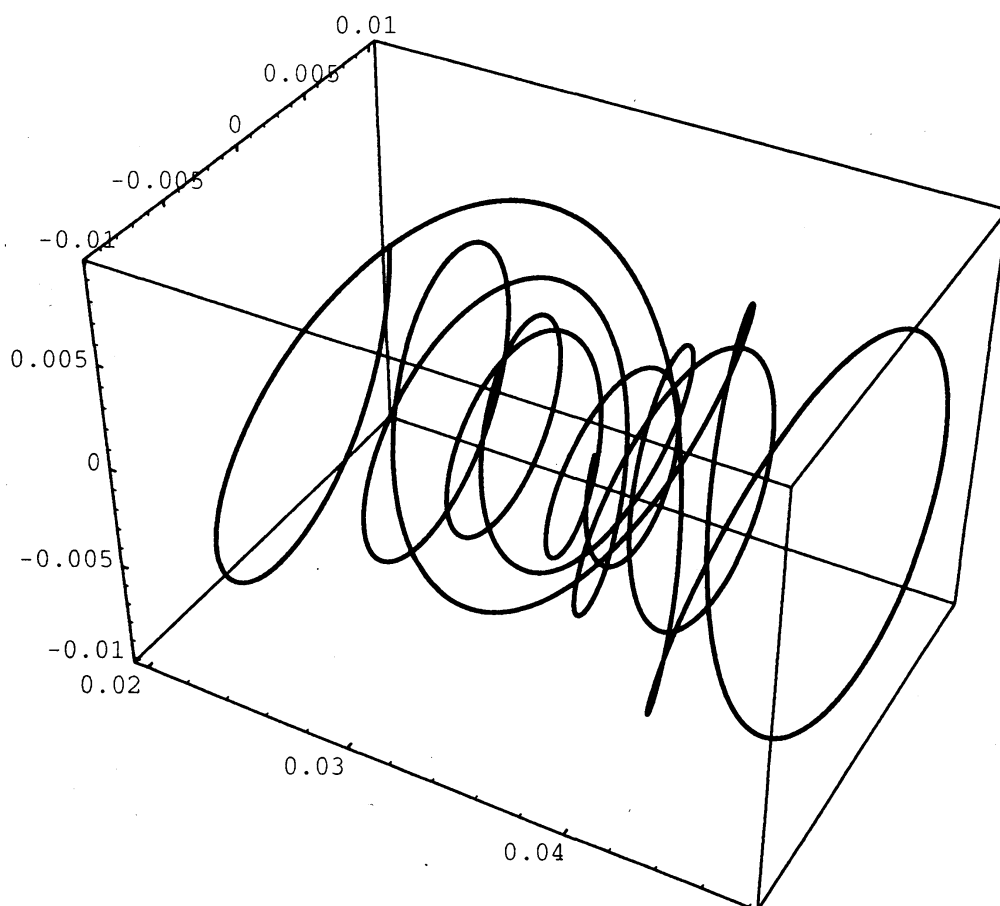


図6 係数ベクトル (X_o , X_c , X_s) の3次元グラフ

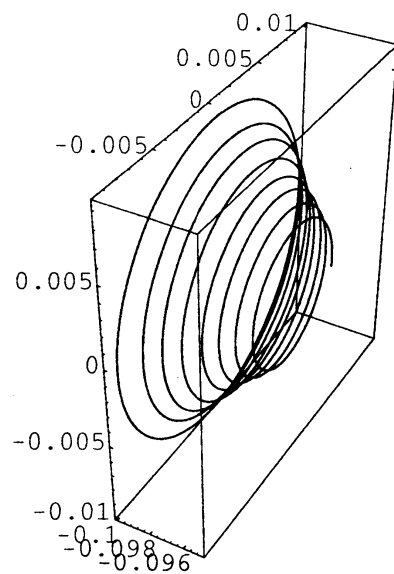
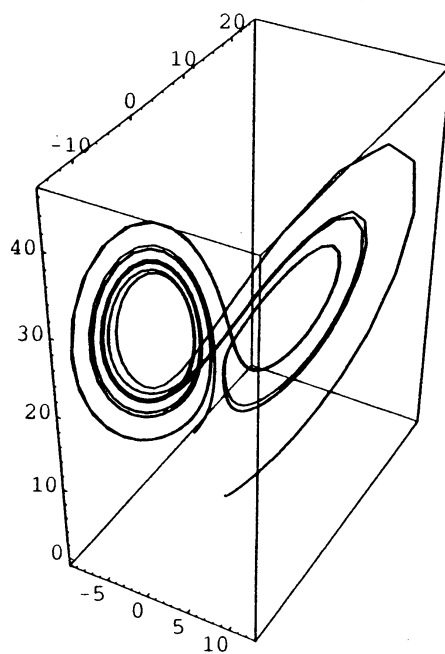


図7 係数ベクトル (Y_o , Y_c , Y_s) の3次元グラフ



熱対流における Lorenz 方程式のカオス解 (参考図)