

Subanalytic 幾何と PL 位相

名大養 塩田昌弘 (Masahiro Shiota)

問題 Subanalytic 集合の色々な位相的性質は, "subanalytic" のどの性質から生まれてくるか.

解 次に示すように, "analytic" によるのではなく, すべての subanalytic 集合の族が, 余り大き過ぎも, 小さ過ぎもせず, ある演算で閉じているから.

定義 $\mathcal{A}$ を次の条件を満たす, $\mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, \dots$, の部分集合の族とする.

(i) どんな $\mathbb{R}^n$ の代数的集合も $\mathcal{A}$ の元.

(ii) もし $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathcal{A}$ の元なら, $X_1 \cap X_2$, $X_1 - X_2 \subset \mathbb{R}^n$ も $X_1 \times X_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ も $\mathcal{A}$ の元.

(iii) $X \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathcal{A}$ の元とする. $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を, $p|_X$ が proper な射影とする. すると $p(X)$ は $\mathcal{A}$ の元.

(iv) $X \subset \mathbb{R}$ が $\mathcal{A}$ の元なら, 任意の点 $a \in X$ に対して a の $\mathbb{R}$ での近傍 $\cup$ と $b, c \in \mathbb{R}$ が存在して, $X \cap \cup = a$, $[a, b]$, $[b, a]$ 又は $[b, c]$ となる.

$\mathcal{A}$ の例の一番目は、すべての半代数的集合で、二番目は、すべての subanalytic 集合である。 $\mathbb{R}^n$ の部分集合で、有限個の Pfaffian 多様体に分割できるもの全体は、 $\mathcal{A}$ の例になると思われるが、証明はできていない (Van den Dries [2] を参照)。 $y = \exp(x \text{ の有理関数 })$ のグラフをすべて含む $\mathcal{A}$ は存在するか、どうか分らない [2]。もし、そんな $\mathcal{A}$ が存在すれば、 $y = \exp(-1/x^2)$ のグラフと x 軸の和集合を考えれば、Łojasiewicz の不等式は、 $\mathcal{A}$ で必ずしも、成り立たないことが分かる。

以下 $\mathcal{A}$ を一つ仮定して、 $\mathcal{A}$ の元は subanalytic 集合の位相的性質を、ほぼ、すべて持っていることを示したい。 r を正なる自然数とする。 $\mathcal{A}$ の元を $\mathcal{A}$ -集合と呼ぶ。 $\mathcal{A}$ -集合間の連続写像を、もしそのグラフが $\mathcal{A}$ -集合のとき、 $\mathcal{A}$ -写像と呼ぶ。 $\mathcal{A}$ -関数、 $\mathcal{A}$ -ベクトルバンドル等も自然に定義する。

(1) $X \subset \mathbb{R}^l$ と $Y \subset \mathbb{R}^m$ と $Z \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathcal{A}$ -集合とし、 f_1 と f_2 を X 上の $\mathcal{A}$ -関数、 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ を $\mathcal{A}$ -写像とする。 任意の有界集合 $B \subset \mathbb{R}^l$ に対して、 $f_1(X \cap B)$ と $f_2(X \cap B)$ と $f(X \cap B)$ は有界だとする。 そのとき、 $f_1 f_2$ と $f_1 + f_2$ は $\mathcal{A}$ -関数で、 $g \circ f$ は $\mathcal{A}$ -写像である。

$h = (h_1, \dots, h_m): X \rightarrow \mathbb{R}^m$ を写像とし、任意の有界集合 $B \subset \mathbb{R}^l$ に対して、 $h(X \cap B)$ が有界だと仮定する。 すると、 h が $\mathcal{A}$ -

写像である為の必要十分条件は、すべての h_i が ε -関数であること。

(2) $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でない ε -集合とする。すると X の閉包 $\overline{X}$ は ε -集合で、 X からの距離関数は ε -関数である。

(3) f を ε -開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^1 ε -関数とする。すると $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ は U 上の ε -関数である。

(4) $X \subset \mathbb{R}^n$ を C^1 ε -部分多様体とすると、接バンドル $TX \rightarrow X$ は ε -ベクトルバンドルである。

(5) $X \subset \mathbb{R}^n$ を m 次元 C^1 ε -部分多様体とする。 $G_{n,m}$ を $\mathbb{R}^n$ の中の m 次元部分空間全体のグラスマン多様体とする。自然に、 $G_{n,m}$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の中の代数的部分多様体とできる。そのとき、集合 $\{(x, T_x X) \in X \times G_{n,m}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$ は ε -集合になる。

(6) $X \subset \mathbb{R}^n$ と $Y \subset \mathbb{R}^n$ を ε -集合とし、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ を ε -写像とする。もし、任意の有界集合 $B \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 $f^{-1}(B)$ が有界なら、 $f(X)$ は ε -集合である。もし、同じ B に対して、 $f(X \cap B)$ が有界なら、 $f^{-1}(Y)$ は ε -集合である。

(7) $X \subset \mathbb{R}^n$ と $Y \subset \mathbb{R}^n$ を C^1 ε -部分多様体とし、 $f: X \rightarrow Y$ を C^1 ε -写像とする。任意の有界集合 $B \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 $f(X \cap B)$ は有界だと仮定する。すると、 f の特異点集合は ε -集合である。

(8) $X \subset \mathbb{R}^n$ を有界な ε -集合とする。すると、 X の連結成分

は有限個で、各成分は $\mathcal{K}$ -集合である。

(9) $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でない $\mathcal{K}$ -集合とする。すると、 $\overline{X} - X$ の次元は X の次元より小。($\dim \emptyset = -1$ と見なす。)

(10) $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でない $\mathcal{K}$ -集合とする。すると、 X の C^r 特異点集合は $\mathcal{K}$ -集合で、その次元は X の次元より小さい。よって X は $C^r \mathcal{K}$ -分割をもつ。

(11) $X \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathcal{K}$ -集合とし、 $\overline{X} - X$ は 0 を含むとする。すると、 $\mathcal{K}$ -曲線 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \overline{X}$ が存在して、 $\varphi(0) = 0$ かつ $\varphi((0, 1]) \subset X$ とできる。

(12) $X \subset \mathbb{R}^n$ と $Y \subset \mathbb{R}^m$ を空でない $C^r \mathcal{K}$ -部分多様体とし、 $Y \subset \overline{X} - X$ と仮定する。 X と Y が、そこで Whitney 条件を満たさない Y の点全体を Y' とする。すると Y' は $\mathcal{K}$ -集合で、次元は Y の次元より小。

(13) $X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトな $\mathcal{K}$ -集合とする。すると、多面体 $Y \subset \mathbb{R}^m$ と、 $\mathcal{K}$ -同相写像 $\varphi: Y \rightarrow X$ が存在する。

f を X 上の $\mathcal{K}$ -関数とする。すると、上の Y と φ を、 $f \circ \varphi$ が区分的に線型になるようにとれる。

さらに、 Y と φ は、次の意味で、一意的である。もし別の Y_1 と φ_1 が存在すれば、 Y から Y_1 への区分的に線型な同相写像 π が存在して、 $f \circ \varphi_1 \circ \pi = f \circ \varphi$ となる様にできる。

(14) r を、 r より小さい、負でない整数とする。 $X \subset \mathbb{R}^n$ と

$Y \subset \mathbb{R}^n$ を $C^r \mathcal{A}$ -部分多様体とし, $f: X \rightarrow Y$ を $C^{r'} \mathcal{A}$ -写像とする. すると, f は $C^{r'} \mathcal{A}$ -写像 g で近似できる. 位相は, r' 階までの $f-g$ の導関数が任意の正の $\mathcal{A}$ -関数より, 小さく取れる, そんな位相である.

(15) Thom の横断性定理の $\mathcal{A}$ の場合は成り立つ. 位相は上の位相である.

(16) r' を r より小さい, 正の自然数とする. $C^{r'} \mathcal{A}$ -部分多様体 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対し, 恒等写像に任意に近い, $C^{r'} \mathcal{A}$ -同相写像 π が存在して, $\pi(X)$ は $C^r \mathcal{A}$ -部分多様体になる.

(17) $X \subset \mathbb{R}^n$ を, コンパクトでない, 有界な, $C^r \mathcal{A}$ -部分多様体とする. するとコンパクトな, 境界付 $C^r \mathcal{A}$ -部分多様体 $Y \subset \mathbb{R}^n$ が一意的に存在して, X は Y の内部と $C^r \mathcal{A}$ -同相になる.

(18) $\mathbb{R}^n$ の有界な $C^r \mathcal{A}$ -部分多様体は, アフラインな非特異な実代数的集合と $C^r \mathcal{A}$ -同相である.

(19) f_1 と f_2 を $\mathcal{A}$ -集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ 上の $\mathcal{A}$ -関数とする. f_1 と f_2 の零点集合は同一, 又 f_1 が正になる X の点の集合は, f_2 のそれと同一と仮定する. すると, X の $\mathcal{A}$ -同相写像 π が存在して, $f_1 \circ \pi$ は f_2 と $f_2^{-1}(0)$ の近くで, 等しくなる.

(20) $\mathbb{R}^n$ 中の C^1 Whitney $\mathcal{A}$ -分割は, 局所的に, $\mathcal{A}$ -自明である.

(21) $M \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathcal{A}$ -部分多様体, X と Y を M の $\mathcal{A}$ -部分集合とする. ある M の C^1 同相写像が X を Y に移すと, 仮定する. す

ると, M の π -同相写像が存在して, それは X を Y に移す.
(C^1 級の π -同相写像が取れると, 思うが, 証明はできていない.)

(22) $X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトな非特異代数的集合, f_1 と f_2 を X 上の多項式関数とする. X の C^1 同相写像 π が存在して, $f_1 \circ \pi = f_2$ となると, 仮定する. すると X の π -同相写像 π' が存在して, $f_1 \circ \pi' = f_2$ とできる.

(19) ~ (22) は (13) の応用である. すべての結果の証明は [1] で書かれる.

参考文献

- [1]. M. Shiota, Subanalytic geometry and PL topology.
- [2]. L. Van Den Dries, Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp.)$, Logic Colloquium 1982, 99-121, Ed. by G. Lolli, G. Longo, A. Marja, North Holland, 1984.