

Wentzell の境界条件をみたす Markov 過程

京大 理 志 賀 徳 造

§. 0

Wentzell 型の境界条件をみたす拡散過程については、佐藤—上野の結果がある。それは、Wentzell 型の境界条件をみたす拡散過程と、境界上の Markov 過程が 1:1 に対応することを結論づけている。そこで、境界上の Markov 過程が存在するための条件を、Wentzell の境界条件の中に条件化することが残された重要な問題であった。

最近、Courrège, Bony, Priouret は 拡散過程より、広い枠組の中で、本質的には、微分方程式論の結果を用いることによって解決を与えている。

本報告は、この Courrège, Bony, Priouret の結果の紹介である。

§. 1 Singular operator

D : N -dim orientable manifold (C^∞) の domain

$\bar{D}$ は compact, ∂D には C^3 -class の滑らかさを仮定する。

$S(x, dy)$ が $\bar{D}$ 上の singular kernel であるとは 次の条件をみたす $\bar{D} \times \partial \bar{D}$ 上の kernel のことである。

(S₁) $S(x, xx) = 0$, $S(x, dy)$ は dy によって $\bar{D} - \{x\}$ 上の Radon measure

(S₂) 任意の local coordinate (U, χ) に対して

$U \cap \forall K$: compact

$\int_K S(x, dy) |\chi(y) - \chi(x)|^2$ は U 上で有界

関数の系 $\{\sigma_\alpha(x, y)\}_{(x, y) \in \bar{D} \times \bar{D}}$ を次のように構成して, 以後これを fix する

(V _{α}) (U_α) は $\bar{D}$ の 2 つの finite covering で $\bar{U}_\alpha \subset U_\alpha$

(U_α, χ_α) からの local coordinate 12 するものを選ぶ。

$(U_\alpha \times U_\alpha, \bar{D} \times \bar{D} - \bigcup_\alpha \bar{U}_\alpha \times \bar{U}_\alpha)$ は $\bar{D} \times \bar{D}$ の finite covering

これに於て σ の分解を $(\sigma_\alpha(x, y), f)$ として

$\sum \sigma_\alpha \equiv \sigma$ とおき, σ_α を locally unit function とし,

$0 \leq \sigma \leq 1$, $\text{supp } [\sigma_\alpha] \subset U_\alpha \times U_\alpha$,

$u \in C^1(\bar{D})$ に対して

$$\theta_x u(y) \equiv \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(x, y) \left[u(x) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) (\chi_{\alpha}^k(y) - \chi_{\alpha}^k(x)) \right]$$

によって定義された $\theta_x u$ を 1 次の Taylor 展開という。

次の形の作用素 S ($\mathcal{D}(S) = C^2(\bar{D})$) を singular operator という。

$$(S_1). \quad Su(x) = a(x)u(x) + \frac{\partial u}{\partial X} + \int_{\bar{D}} S(x, dy)(u(y) - \theta_x u(y))$$

$$(S_2). \quad S1 \leq 0$$

==に、 X は vector field on $\bar{D}$ である。

さらに、 $S; C^2(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$ continuous と仮定する。

A は $\bar{D}$ 上の uniformly elliptic operator of 2nd order とする。

ここで取り扱う Markov 過程の特性作用素は次の形のものである。

$$A + S = W$$

W は elliptic operator に関する最大値原理がそのまま成り立つことを示そう。

Prop. 1

$$u \in C^2(\bar{D}) \quad \sup u = u(x_0) \geq 0 \quad \exists x_0 \in D$$

ならば、

$$Wu(x_0) \leq 0$$

☹ $Au(x_0) \leq 0$ はよく知られてゐる

$$\begin{aligned} Su(x_0) &= a(x_0)u(x_0) + \int_{\bar{D}} S(x_0, dy) (u(x_0) - \sigma(x_0, y)u(x_0)) \\ &= u(x_0) S1(x_0) \leq 0 \end{aligned}$$

Prop. 2

$$u \in C^2(\bar{D}) \quad Wu \geq 0 \text{ in } \bar{D}$$

$\sup u = u(x_0) \geq 0, \exists x_0 \in D$ ならば u は定数である.

☹ $D \subset \mathbb{R}^n$ の場合に示せば, manifold の場合に修正することは容易.

今, u が定数でないとは定しよう.

$M = \{x \in \bar{D} ; u(x) = \sup u\} \neq \bar{D}$ だから, M と唯一交点を持つ $\overline{B(0, r)}$ が存在する. その球を $B(0, r)$ としよう.

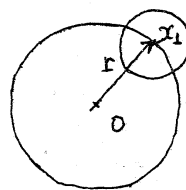
$$B(0, r) \cap M = \{x_1\}, \quad |x_1| = r$$

その時, 次のような関数が存在する.

$$v \geq 0 \text{ in } B(0, r)$$

$$v \leq 0 \text{ in } B(0, r)^c$$

$$Wv(x_1) > 0$$



この v は次のようにして構成される.

$$v_K(x) = e^{-K|x|^2} - e^{-Kr^2} \text{ は前の2条件をみたしている.}$$

更に, Av_K を具体的に計算すれば, A が uniformly elliptic ($\bar{D}$: compact) より下からの評価がえられ, 更に singular

kernel の性質を考慮して, K を定めればよい。

この v に対して,

$$\exists \alpha > 0, \quad Wv(x) > 0 \quad \text{in } x \in B(x_1, \alpha)$$

$$u_\lambda(x) \equiv u(x) + \lambda v(x) \quad (\lambda > 0) \quad \text{とおけば, } Wu_\lambda(x) > 0 \\ x \in B(x_1, \alpha)$$

ところが u_λ は $B(0, r) \cap B(x_1, \alpha)$ で $\sup u$ を attain
するように, λ をえらび"こと"ができる

i.e. $\sup_{x \in B(0, r) \cap B(x_1, \alpha)^c} u(x) < \sup u$, $u_\lambda(x_1) = \sup u$ に注意すればよい。

ところが, これは Prop. 1 に矛盾する。

Prop. 3

$$u \in C^2(\bar{D}) \quad Wu(x) \geq 0, \quad x \in \bar{D},$$

$u(x_1) = \sup u \quad \exists x_1 \in \partial D$ ならば, u は定数であるか,

$$\text{又は } \frac{\partial u}{\partial n}(x_1) < 0 \quad (\text{== } n \text{ は内向き法線を表わす})$$

(証明 略)

Prop. 3 の証明は Prop. 2 とほとんど同じ方法で出来る。

(注) Prop. 1 より W は $C(\bar{D})$ の中で closable である

$\{W, \mathcal{D}(W) = C^2(\bar{D})\}$ の closure を $\bar{W}$ と表わす。

§.2 Minimal resolvent

$\mathbb{R}$ 回導関数 α λ -次 Hölder continuous であるような関数の空間は, 適当なノルム (Hölder norm) により Banach 空間になる. その空間を $C^{\alpha, \lambda}$ によって表わす.

次の事実は微分方程式論において基本的である.

Lemma. 1 [Dirichlet 問題]

$A \in \text{class } C^{\alpha, \lambda}$ の elliptic operator とする (i.e. $A: C^{2, \lambda} \rightarrow C^{\alpha, \lambda}$)

とするとき

$$C^{2, \lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{\alpha, \lambda}(\bar{D}) \times C^{2, \lambda}(\partial D)$$

$$u \longmapsto (Au, [u]_{\partial D}) \text{ は isomorph である} \\ (1:1, \text{ onto の意})$$

Lemma. 2 [oblique derivative を含む境界問題]

$\tau \in \partial D$ 上の class $C^{1, \lambda}$ なる vector field とする

$\mu \in C^{1, \lambda}(\partial D)$ ならば

$$C^{2, \lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{\alpha, \lambda}(\bar{D}) \times C^{1, \lambda}(\partial D)$$

$$u \longmapsto (Au, \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau}) \text{ は isomorph である.}$$

次に Index theorem の簡単な形を述べる.

E, F , 各々 Banach 空間.

T を E から F への有界 operator とする.

もし, $\dim [\text{Ker}(T)] < +\infty$, $\text{codim} [\text{Im}(T)] < +\infty$

ならば "T は index をもつ" といふ。

$\chi(T) \equiv \dim[\text{Ker}(T)] - \text{codim}[\text{Im}(T)]$ を T の index.

という。

Lemma. 3

$T: E \rightarrow F$ bdd. かつ isomorph.

$K: E \rightarrow F$ compact operator とき $T+K$ は
"index 0" をもつ.

⊙ T^{-1} は $F \rightarrow E$ の bdd op. であるから $T^{-1}K \equiv H$ は
 $E \rightarrow E$ の compact operator.

従って $I+H$ が "index 0" をもつことを示さねばよい。

H compact であるから $\dim[\text{Ker}(I+H)] = \dim[\text{Ker}(I+H^*)] < +\infty$

$$\begin{aligned} \dim[\text{Ker}(I+H^*)] &= \dim[f; (f, (I+H)x) = 0, x \in E] \\ &= \text{codim}[(I+H)x, x \in E] \end{aligned}$$

従って $I+H$ は "index 0" をもつ。

Theorem 1

$S; C^2(\bar{D}) \rightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D})$ continuous.

その時 $\forall d > 0$ に對して

$$C^{2,\lambda}(\bar{D}) \rightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial D)$$

$u \mapsto ((W-d)u, [u]_{\partial D})$ は isomorph である

⊙ S は $C^{2,\lambda}(\bar{D}) \rightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \wedge$ の compact operator.

$u \mapsto ((W-d)u, [u]_{\partial D})$ は次の三つの写像の和である。(1) $u \mapsto (Au, [u]_{\partial D})$ (2) $u \mapsto (Su, 0)$
 (3) $u \mapsto (-du, 0)$ (1) は isomorph. (2), (3) は compact
 だから, Lemma. 3 により $u \mapsto ((W-d)u, [u]_{\partial D})$ は
 "index 0" をもつ.

故に, 1:1 を示せば, この定理は証明出来たことになる.

$$(W-d)u=0, [u]_{\partial D}=0 \Rightarrow u=0 \text{ であること.}$$

Prop. 1 より 直ちにわかる.

(注) Th. 1 は $W \neq 0$ ならば, $d=0$ の時も正しい. (⊙ Prop. 2)

Theorem 2

(i) $\forall d > 0, \forall f \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$ に対して

$$\begin{cases} (d-W)u=f \\ [u]_{\partial D}=0 \end{cases} \text{ は } C^{2,\lambda}(\bar{D}) \text{ の中に unique solution をもつ.}$$

この solution を $u = G_d^\alpha f$ と表わす.

(ii) G_d^α は $C(\bar{D})$ 上の sub-Markov resolvent operator に
 拡張出来る.

(iii) $\forall f \in C(\bar{D})$ に対して $u = G_d f$ は

$$\begin{cases} (d-\bar{W})u=f \\ [u]_{\partial D}=0 \end{cases} \text{ の unique solution である.}$$

(iv) for $\forall f \in C_0 \equiv C(\bar{D}) \cap \{u : [u]_{\partial D} = 0\}$

$$\|\alpha G_\alpha f - f\| \longrightarrow 0 \quad \text{as } \alpha \rightarrow \infty$$



(i) は Th. 1 より明らか. (ii) は G_α が $C^{0,\gamma}(\bar{D})$ 上 ε positive sub Markov であることと示せば十分. それは Prop. 1 から容易にわかる.

(iii), W の closable だから, closure の定義により.

(iv) $f \in C_0^2(\bar{D})$ に對して, $(\beta - W)f \equiv g$ とおくと

$$[f]_{\partial D} \equiv 0 \text{ から } f = G_\beta^0 g.$$

$$\|\alpha G_\alpha f - f\| = \left\| \frac{\beta}{\alpha - \beta} G_\beta g \right\| + \left\| \frac{\alpha}{\alpha - \beta} G_\alpha g \right\| \longrightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow \infty)$$

従って $f \in C_0(\bar{D})$ についても, 明らかになり立つ.

Yosida-Hille の定理により, G_α^0 には $C_0(\bar{D})$ 上の continuous semi-group $\{T_t^0\}$ が対応する.

Theorem 3

(i) $\alpha > 0$, $\varphi \in C^{2,\gamma}(\partial D)$ に對して

$$\begin{cases} (\alpha - W)u = 0 \\ u(x) = \varphi(x) \quad x \in \partial D \end{cases} \text{ は } C^{2,\gamma}(\bar{D}) \text{ の中 unique solution}$$

をもつ. これを $u = H_\alpha \varphi$ と表わす

(ii) H_α は $C(\partial D) \longrightarrow C(\bar{D})$ への positive contraction operator に拡張出来る

- (iii) $H_2 \varphi$ が $C^2(\bar{D})$ に属し、 $H_2 \varphi$ が ∂D 上の実 x_0 で、
 nonnegative maximum をとれば、 $H_2 \varphi$ は定数であるか、
 又は $\frac{\partial}{\partial n} H_2 \varphi(x_0) < 0$ である。
 (⊙) (i), (ii) は Th. 2 と殆んど同じ。
 (iii) は Prop 3 より容易にわかる。

§. 3 Wentzell の境界条件について.

S と同じようにして、境界上の singular operator T を定義する。

$\partial D \times \beta \bar{D}$ 上の kernel $t(x', dy)$ は、次の条件 $(W_1), (W_2)$ を満たすとき、境界上の singular kernel という。

$$(W_1) \quad t(x', x') = 0$$

$t(x', dy)$ は dy について $\bar{D} - \{x'\}$ 上の Radon measure

$(W_2) \quad \forall (U, \chi)$: 境界を表現する local coordinate. 12376

$$\int_K t(x', dy) \left[\chi^N(y) - \sum_{i=1}^{N-1} [\chi^i(y) - \chi^i(x')]^2 \right] \leq \epsilon$$

($\Rightarrow \exists K$ は U の compact subset) は U 上有界

(注) 境界を表現する local coordinate (U, χ) , $U \cap \partial D \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \bar{D} \text{ ならば, } & \chi^N(x) \geq 0 \text{ であって,} \\ x \in \partial D & \Leftrightarrow \chi^N(x) = 0 \text{ なる座標系.} \end{cases}$$

境界を表現する座標系 (U, χ) は、各境界点に対して

常に存在するので、境界点を含む local coordinate は、いつも

境界を表現するものを選んでおく。

次のように定義される $\Theta_{x'}^* u$ を境界上の 1 次の Taylor 展開という。

$$\Theta_{x'}^* u(y) = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(x, y) \left[u(x) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial \chi_{\alpha}^j}(x') (\chi_{\alpha}^j(y) - \chi_{\alpha}^j(x')) \right]$$

さらに、境界上の singular operator T は、次のように定義される。

$u \in C^2(\bar{D})$ に対して

$$Tu(x') = \eta(x') u(x') + \frac{\partial u}{\partial Z}(x') + \int_{\bar{D}} t(x', dy) [u(y) - \Theta_{x'}^* u(y)]$$

$$T1(x') \leq 0 \quad \forall x' \in \partial D, \quad \text{where } Z: \text{vector field on } \partial D$$

Def L が Wentzell の境界条件であるとは

$$\mathcal{D}(L) = C^2(\bar{D}) \ni u \text{ に対して}$$

$$Lu(x') = Qu(x') + \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x') Wu(x') + Tu(x')$$

Q : elliptic operator on ∂D .

$$\mu \geq 0, \quad \delta \geq 0$$

つぎに、以後考える L の class を設ける。

L : "transversal"

$$\iff \forall x' \in \partial D \text{ に対して}$$

$$\mu(x') > 0 \quad \text{or} \quad \delta(x') > 0 \quad \text{or} \quad t(x', D) = \infty$$

L : "w-transversal"

$$\iff \forall x' \in \partial D \text{ に対して, } \mu(x') + \delta(x') + |T1(x')| + t(x', D) \neq 0$$

L: "(L.1) を満たす"

$$\iff \begin{cases} Q: \text{uniformly elliptic on } \partial D \text{ かつ class } C^{0,\lambda} \\ \mu, \delta \in C^{0,\lambda}(\partial D) \\ T: C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\partial D): \text{continuous} \end{cases}$$

L: "(L.2) を満たす"

$$\iff \begin{cases} Q = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad \tau \text{ は class } C^{1,\lambda} \text{ の vector field on } \partial D \\ \mu, \delta \in C^{1,\lambda}(\partial D) \\ T: C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{1,\lambda}(\partial D): \text{continuous} \end{cases}$$

Prop. 4

$$u \in C^2(\bar{D}) \quad \sup u = u(x') \geq 0 \quad \exists x' \in \partial D$$

$$\Rightarrow Q u(x') + \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + T u(x') \leq 0$$

$$\because T u(x') \leq 0 \text{ は Prop. 1 に従う.}$$

Prop. 5

$$L: w\text{-transversal} \quad u \in C^2(\bar{D}) \quad L u \geq 0, \sup u > 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in \bar{D} : u(x) = \sup u \text{ かつ } W u(x) \leq 0$$

$\because$

D で $\sup$ を attain する時は, Prop. 1 から明らかだから

∂D で $\sup$ を attain する時のみ考える. $x' \in \partial D, u(x') = \sup u$.

$$0 \leq Lu(x') = \underbrace{Qu(x')}_0 + \underbrace{\mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x')}_0 + \underbrace{Tu(x')}_0 - \delta(x') Wu(x')$$

$\delta(x') \neq 0$ ならば, $Wu(x') \leq 0$ かつ $x' \in \partial D$ ならばよい.

$$\delta(x') = 0 \text{ ならば } \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') = 0, Tu(x') = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x') = 0 \text{ ならば } \text{Prop. 5} \Rightarrow Au(x') \leq 0 \therefore Wu(x') \leq 0$$

そうではないならば $\mu(x') = 0$, ところが $Tu(x') = 0$ である

これは L の transversality に矛盾する

Prop. 6 (Prop. 5 の Corollary)

L : w -transversal, $\beta > 0$

$$u \in C^2(\bar{D}), Lu \geq 0, (W - \beta)u \geq 0$$

$$\Rightarrow u \leq 0$$

Prop. 7

$$\forall x' \in \partial D \text{ に対して } \mu(x') + t(x', D) + |T1(x')| \neq 0$$

$$W1 \neq 0 \text{ とする. その時 } u \in C^2(\bar{D}), Lu \geq 0, Wu \geq 0$$

$$\Rightarrow u \leq 0$$

⊙ $\sup u > 0$ とする. $\bar{D}$ の中で $\sup$ を attain すれば

Prop. 2 より $u = \text{const}$, $W1 \leq 0$. $W1 \neq 0$ だから仮定に矛盾.

$$\sup u = u(x') > 0, x' \in \partial D \text{ とすると}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x') < 0 \text{ (by Prop. 3) 従って Prop. 5 と同様の}$$

議論により L の (w) -transversality に矛盾する。

この Prop 4~7 と Index 12 の Lemma 3 を用いれば、
次の形の Main result を得る。

Theorem. 4

A : uniformly elliptic on $\bar{D}$ の class $C^{0,\lambda}$

S : $C^2(\bar{D}) \rightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D})$ への continuous operator

L は " $(L, 1)$ をみたす"。

$\Rightarrow$

$$1^\circ, \quad C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$$

$u \longmapsto (Wu, Lu)$ は "index 0" をもつ。

2°, さらに L : weak-transversal ならば, $\beta > 0$ に對し

$u \longmapsto ((W-\beta)u, Lu)$ は isomorph である。

3° $\forall x' \in \partial D$ に對し, $\mu(x') + |T_1(x')| + t(x', D) \neq 0$ で

$W1 \neq 0$ ならば, $u \longmapsto (Wu, Lu)$ は isomorph

(Proof)

まず $u \longmapsto ((A-\beta)u, (Q-\beta))$ が isomorph であることを

注意しよう。この map は, $u \longmapsto ((A-\beta)u, [u]_{\partial D})$ と

$(u, \varphi) \longmapsto (u, (Q-\beta)\varphi)$ を続けたものである。

ところが ∂D は compact だから $\varphi \longmapsto (Q-\beta)\varphi$ は

$C^{2,\lambda}(\partial D) \rightarrow C^{0,\lambda}(\partial D)$ への写像として, isomorph

従って, Lemma 1 と合すれば, 2つの写像は共に isomorph。

また、 $u \mapsto (Su, 0) \quad u \mapsto (0, \mu \frac{\partial u}{\partial n}) \quad u \mapsto (0, Tu)$

$u \mapsto (\beta u, 0) \quad u \mapsto (0, \beta [u]_{\partial D})$ はいずれも

$C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$ は compact operator

だから Lemma 3 により

$u \mapsto (Wu, Qu + \mu \frac{\partial u}{\partial n} + Tu)$ は index 0 をもつ

更に $(f, g) \mapsto (f, g - \delta[f]_{\partial D})$ は $C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$

上の isomorphism から、最後の2つの写像を続けければ

$u \mapsto (Wu, Lu)$ は index 0 をもつことがわかる。

2°: "index 0" をもつことは、1°よりわかる。

従って、1:1を示せば十分。

とるが L ; ω -transversal 故に Prop. 6 より明らか。

3°は Prop. 7 から容易にわかる。

Theorem 4 により、

$\beta > 0, \quad f \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$ に對して

$$\begin{cases} (W - \beta)u = -f \\ Lu = 0 \end{cases} \text{ は } C^{2,\lambda}(\bar{D}) \text{ の中に unique solution をもつ}$$

これを $u = G_\alpha f$ と表わせば、

G_α^L は $C(\bar{D})$ 上の sub-Markov resolvent operator.

を定義することは、Theorem 2 と同様にして、わかる。

Theorem 5

A, S は Th. 4 と同じもの

L は "(L.2) をみたす"

$$\forall x' \in \partial D \text{ に対し } \mu(x') + t(x', D) + |T \perp(x')| \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\forall \beta > 0 \text{ に対し } C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{1,\lambda}(\partial D)$$

$$u \longmapsto ((W - \beta)u, \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + Tu)$$

は isomorph である.

証明は Th. 4 と全く同じ方法で, Lemma 2, Lemma 3 を用いれば容易に示せる

Cor of Th. 5

$$\begin{cases} (W - \beta)u = -f \\ Lu = -g \end{cases} \quad f \in C^{1,\lambda}(\bar{D}), g \in C^{1,\lambda}(\partial D)$$

は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution をもつ

☺ $T' \equiv T - \beta \delta I$ は singular operator on ∂D

Th. 5 において, T の代りに T' を適用すれば,

$$\begin{cases} (W - \beta)u = -f \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + T'u = -g - \beta [f]_{\partial D} \end{cases} \text{ は } C^{2,\lambda}(\bar{D}) \text{ の中にある.}$$

unique solution をもつ. これは同時に, 問題の解である。

従って、 L が“(L.2)をみたす”場合にも、sub-Markov resolvent G_λ^L は対応する。

次に、 G_λ^L に $C(\bar{D})$ 上の continuous semi-group が果して、対応するか？が問題になるが、そのためには、Hille-吉田の理論により、 $G_\lambda^L(C(\bar{D}))$ が $C(\bar{D})$ の中で dense であることが必要十分である。

この問題に対しては、佐藤-上野の結果がそのまま成立つ。

Theorem 6

L が (L.1) または (L.2) をみたし、更に transversal ならば、 $G_\lambda^L(C(\bar{D}))$ は $C(\bar{D})$ の中で dense である。

従って、 G_λ^L には、 $C(\bar{D})$ 上の conti. semigroup が対応する。

Th. 6 は、 G_λ^L の range が $C(\bar{D})$ の中で dense であるためには、transversal であることが十分であることを云っているのだが、この証明は、佐藤-上野の方法が全くそのまま、成立つので、省略する。

これで、一応 semi group の存在するための条件を、 L により条件づけられたが (L.1), (L.2) の中で、 T の regularity の条件が具体的にない。それは、 S についても同様であるが、

従って, S は T の regularity に因する条件を具体化する必要がある。

§.4. Singular operator の regularity について

A は $\bar{D}$ 上の uniformly elliptic operator of 2nd order であるから, $\bar{D}$ には, Riemann metric が入る。

$\overline{xy}$ は, その意味での geodesic distance

Lemma 4 [$\Theta_x u$ の性質]

$$(1) \exists C > 0 \quad \forall u \in C^2(\bar{D}) \quad |u(y) - \Theta_x u(y)| \leq C \|u\|_2 \overline{xy}^2$$

$$(2) \exists C > 0 \quad \forall u \in C^2(\bar{D}) \quad |\Theta_x u(y) - \Theta_{x'} u(y)| \leq C \|u\|_2 \overline{xx'}$$

== 12, $\|\cdot\|_2$ は $C^2(\bar{D})$ の norm

これは $D \subset \mathbb{R}^N$ の場合に示して, あとは, 適当に修正すればよい。
 D が有界領域の場合は直接計算すれば容易に示される。

Theorem 7

$\alpha > 0$, $0 < \mu < 1$, $\overset{M}{\neq} : \text{real}$ $C > 0$ が存在して

$$(a) \int_{B(x, r)} S(x, dy) \overline{xy}^2 \leq C r^\alpha$$

$$(b) \int_{C[B(x, \rho) \cup B(x', \rho)]} |S(x, dy) - S(x', dy)| \leq C \overline{xx'}^\mu \frac{1}{\rho^{\mu M}}$$

$$\implies \exists 0 < \lambda < 1$$

$u \mapsto \int S(x, dy) [u(y) - \Theta_x u(y)]$ は $C^2(\bar{D}) \rightarrow C^0(\bar{D})$; conti.

(Proof)

 $0 < \exists \lambda < 1$ $\overline{\alpha\alpha'}$ が十分小さいとすると.

$$\left| \int S(\alpha, dy) [u(y) - \theta_x u(y)] - \int S(\alpha', dy) [u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$$

$$\leq C \|u\|_2 \overline{\alpha\alpha'}^\lambda \text{ であることを示せば十分.}$$

$$\overline{\alpha\alpha'} = \varepsilon < 1, \quad 0 < \delta < 1.$$

$$I_1 = \left| \int_{B(x, \varepsilon^\delta) \cup B(x', \varepsilon^\delta)} S(\alpha, dy) [u(y) - \theta_x u(y)] \right|$$

$$I_2 = \left| \int_{B(x, \varepsilon^\delta) \cup B(x', \varepsilon^\delta)} S(\alpha', dy) [u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$$

$$I_3 = \left| \int_{C[B(x, \varepsilon^\delta) \cup B(x', \varepsilon^\delta)]} S(\alpha, dy) [u(y) - \theta_x u(y)] - S(\alpha', dy) [u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$$

とあると

$$\left| \int S(\alpha, dy) [u(y) - \theta_x u(y)] - \int S(\alpha', dy) [u(y) - \theta_{x'} u(y)] \right|$$

$$\leq I_1 + I_2 + I_3.$$

$$B(x, \varepsilon^\delta) \cup B(x', \varepsilon^\delta) \subset B(x, 2\varepsilon^\delta), B(x', 2\varepsilon^\delta) \text{ に注意して}$$

Lemma 4 (i) と (a) を用いて

$$I_1 \leq C_1 \|u\|_2 \int_{B(x, 2\varepsilon^\delta)} S(\alpha, dy) \overline{\alpha y}^2 \leq C_2 \|u\|_2 \varepsilon^{2\delta}$$

$$I_2 \leq C_2 \|u\|_2 \varepsilon^{2\delta} \text{ も同様である.}$$

$$I_3 \leq \int_{C[B(x, \varepsilon^\delta) \cup B(x', \varepsilon^\delta)]} |S(\alpha, dy) - S(\alpha', dy)| |u(y)| + \int_{\text{" "}} S(\alpha, dy) |\theta_x u(y) - \theta_{x'} u(y)|$$

$$+ \int_{\text{" "}} |S(\alpha', dy) - S(\alpha, dy)| |\theta_{x'} u(y)|$$

$$\text{第1項} \leq C_4 \overline{xx'}^\mu \frac{1}{\varepsilon^{\delta N}} \|u\|_2 = C_4 \varepsilon^{\mu - \delta N} \|u\|_2 \quad (\text{⊙} \downarrow \text{注意 (b)})$$

$$\text{第2項} \leq C_5 \|u\|_2 \overline{xx'} \int_{C(B(x, \varepsilon^\delta))} S(x, dy) \leq C_6 \|u\|_2 \varepsilon^{1-2\delta}$$

⊙ Lemma 4 (2) と

$$\int_{C(B(x, \varepsilon^\delta))} S(x, dy) \leq C \varepsilon^{-2\delta} \quad \text{に注意すればよい。}$$

$$\text{すなわち} \int S(x, dy) \overline{xy}^2 \leq C \quad (S(x, dy) \text{ の定義!!}) \text{ より出る}$$

$$\text{第3項} \leq C_7 \|u\|_2 \varepsilon^{\mu - \delta N} \quad \text{は 第1項と同じ。}$$

$$\therefore I_3 \leq C_8 \|u\|_2 (\varepsilon^{\mu - \delta M} + \varepsilon^{1-2\delta})$$

$$\text{故に} \quad I_1 + I_2 + I_3 \leq C_9 \|u\|_2 (\varepsilon^{\alpha\delta} + \varepsilon^{\mu - \delta M} + \varepsilon^{1-2\delta})$$

$0 < \mu - \delta N < 1$ なるように δ を定め、更に $\alpha\delta < 1$ なるようにも出来る。 $\lambda = \inf(\alpha\delta, \mu - \delta M, 1 - 2\delta)$ とおけば

$$I_1 + I_2 + I_3 \leq C_{10} \|u\|_2 \varepsilon^\lambda \quad \text{となる。}$$

Cor of Th. 7

$$Su = cu + \frac{\partial u}{\partial X} + \int S(x, dy) [u(y) - \theta_2 u(y)]$$

C, X の α と λ は class $C^{0,\lambda}$ とすると。

$$C^2(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D})$$

$u \longmapsto Su$ は continuous である。

さらに、Th. 7 の条件を満たす S は、具体的にどんな形のものがあるかを、次の Th で述べる。

Theorem. 8

$m(dy)$; A_{12} induce the Riemann volume element

$$(1^\circ) \quad K(x, y) \leq C \quad \forall x, \text{ almost all } y$$

$$(2^\circ) \quad |K(x, y) - K(x', y)| \leq C \overline{xx'}^\mu \quad \forall x, \forall y' \text{ almost all } y$$

その時 $S(x, dy) = \frac{K(x, y)}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} m(dy)$ は Th. 7 の仮定を満たす。

(Proof)

(a) $\tilde{m}(\partial B(x, r))$ を 球面 $\partial B(x, r)$ の面積とすると空間 $\overline{D}$

は compact だから $\exists K_1 r^{N-1} \leq \tilde{m}(\partial B(x, r)) \leq K_2 r^{N-1}$

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} S(x, dy) \overline{xy}^2 &\leq C \cdot \int_{B(x, r)} \frac{m(dy)}{\overline{xy}^{N-\alpha}} \leq C' \int_0^r \frac{1}{t^{N-\alpha}} \cdot t^{N-1} dt \\ &\leq C' \int_0^r t^{-(1+\alpha)} dt = C'' r^\alpha \end{aligned}$$

(b) $N+2-\alpha > 0$ としてよい。

$$\begin{aligned} &\int_{C[B(x, \rho) \cup B(x', \rho)]} |S(x, dy) - S(x', dy)| \\ &= \int_{C[B(x, \rho) \cup B(x', \rho)]} \left| \frac{K(x, y)}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{K(x', y)}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right| dm(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{K(x, y)}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{K(x', y)}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right| &\leq \frac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} |K(x, y) - K(x', y)| \\ &\quad + |K(x', y)| \left| \frac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{1}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right| \end{aligned}$$

$$\text{第1項} \leq C \frac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} \overline{xx'}^\mu \leq C \frac{1}{\rho^{N+2-\alpha}} \overline{xx'}^\mu$$

$N+2-\alpha = k \vee \quad 0 < \nu < 1$ なる自然数 k を選ぶ。

$$\left| \frac{1}{\overline{xy}^{k\nu}} - \frac{1}{\overline{x'y}^{k\nu}} \right| = |\overline{x'y}^{-\nu} - \overline{xy}^{-\nu}| \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \geq 1}} \frac{1}{\overline{xy}^{i\nu} \overline{x'y}^{j\nu}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k |\overline{x'y}^\nu - \overline{xy}^\nu| \frac{1}{(\overline{xy} \wedge \overline{x'y})^{(k+1)\nu}} \\
&\leq k \overline{xx'}^\nu \frac{1}{(\overline{xy} \wedge \overline{x'y})^{N+2-d+\nu}} \quad \left(\because 0 < \nu < 1 \text{ かつ } \frac{1}{|\overline{x'y}^\nu - \overline{xy}^\nu|} \leq \overline{xx'}^\nu \right) \\
&\leq k \frac{1}{\rho^{N+2-d+\nu}} \overline{xx'}^\nu \\
\therefore \int_{C[B(x, \rho) \cup B(x', \rho)]} |S(x', dy) - S(x, dy)| &\leq C' \left(\frac{1}{\rho^{N+2-d}} + \frac{1}{\rho^{N+2-d+\nu}} \right) \overline{xx'}^{2+\nu\mu}
\end{aligned}$$

$\rho \cdot \overline{xx'} < 1$ としてよいから $M = N+2-d+\nu$, $\tilde{\mu} = \nu\mu$ とおけば,

$$\leq C'' \frac{1}{\rho^M} \overline{xx'}^{\tilde{\mu}}.$$

境界上の singular operator T についても、同じ型の結果を得る。

$\widetilde{xx'}$ を local には $\sum |x^i(y) - x^i(x')|^2 + x^N(y)$ と equivalent 度量として定義する。

i.e $\forall (U, X) \quad U \cap \partial D \neq \emptyset, \quad U \supset K : \text{compact} \text{ に対し}$
 $\exists K_1, K_2 > 0 \quad K_1 \widetilde{xx'} \leq \sum_{i=1}^{N-1} |x^i(y) - x^i(x)|^2 + x^N(y) \leq K_2 \widetilde{xx'}$
for $\forall x' \in K, \forall y \in K$

Theorem 9

$$(a) \quad \forall x' \in \partial D \quad \int_{B(x', r)} t(x', dy) \widetilde{xy} \leq C r^d$$

$$(b) \quad \forall x', \forall x'' \quad \int_{C[B(x', \rho) \cup B(x'', \rho)]} |t(x', dy) - t(x'', dy)| \leq C \overline{xx''}^\mu \frac{1}{\rho^M}$$

$$\exists \alpha > 0 \quad 0 < \exists \mu < 1 \quad M : \text{real} \quad C > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \exists \lambda < 1, \quad u \mapsto \int_{\bar{D}} t(x', dy) [u(y) - \theta_{x'}^* u(y)] \text{ is}$$

$C^2(\bar{D})$ から $C^{0,1}(\partial D)$ への cont. operator である。

更に $|K(x', y)| \leq C$

$$|K(x', y) - K(x'', y)| \leq C \overline{x''}^{\mu} \quad \begin{matrix} \forall x, a.a. y \\ \forall x', \forall x'', a.a. y \end{matrix}$$

つまりは, $t(x', dy) = \frac{K(x', y)}{x y^{n-\alpha} \tilde{x}' y} m(dy)$ は、この定理の仮定をみたす。

これらの証明は Th. 8 に同じである。

Remark 1

Wentzell の境界条件 L が (L.2) をみたす場合 T は $C^2(\bar{D})$ から $C^{1,\alpha}(\partial D)$ への conti. op. であることを必要とするが、この条件に対する Th. 9 の形での条件は、未解決である。

Remark 2

A 及び Q が uniformly elliptic であることは、微分方程式の結果に帰着させるために必要だったが、degenerate した elliptic op. については、この種の境界問題はどうか。

文献

- [1] Brelot-Choquet-Deny のセミナーノート, 1965/1966
- [2] Courrege ; Bourbaki のセミナーノート 1965/1966, n°302
- [3], Sato-Ueno ; J. Math. Kyoto, 4-3 (1965)