

半平面上で定義された算術的正則函数 の全平面への解析接続

上智大 理工 吉野 邦生

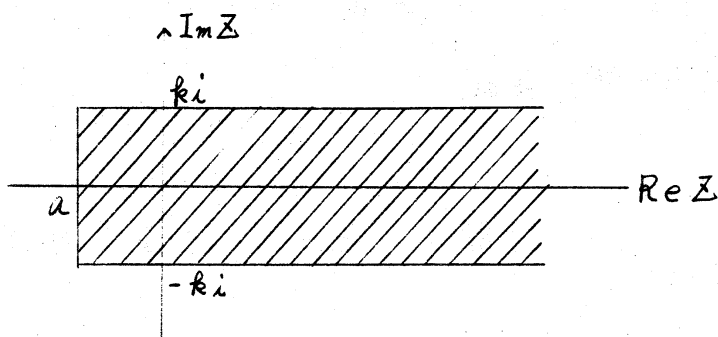
§ 0. はじめに

自然数の上で整数値を取る整函数、すなわち、算術的整函数の理論は、古くから、研究され、特に、R. Buck により、細かい分類がなされた。この結果をもとに、Avanissian - Gray [1] は解析的汎函数の理論を用いて、R. Buck の結果を n 変数の場合に、拡張した。

さて、この小論文では、森本 [6] により導入された、非コンパクトな台を持つ解析的汎函数の理論と Avanissian - Gray により導入された、Avanissian - Gray 変換を用いて、半平面でのみ定義された算術的正則函数が、適当な条件の下で、全平面に解析接続され、しかも、その型をも、決定してしまうという現象を研究する。

§ 1. 非コンパクトな台を持つ解析的汎函数

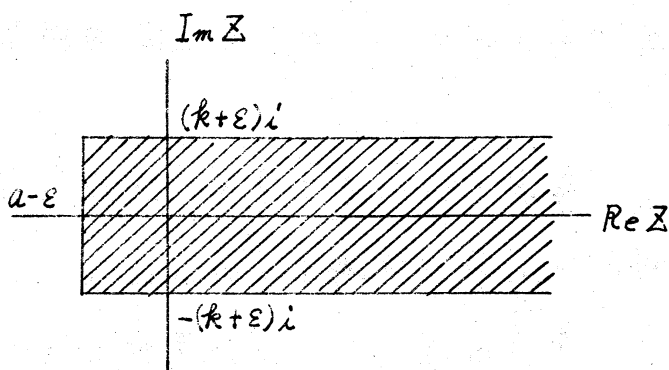
$$L = \{ z \mid \operatorname{Re} z \geq a, |\operatorname{Im} z| \leq k \} \text{ とおく.}$$



$$Q(L; k') = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0} \operatorname{ind} Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon')$$

但し,

$$Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon') = \{ f \in \mathcal{O}(L_\varepsilon) \cap C(L_\varepsilon) : \sup_{z \in L_\varepsilon} |f(z) e^{(k' + \varepsilon')z}| < +\infty \}$$



$Q(L; k')$ は, D F S - 空間になる.

$Q(L; k')$ の双対空間を $Q'(L; k')$ で表わす.

$Q'(L; k')$ の元を L に台を持ち、タイプ k' 以下の解析的
双関数と呼ぶ.

$\text{Ret } t < -k'$ なる $t \in \mathbb{C}$ について、 $e^{tz} \in \mathcal{Q}(L: k')$ 従って、 $\mathcal{Q}'(L: k')$ の元 u についてフーリエ・ボレル変換が、次のようにして、定義できる。

$$\hat{u}(t) = \langle u_z, e^{tz} \rangle \quad (\text{Ret } t < -k')$$

$\hat{u}(t) \in \mathcal{O}(\text{Ret } t < -k')$ となり、 u の連続性により、 $\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C_{\varepsilon \varepsilon'} \geq 0,$

$$|\hat{u}(t)| \leq C_{\varepsilon \varepsilon'} e^{(u-\varepsilon)\text{Ret } t + (k+\varepsilon)|\text{Im } t|}$$

$$(\text{Ret } t \leq -k' - \varepsilon')$$

次の結果が、知られている。

定理 1 (森本) フーリエ・ボレル変換は、位相同型である。

$$\mathcal{Q}'(L: k') \cong \text{Exp}((-\infty, -k') + i\mathbb{R}: L)$$

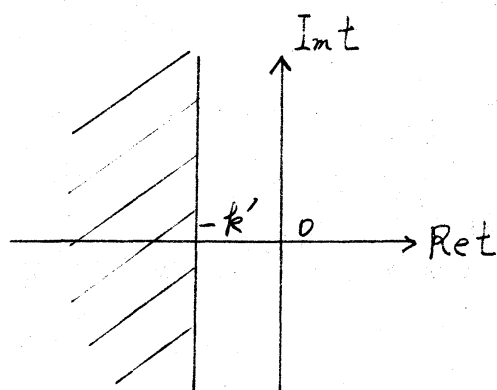
但し、 $\text{Exp}((-\infty, -k') + i\mathbb{R}: L)$

$$= \{ f \in \mathcal{O}((-\infty, -k') + i\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0$$

$$\exists C_{\varepsilon, \varepsilon'} \geq 0,$$

$$|f(t)| \leq C_{\varepsilon \varepsilon'} e^{(u-\varepsilon)\text{Ret } t + (k+\varepsilon)|\text{Im } t|}$$

$$(\text{Ret } t \leq -k' - \varepsilon') \}$$



この § の詳しい内容については [8] を見られたい。

§ 2. Avanissian - Gay 変換

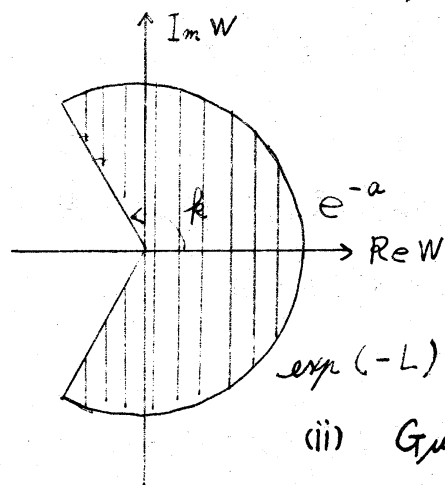
以下、 $0 \leq k' < 1$, $0 \leq k < \pi$ とする。

$W \notin \exp(-L)$ とすると、 z の函数として、

$$(1 - we^z)^{-1} \in Q(L; k')$$

$\mu \in Q'(L; k')$ に対し、Avanissian - Gay 変換を次のように定める。

$$G_\mu(W) = \left\langle \mu_z, \frac{1}{1 - we^z} \right\rangle$$



Avanissian - Gay 変換は、

次の性質を持つ。

命題 1

$$(i) \quad G_\mu(W) \in O(\mathbb{C} \setminus \exp(-L))$$

$$(ii) \quad G_\mu(W) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(-n)}{W^n} \quad (|W| > e^{-a})$$

$$(iii) \quad \lim_{|W| \rightarrow \infty} G_\mu(W) = 0$$

$$(iv) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C_{\varepsilon \varepsilon'} > 0$$

$$|G_\mu(W)| \leq C_{\varepsilon \varepsilon'} \frac{1}{|W|^{k' + \varepsilon'}} \quad (k + \varepsilon \leq |\arg W| \leq \pi)$$

次の公式が、得られている。

命題 2 $\mu \in Q'(L; k)$, $0 \leq k < 1$ $0 \leq k < \pi$

$$h(z) \in Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon')$$

$$\langle \mu, h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L_\varepsilon} G_\mu(e^{-z}) h(z) dz$$

この節の詳しい内容は、森本・吉野(9)を見よ。

§ 3. 超越直径

定義 F を $\mathbb{C}$ のコンパクト集合とする。

$z_1, \dots, z_n \in F$ とする。

$$\sup_{z_i \in F} \prod_{i < j} \overline{z_i z_j} = V_n \text{ とおく。}$$

$$d_n = V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

$$d_{n+1} \geq d_n \quad d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

この d を集合 F の超越直径という。

F の超越直径を $\gamma(F)$ で表わすことにする。

次の評価式が、知られている。

Lemma 1 (Zalcman)

$$(1) \quad \gamma(F) \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \text{length}(C)$$

但し、 C は、 F を囲む回転数 1 (F の各点について) の長さ有限の曲線

(2) F : 区間 (a, b) とすると、

$$\gamma(F) = \frac{1}{4} (b-a)$$

超越直径を使って、 $\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus F)$ が、有理函数であるための条件が、知られている。

Lemma 2 (Polya) F : 単連結 $\gamma(F) < 1$ とする。

$g \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus F)$ のローラン展開係数が、全て整数である
と、 $g(w) = \frac{A(w)}{B(w)}$ と書ける。

ここで、 A, B は、整数係数多項式で、特に、 B の最高
次係数は、1である。

さて、Lemma 1 を使えば、次の命題3が、得られる。

命題3 $L = [a, \infty) + i[-k, k]$

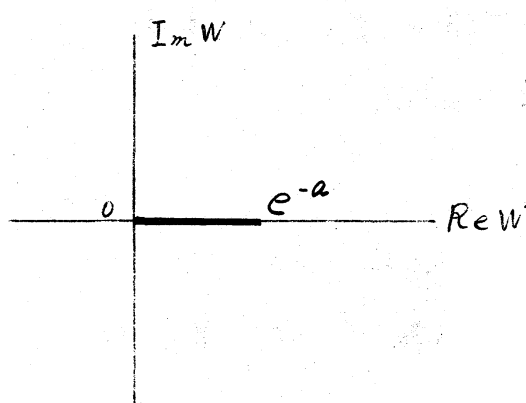
$$(i) \quad \gamma(\exp(-L)) = \frac{1}{4} e^{-a} \quad \text{if } k=0$$

$$(ii) \quad \gamma(\exp(-L)) \leq \frac{1}{\pi} (k+1) e^{-a} \quad 0 < k \leq \frac{1}{2}\pi$$

$$(iii) \quad \gamma(\exp(-L)) \leq \frac{1}{\pi} (k + \sin k) e^{-a} \quad \frac{1}{2}\pi \leq k < \pi$$

(証明) $\exp(-L)$ の図を書く。

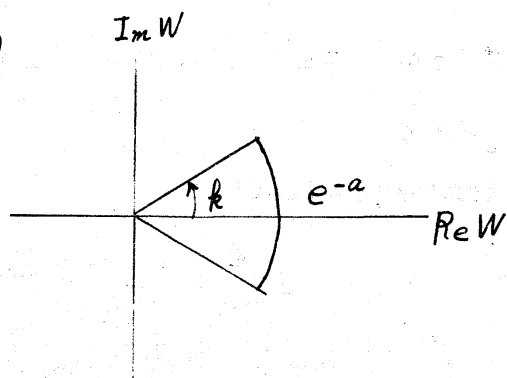
(i)



Lemma 1 の (2) に より、

$$\gamma(\exp(-L)) = \frac{1}{4} e^{-a}$$

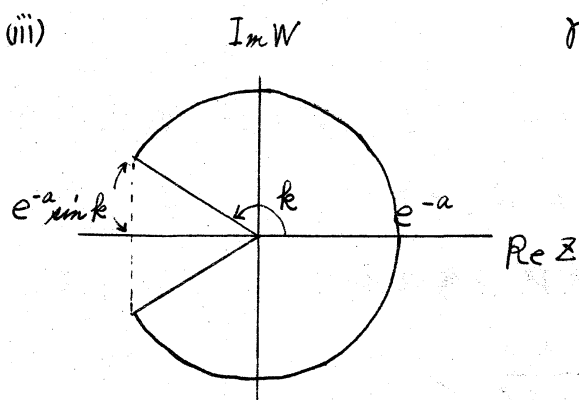
(ii)



lemma 1 の (I) に より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \times (2e^{-a} + 2e^{-a}k) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-a} (k+1) \\ &\therefore \gamma(F) \leq \frac{1}{\pi} e^{-a} (k+1) \end{aligned}$$

(iii)



$$\begin{aligned} \gamma(\text{cyl}(-L)) &\leq \frac{1}{2\pi} (2e^{-a}k \\ &\quad + 2e^{-a} \sin k) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-a} (k + \sin k) \end{aligned}$$

系 (a, k) が、次をみたせば、 $\text{cyl}(-L)$ の超越直径は 1 未満

$$\gamma(\text{cyl}(-L)) < 1$$

$$(3-1) \quad k=0, \text{ and } a > -2 \log 2$$

$$(3-2) \quad 0 < k \leq \frac{\pi}{2}, \text{ and } a > \log \pi^{-1}(k+1)$$

$$(3-3) \quad \frac{\pi}{2} \leq k < \pi, \text{ and } a > \log \pi^{-1}(k + \sin k)$$

§ 4 主要定理と証明

定理 $0 \leq k' < 1, 0 \leq k < \pi$. (a, k) は (3.1) --- (3.3) のどれかをみたしているとする.

$$f \in \mathcal{O}(\operatorname{Re} t < -k'), f(-n) \in \mathbb{Z} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C(\varepsilon, \varepsilon') > 0$$

$$|f(t)| \leq C(\varepsilon, \varepsilon') e^{(a-\varepsilon)\operatorname{Re} t + (k+\varepsilon)|\operatorname{Im} t|}$$

$$\Rightarrow f(t) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}'). \text{ かつ, } f(t) = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(t) e^{\beta_i t}$$

但し, $P_i(t)$ は, 多項式で, $\operatorname{Re} \beta_i > a, |\operatorname{Im} \beta_i| \leq k$
 $e^{-\beta_i}$ は, 代数的整数.

(証明) 定理 1 により, $u \in \mathcal{Q}'(L: k')$ が, 存在して,

$$f(t) = \langle u_z, e^{tz} \rangle = \hat{u}(t)$$

u の Admissian-Gay 変換を考えると,

$$G_u(W) = \langle u_z, \frac{1}{1-we^z} \rangle$$

命題 1 により,

$$G_u(W) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}(-n)}{W^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(-n)}{W^n}$$

$$\text{仮定により, } f(-n) \in \mathbb{Z}$$

さて, 仮定, (3-1) ... (3-3) の条件があると,

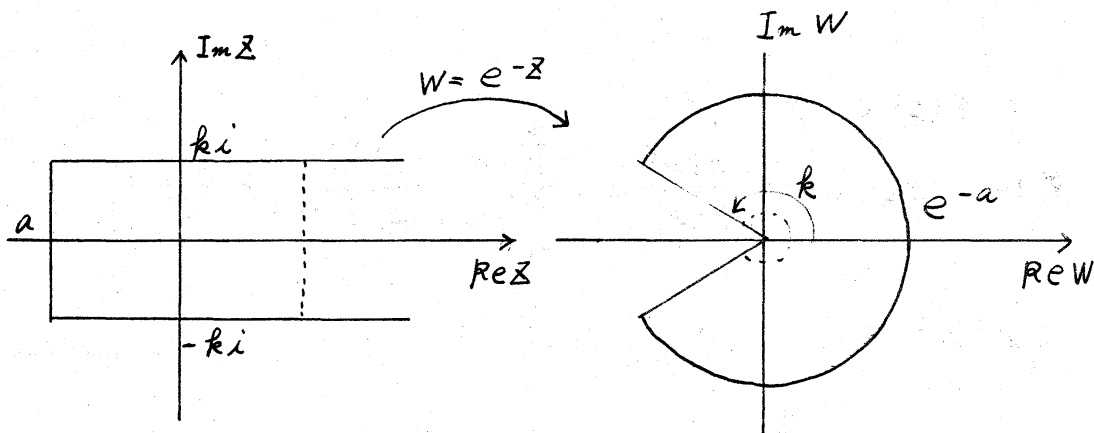
$\exp(-L)$ の超越直径は 1 未満.

$$\text{従って, lemma 2 により, } G_u(W) = \frac{A(W)}{B(W)}$$

となる整数係数の多項式が存在する. 特に, $B(W)$ は monic である.

命題 1 の (iv) により, $B(0) \neq 0$.

従って、 $G_\mu(W)$ は、 $W=0$ で正則。



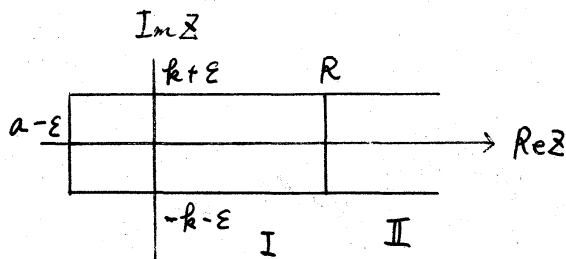
$G_\mu(e^{-z})$ で考えると、 $\operatorname{Re} z > R$ で、 $G_\mu(e^{-z})$ は、
正則とする。 $R > 0$ が、存在する。

反転公式 (命題 2) により、

$$f(t) = \langle u_z, e^{tz} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_z} G_\mu(e^{-z}) e^{zt} dz$$

($\operatorname{Re} t < -k'$)

上の周辺積分を、左図のように
に I, II に分けて考えると、
被積分関数は、II で正則であ
るので、



$$= \int_I + \int_{II}$$

$$\int_{II} = 0$$

$$= \int_I$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_I G_\mu(e^{-z}) e^{zt} dz$$

$$\therefore f(t) \in \mathcal{O}(\mathbb{Q}^1)$$

$$\text{更に } G_\mu(w) = \frac{A(w)}{B(w)} = \frac{\prod_{i=1}^k (w - a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^k (w - b_i)^{n_i}} \quad \text{とすると.}$$

$$G_\mu(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{Q} \setminus \exp(-L)) \text{ により, } b_i \in \exp(-L)$$

$$\begin{aligned} G_\mu(e^{-z}) &= \frac{\prod_{i=1}^k (w - a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^k (w - b_i)^{n_i}} = \frac{\prod_{i=1}^k (e^{-z} - a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^k (e^{-z} - b_i)^{n_i}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^k (e^{-z} - a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^k (1 - b_i e^z)^{n_i}} e^{(\sum_{i=1}^k n_i)z} \end{aligned}$$

$$b_i \in \exp(-L) \text{ であるので, } b_i = e^{-\beta_i} \quad (\beta_i \in L)$$

となる β_i が唯一存在する ($\because k < \pi$)

従って,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{\prod_{i=1}^k (e^{-z} - a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^k (1 - b_i e^z)^{n_i}} e^{\sum n_i z} \cdot e^{zt} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{\prod_{i=1}^k (e^{-z} - a_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^k (1 - e^{z-\beta_i})^{n_i}} e^{\sum n_i z} \cdot e^{zt} dz \end{aligned}$$

各 $z = \beta_i$ において留数定理を使えば,

$$= \sum_{i=1}^k p_i(t) e^{\beta_i t} \quad (e^{-\beta_i} \text{ は代数的整数 } \beta_i \in L)$$

§ 5. 例

(i) $k = 0$. $a > -2 \log 2$ の例

$$f(t) = 2^{-t} = e^{t(-\log 2)}$$

$$|f(t)| = e^{-\operatorname{Re} t \log 2} = e^{\operatorname{Re} t (-\log 2)} \quad (\operatorname{Re} t \leq 0)$$

この場合、 $k = 0$, $a = -\log 2$

$$\log 2 > 0 \text{ に } \therefore a = -\log 2 > -2 \log 2 \quad //$$

(ii) $0 < k \leq \frac{\pi}{2}$. $a > \log \pi^{-1}(k+1)$ の例

$$f(t) = \sin \frac{\pi}{2} t = \frac{e^{\frac{\pi}{2}it} - e^{-\frac{\pi}{2}it}}{2i} \quad \left(\begin{array}{l} f(-1) = -1 \quad f(-2) = 0 \\ f(-3) = 1 \quad f(-4) = 0 \end{array} \right)$$

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{|\operatorname{Im} t| \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{|\operatorname{Im} t| \cdot \frac{\pi}{2}}$$

この場合、 $a = 0$, $k = \frac{\pi}{2}$

$$\log \pi^{-1}(k+1) = \log \pi^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \log \frac{\pi+2}{2\pi}$$

$$\frac{\pi+2}{2\pi} < 1 \text{ に } \therefore$$

$$< 0$$

従って、 $a > \log \pi^{-1}(k+1)$ を満たしている。(iii) $\frac{\pi}{2} \leq k < \pi$, $a > \log \pi^{-1}(k + \sin k)$

$$f(t) = 2 \cos \frac{2}{3} \pi t = e^{\frac{2}{3} \pi it} + e^{-\frac{2}{3} \pi it}$$

$$f(-1) = 2 \cos \frac{2}{3} \pi = -1$$

$$f(-2) = 2 \cos \frac{4}{3} \pi = -1$$

$$f(-3) = 2 \cos 2\pi = 2$$

$$|f(t)| \leq 2 e^{\frac{2}{3}\pi |Im t|}$$

$$a = 0, \quad k = \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} \log \pi^{-1}(k + i \sin k) &= \log \pi^{-1}\left(\frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \log \pi^{-1}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \log\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{3} \quad \text{であるので、}$$

$$< \log\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\right) = \log 1 = 0 = a.$$

従って、不等式 $a > \log \pi^{-1}(k + i \sin k)$ をみたしている。

§ 6. 注意

定理において、 $f(-\pi)$ の値は、整数であると仮定したが、実は、この条件は緩めることができる。すなわち、本質的には、Lemma 2 におけるローラン展開係数が、全て整数であるという部分が、実は、虚2次体の整数でもよいのである。これについては、詳しくは、Martineau [5], Polya [12] を見られたい。

又、ローラン展開係数と、超越直径の深い関わり合い、例えば、フロネッカーの定理等については、Goluzin [13] Polya [12] を見られたい。

References

- [1] Avaniissian, V. and R. Gay: Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France, 103 (1975), 341-384.
- [2] Ahlfors, R. : Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory. McGraw-Hill, (1973)
- [3] Boas, R. : Entire Functions. Academic Press, New York (1954)
- [4] Buck, C.R. : Integral valued entire functions. Duke Math.J., 15 (1948), 879-891.
- [5] Martineau, A. : Extension en n variables d'un théorème de Polya-Carlson concernant les séries de puissances à coefficients entieres. C.R.Acad. Sci. Paris, t 273, Ser. A, (1971), 1127-1128.
- [6] Morimoto, M.: On the Fourier ultra-hyperfunctions. 1. Sûrikaiseiki-kenkyûjo kôkyûroku, 192 (1973), 10-34.
- [7] Morimoto, M.: Fourier Transformation and distribution, Jôchi daigaku kôkyûroku, 2 (1978), 1-177 (In Japanese).
- [8] Morimoto, M.: Analytic functionals with non-compact carrier. Tokyo.J.Math., 1 (1978). to appear.
- [9] Morimoto, M and K.Yoshino : A uniqueness theorem for holomorphic function of exponential type, Hokkaido Math.J., 7 (1978), to appear.
- [10] Šeinov, A.: Transfinite diameter and some theorem of Pólya in the case of several complex variables, Siberian Math.J., 12 (1972), 1382-1389.

- [11] Zalcman, L.: Analytic Capacity and Rational Approximation, (Lecture Note in Mathematics, 50), Springer-Verlag, Berlin (1968).
- [12] Polya, G: Sur les séries entières a coefficients entieres, Proceedings of the London Mathematical Society, vol 21 (1922) pp. 22-38.
- [13] Goluzin: Geometric Theory of Functions of a complex variable, American Mathematic Society (1969).