

不変ベクトルを持つ閉部分群

京大 理 辰馬 伸彦

1. G を局所コンパクト群, $H (\neq G)$ をその閉部分群とする. Ω で G のユニタリ表現の同値類の全体の集合, $\hat{G}$ で Ω 中既約な元全体を示す. 以下 Ω や $\hat{G}$ の元にはその同値類の代表元をノットとり, Ω や $\hat{G}$ を表現の集合と同一視して示す. e で G の単位元, $G \ni g \mapsto \pi(g) (= \hat{g}) \in H \backslash G$ で標準写像を表わす. 各 $\omega = \{\mathcal{G}^\omega, T_g^\omega\} \in \Omega$ に対して, 表現空間 $\mathcal{G}^\omega$ 中の H -不変ベクトルの全体 $\mathcal{G}_H^\omega \equiv \{v \in \mathcal{G}^\omega \mid T_h^\omega v = v, \forall h \in H\}$ は閉部分空間となる. 又 $H_\omega \equiv \{g \in G \mid T_g^\omega v = v, \forall v \in \mathcal{G}_H^\omega\}$ は H を含む G の閉部分群となる.

さて ω を H に制限して, H のユニタリ表現と見る時, $\omega|_H$ が H の単位表現 $\mathbb{1}_H$ を離散直和成分として含む事は, $\mathcal{G}_H^\omega \neq \{0\}$ と同値である.

一方, 商空間 $H \backslash G$ で淡中型双対定理が成立する為の必要條件のノットとして, 次が知られている ([2] 参照).

$$(P-1) \quad H = \bigcap_{\omega \in \Omega} H_{\omega}.$$

これは、 H -不変ベクトルの全体が、 G 中で H を分離する事を意味する。

さて、[2]であげた例では、(1) H がコンパクト群、(2) H が G の正規部分群の時 $(P-1)$ は成立する。一方たとえば、 $G = SL(2, \mathbb{C})$ 、 H を上三角行列全体から成る G の部分群とする時は、 $\omega \in \hat{G}$ について、 $\chi_H^{\omega} \neq 1 \Leftrightarrow \omega = 1_G$ となる。特にこの最後の例では、

$$(P-0) \quad \exists \omega \in \Omega \quad \text{s.t.} \quad H_{\omega} \neq G,$$

が成立しない。明らかに、 $(P-1) \Rightarrow (P-0)$ であるから、この例では、 $(P-1)$ も成立しない。 $(P-0)$ の成立する時、部分群 H が不変ベクトルを持つと云ってよいであろう。

小文では、 $(P-0)$ 又は $(P-1)$ の成立に対する (G, H) の構造を調べ、 (G, H) が、 $(P-0)$ 対、又は $(P-1)$ 対となる為の必要条件を出す。結論としては、本質的に H は、上の例(1)、(2)及び $\mathbb{R}^n$ の形の組合せである事が示される。

2. 定義 1. $H^{\sim} \equiv \bigcap_{\omega \in \Omega} H_{\omega}$. H の $(P-1)$ 閉包と呼ぶ。

$(P-1)$ 閉包は、位相における閉包と似た性質を持つ。即ち、

$$(i) \quad H^{\sim} \supset H,$$

$$(ii) \quad (G, H) \text{ が } (P-1) \text{ 対 } \Leftrightarrow H^{\sim} = H,$$

$$(iii) \quad (G, H) \text{ が } (P-0) \text{ 対 } \Leftrightarrow H^{\sim} \neq G,$$

更に Gelfand-Raikov の正定符号関数の端点分解定理で,

$$(iv) \quad H^\sim = \bigcap_{\omega \in \hat{G}} H_\omega,$$

$$(v) \quad \forall \omega \in \hat{G} \text{ ぞ } \mathcal{C}_H^\omega = \mathcal{C}_{H^\sim}^\omega,$$

つまり、 H -不変ベクトルは又 $H^\sim$ -不変である。

$$(vi) \quad (H^\sim)^\sim = H,$$

特に、 $H^\sim \neq G$ 即ち (G, H) が (P-0) 对なら、 $\overbrace{(G, H^\sim)}^{(G, H^\sim) \text{ は}}$ 又 (P-1) である。

$$(vii) \quad H^\sim = \bigcap_{\alpha} H_\alpha \quad (H_\alpha \supset H, (G, H_\alpha) \text{ が (P-1) なる } H_\alpha \text{ を走る}).$$

先に [2] で導いた次の性質は以下の議論に有効である。

補題 2. (G, H) が (P-1) 对なら $H \backslash G$ 上に G -不変測度がある。

此処で [2] で与えた、对 (G, H) の更に強い条件を考える。

(P-2) $H \backslash G$ の点 $e (\equiv \pi(e))$ の基本近傍系で、 H -不変集合のみから成るものが取れる。

誘導表現 $\sigma \equiv \bigcap_{H \uparrow G} \mathbb{I}_H$ を考えると、 $H \backslash G$ のコンパクト H -不変集合 E の特性関数 χ_E は、表現空間 $L^2_\mu(H \backslash G)$ (μ は G -不変測度) 中の H -不変ベクトルを与えるから、 $(P-2) \Rightarrow (P-1)$ がわかる。

さて以下の話に必要な次の性質を示そう。([2] 参照)。

今 (G, H) を (P-1) 对とし、 $\forall v \in \mathcal{C}_H^\omega$, $\varepsilon > 0$ に対し、集合 $E(v, \varepsilon) \equiv \{g \in G \mid \|v - T_g^\omega v\| \leq \varepsilon\}$ (C_G) を考えよう。

$E(v, \varepsilon)$ は、 $e \in G$ の近傍で、次は明らかである。

$$(*) \quad \bigcap_{(\omega, v, \varepsilon)} E(v, \varepsilon) = H,$$

$$(**) \quad H E(v, \varepsilon) H = E(v, \varepsilon).$$

補題3. $\mathcal{C} \in H \setminus G$ の任意のコンパクト近傍 C を1つとると,
 $\{ C \cap \pi(E(v, \varepsilon)) \mid \omega \in \Omega, v \in \mathcal{G}_H^\omega, \varepsilon > 0 \}$ は, $\mathcal{C}$ の基本
 近傍系を生成する. ┘

証明 $\mathcal{C}$ の任意の開近傍 W について, $C - W$ はコンパクト
 で, $\mathcal{C}$ を含まない. (*) 及び (**) より $\{ \pi(E(v, \varepsilon)) \}^c$ は
 $C - W$ の開放覆となるから, 有限個の $(\pi(E(v_j, \varepsilon_j)))^c$ により,
 $C - W \subset \bigcup_{j=1}^N (\pi(E(v_j, \varepsilon_j)))^c$. すなわち,
 $C \cap \left(\bigcap_{j=1}^N \pi(E(v_j, \varepsilon_j)) \right) \subset W$. ┘

補題4. (G, H) を (P-1) 対とし, C_1 を H の任意のコン
 パクト集合とする. $C_\infty \equiv \bigcup_{n=1}^\infty (C_1)^n \subset H$ とおくと, $\mathcal{C}$ の
 $H \setminus G$ 中の基本近傍系で, C_∞ -不変集合より成るものがある. ┘

証明 $G \ni e$ のコンパクト近傍 V を1つ固定する.

$C = \pi(V \cdot C_1)$ は $\mathcal{C} \in H \setminus G$ のコンパクト近傍を与えるから,
 これを前補題の C と思う. このとき

$\{ E \equiv (C \cap \pi(E(v, \varepsilon))) \mid C \subset \pi(V) \quad \omega \in \Omega, v \in \mathcal{G}_H^\omega, \varepsilon > 0 \}$
 が求めるものである.

実際前補題により, この集合系は, $\mathcal{C}$ の基本近傍系を与え
 るから, 各 E が C_∞ -不変なる事を云えればよいが, その為には
 C_1 -不変を示せば十分である. 所で,

$$E \cdot C_1 \subset \pi(V) \cdot C_1 = \pi(V C_1) = C.$$

$E C_1 \subset \pi(E(v, \varepsilon)) C_1 \subseteq \pi(E(v, \varepsilon)) H = \pi(E(v, \varepsilon))$,
 であるから E の定義により, $E C_1 \subset E$ となる. ┐

補題 5. (G, H) を $(P-1)$ 対とすると, H の開部分群 H_0
 で, (G, H_0) が $(P-2)$ 対となるものが存在する. ┐

証明 e の H 中のコンパクト近傍 W を Γ で定め, それで生
 成される H の開部分群を H_1 とし, G 中の H_1 の $(P-1)$ 閉包 $H_1^\sim$ を
 H_0 とかく. (G, H) が $(P-1)$ の仮定から, $\Sigma(VII)$ より $H \supset H_0$
 で, 又 $H_0 \supset H_1$ だから, H_0 は H の開部分群である.

(G, H_0) が $(P-2)$ である事を示す為には, H_0 を補題 4 の H ,
 $W U W^{-1}$ を C_1 と見ると, H_1 は C_∞ に対応し, すなわち,
 $H_0 \backslash G \ni \pi_0(e)$ の基本近傍系で H_1 -不変な集合より成るもの
 がある. その各々の H_1 -不変な集合は, 開集合の閉包で且コン
 パクトにとり直さうと出来る, それを E とかく.

この集合 E の特性関数 χ_E は $L^2_\lambda(H_0 \backslash G)$ の元と考えると,
 ユニタリ表現 $\text{Ind}_{H_0 \uparrow G} \mathbb{1}_{H_0}$ の H_1 -不変ベクトルを与えて居る
 が, $H_0 = (H_1)^\sim$ であつたから, $\Sigma(V)$ より同時に H_0 -不変であ
 る. すなわち, $\forall h \in H_0$ で, $\mu(E \Delta E h) = 0$.

一方, $\overset{\circ}{E} h \subset E$ なら $E h = \overline{\overset{\circ}{E} h} \subset \overline{E} = E$ だから, 若し,
 $E h - E \neq \emptyset$ なら, $\overset{\circ}{E} h - E \neq \emptyset$ である. $\overset{\circ}{E} h - E$ は開集合
 で, $H_0 \backslash G$ 上の G -不変測度 μ で, $\mu(\overset{\circ}{E} h - E) \neq 0$. これは上
 記の事に反する. ┐

4. 次に, (G, H) が (P-2) 対である時の性質を調べる.

所で, $H \backslash G$ 中の H -不変集合 A に対しては, ある $E \subset G$ があって, $\pi^{-1}(A) = HEH$ の形に書けるから, $A^{-1} \equiv \pi(HE^{-1}H) \subset H \backslash G$ を一意的に定義出来る.

定義6. $A = A^{-1}$ の時, A は対称であると言う. ┘

どの任意の近傍 A に対して, A に入る対称近傍 $A \cap A^{-1}$ が常に存在する.

補題7. (P-2) 対 (G, H) に対して, H を含む G の開部分群 G_0 があって, $H \backslash G$ 中の任意の有限測度 H -不変対称集合 E に対して, $\mu(\pi(G_0) \cap E) = \mu(E)$. ┘

証明. 任意の有限測度 H -不変対称集合 E について,

$\varphi_E(g) \equiv \langle T_g^\sigma \chi_E, \chi_E \rangle$ は $H \backslash G$ 上の連続関数と考えられて,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2 &= \int_{H \backslash G} d\mu(\pi(g)) \left| \int_{H \backslash G} \chi_E(xg) \chi_E(x) d\mu(x) \right| \\ &= \int_{H \backslash G} \int_{H \backslash G} \chi_E(x) \chi_E(xg^{-1}) d\mu(x) d\mu(\pi(g)) \\ &= \int_{H \backslash G} \int_{H \backslash G} \chi_E(\pi(g)) \chi_E(\pi(gg^{-1})) d\mu(\pi(g)) d\mu(\pi(g)) \\ &= \int_{H \backslash G} \chi_E(\pi(g)) \left\{ \int_{H \backslash G} \chi_E(\pi(g)) d\mu(\pi(g)) \right\} d\mu(\pi(g)) = (\mu(E))^2 < +\infty, \end{aligned}$$

より, $\forall \varepsilon > 0$ に対して,

$$F(E, \varepsilon) \equiv \{ g \in G \mid \varphi_E(g) > \varepsilon \} \quad \text{とあくと, } \pi(F(E, \varepsilon))$$

は, 有限測度 H -不変対称開集合である. $F(E) \equiv \bigcup_{\varepsilon > 0} F(E, \varepsilon)$

とかく. $G_0 \equiv \bigcup_E F(E)$ が求めるものである事を示そう.

任意の有限測度 H -不変対称集合 E_1, E_2 で, 特に E_1 を用

集合で, $\tilde{e}$ を含むとする. $E \equiv E_1 \cup E_2$ とすると, 容易に,

$$\mathcal{F}_E(g) \equiv \langle T_g^\circ \chi_{E_1}, \chi_{E_2} \rangle = \mu(E_1 \cap E_2 g) \text{ がわかるから,}$$

$F(E) \supset \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})$ であって, 今

$$\mu(E_2) = \mu(E_2 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})) \text{ を示せば,}$$

$$\begin{aligned} \mu(\pi(G_0) \cap E_2) &\geq \mu(F(E) \cap E_2) \geq \mu(E_2 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})) \\ &= \mu(E_2) \text{ となる. これを示す際には,} \end{aligned}$$

$$E_3 \equiv E_2 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\}), \quad E_0 \equiv E_2 - E_3$$

$$\text{とおくと, } E_3' \equiv E_0 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_0 g) > 0\}) \subset E_0$$

は $E_0 \subset E_2$ より, E_3 に入るから, E_0 の定義より, $E_3' = \emptyset$.

従って, $\mu(E_3') = 0 \Rightarrow \mu(E_0) = 0$ を示せばよい.

$$\text{そこで, } \mu(E_0) \neq 0 \text{ とし, } (\pi(g) \ni \tilde{g} \text{ とかく})$$

$$\mu(E_1 \cap E_0 g) = \int \chi_{E_0}(x g^{-1}) \chi_{E_1}(x) d\mu(x), \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \mu(E_3') &= \mu(E_0 \cap \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_0 g) > 0\})) \\ &= \int \chi_{E_0}(\tilde{g}) \left\{ \int \chi_{E_0}(x g^{-1}) \chi_{E_1}(x) d\mu(x) \right\} d\mu(\tilde{g}) \\ &= \iint \chi_{E_0}(\tilde{g}) \chi_{E_0}(\tilde{g} g_1^{-1}) \chi_{E_1}(\tilde{g}_1) d\mu(\tilde{g}_1) d\mu(\tilde{g}) \\ &= \int \langle T_{\tilde{g}_1}^\circ \chi_{E_0}, \chi_{E_0} \rangle \chi_{E_1}(\tilde{g}_1) d\mu(\tilde{g}_1). \end{aligned}$$

仮定より, $\langle T_{\tilde{e}}^\circ \chi_{E_0}, \chi_{E_0} \rangle = \mu(E_0) \neq 0$ で, $\langle T_{\tilde{g}}^\circ \chi_{E_0}, \chi_{E_0} \rangle$ は $H \backslash G$ 上の正値連続関数である. E_1 を $\tilde{e}$ を含む開集合としたから, G -不変測度 μ では全ての開集合が正測度をもつ事を用いると, $\mu(E_3') \neq 0$. ちなわち, $\mu(E_0) \neq 0 \Rightarrow \mu(E_3') \neq 0$ がえられた.

次に E_1, E_2 が共に開集合の時、上と同様にして、 $G_0 \supset F(E)$
 $\supset \pi(\{g \in G \mid \mu(E_1 \cap E_2 g) > 0\})$ であるが、 $\forall \hat{g} \in E_2^{-1} E_1$ を、 $\hat{g}_1 \in E_1$
 $\hat{g}_2 \in E_2$ なる G の元で、 $\hat{g} = \hat{g}_2^{-1} \hat{g}_1$ とかくと、 $E_1 \hat{g}_1^{-1} \supset \tilde{E}$ 、 $E_2 \hat{g}_2^{-1} \supset \tilde{E}$
 で、 $E_1 \hat{g}_1^{-1}, E_2 \hat{g}_2^{-1}$ は共に開集合だから、 $0 \neq \mu(E_1 \hat{g}_1^{-1} \cap E_2 \hat{g}_2^{-1})$
 $= \mu(E_1 \cap E_2 \hat{g}_2 \hat{g}_1^{-1}) = \mu(E_1 \cap E_2 \hat{g})$. $F(E) \supset E_2^{-1} E_1$ がえられた。

$F(E, E)$ 等を E_1, E_2 と思えば、“ G_0 が開部分群”が示された。┘

次に、 $H \setminus G$ 上の測度有限の H -不変対称集合 E をとり、
 $\forall f \in L^2_\mu(H \setminus G)$ に対して、

$$(T_E f)(g) \equiv \int_{H \setminus G} f(xg) \chi_E(x) d\mu(x) = \langle T_g^\sigma f, \chi_E \rangle$$

で、 $L^2_\mu(H \setminus G)$ 上の作用素 T_E を定義すると、

$\|\langle T_g^\sigma f, \chi_E \rangle\|_2 \leq \|f\|_2 \mu(E)$ より T_E は有界作用素となる。

更に、 $0 < \mu(F) < +\infty$ となる H -不変集合 $F (C H \setminus G)$ をとると、 $L^2_\mu(F)$ は $L^2_\mu(H \setminus G)$ の H -不変部分空間であるが、

補題 8. i) T_E は $L^2_\mu(H \setminus G)$ 上の対称作用素であり、

$$T_E \cdot T_g^\sigma = T_g^\sigma \cdot T_E \quad \forall g \in G,$$

ii) $T_E|_{L^2_\mu(F)}$ は $L^2_\mu(F)$ から $L^2_\mu(H \setminus G)$ の中への、
 Hilbert-Schmidt 型の作用素である。┘

証明. i) の後半は

$$\begin{aligned} T_{g_1}^\sigma (T_E f)(g) &= (T_E f)(gg_1) = \langle T_{gg_1}^\sigma f, \chi_E \rangle = \langle T_g^\sigma T_{g_1}^\sigma f, \chi_E \rangle \\ &= T_E (T_{g_1}^\sigma f)(g), \text{ より出る.} \end{aligned}$$

又 T_E の対称性は、 $\forall f, g \in L^2_\mu(H \setminus G)$ について、

$$\begin{aligned}
\langle T_E f, k \rangle &= \int \left\{ \int f(xg) \chi_E(x) d\mu(x) \right\} \overline{k(g)} d\mu(g) \\
&= \int \int f(\tilde{g}_1) \chi_E(\tilde{g}_1 g_1^{-1}) \overline{k(g_1)} d\mu(\tilde{g}_1) d\mu(g_1) \\
&= \int \left\{ \int \chi_E(\tilde{g}_1 g_1^{-1}) \overline{k(g_1)} d\mu(g_1) \right\} f(\tilde{g}_1) d\mu(\tilde{g}_1) \\
&= \int f(\tilde{g}_1) \left\{ \int k(xg_1) \chi_E(x) d\mu(x) \right\} d\mu(\tilde{g}_1) = \langle f, T_E k \rangle.
\end{aligned}$$

ii) $L^2_\mu(F)$ の正規直交基 $\{f_\alpha\}$ を一つとる。又 $L^2_\mu(H \backslash G)$ から、 $L^2_\mu(F)$ への射影を P_0 とすると、これは $f \in L^2_\mu(H \backslash G)$ に対し χ_F を掛ける作用素により与えられる。そこで、

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha |(T_E f_\alpha)(\tilde{g})|^2 &= \sum_\alpha | \langle T_g^\sigma f_\alpha, \chi_E \rangle |^2 = \sum_\alpha | \langle f_\alpha, T_{g^{-1}}^\sigma \chi_E \rangle |^2 \\
&= \| P_0 T_{g^{-1}}^\sigma \chi_E \|^2 = \int_{H \backslash G} \chi_F(x) \chi_E(xg^{-1}) d\mu(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| T_E \|^2 &= \sum_\alpha \| T_E f_\alpha \|^2 = \sum_\alpha \int | (T_E f_\alpha)(\tilde{g}) |^2 d\mu(\tilde{g}) = \int \| P_0 T_{g^{-1}}^\sigma \chi_E \|^2 d\mu(g) \\
&= \int \int \chi_F(\tilde{g}_1) \chi_E(\tilde{g}_1 g_1^{-1}) d\mu(\tilde{g}_1) d\mu(g_1) \\
&= \int \int \chi_F(\tilde{g}_1) \chi_E(\tilde{g}_1 g_1^{-1}) d\mu(\tilde{g}_1) d\mu(g_1) = \mu(F) \mu(E) < +\infty \quad \square
\end{aligned}$$

補題 9. $\bigcap_E T_E^{-1}(0) = \{0\}$ (E : H -不変対称開集合)

証明. $\bigcap_E T_E^{-1}(0) \ni f \neq 0$ とする。前補題の i) から、

$$\forall k \in C_0(G) \text{ で, } \int_G k(g) f(xg) dg = \int_G k(g) T_g^\sigma f dg \in \bigcap_E T_E^{-1}(0)$$

だから、はじめから f を連続としてよい。又要すれば常数倍して、ある $g_0 \in G$ で、 $f(g_0) \neq 0$ としてよい。 (G, H) が (P-2) の仮定から、 ε の H -不変対称コンパクト近傍 E を、 $\forall x \in E$

について、 $|f(xg_0) - f(g_0)| < \frac{1}{2} f(g_0)$ ととると、

$$\operatorname{Re}[(T_E f)(g_0)] = \operatorname{Re}\left[\int f(xg_0) \chi_E(x) d\mu(x)\right] \geq \frac{1}{2} \mu(E) f(g_0)$$

> 0 となり、 $f \in \bigcap_E T_E^{-1}(0)$ に矛盾する。 $\square$

補題 10. $\sigma \equiv \int_{H \backslash G}^{\text{ind}} \mathbb{1}_H$ を H に制限して得られる H のユニタリ表現で, $L^2_\mu(H \backslash G_0) (\subset L^2_\mu(H \backslash G))$ 上に実現される部分表現は, 有限次元表現の直和として分解される.

証明. 補題 7 の定義から, $H \backslash G_0$ は有限測度 H -不変対称開集合 $\pi(F(E, \varepsilon))$ の和としてかける. たとえば, G_0 を σ -コンパクトな部分群の *coset* の和にわけ, 更にその各々の *coset* を $F(E, \varepsilon)$ の形の集合の可算和で *cover* する事により, $H \backslash G_0$ を $\pi(F(E, \varepsilon))$ の H -不変有限測度部分集合の和に分割し, それに基づいて $L^2_\mu(H \backslash G_0)$ を, $\pi(F(E, \varepsilon))$ の部分集合の中に σ を持つ関数の作る部分空間の直和に分解する事が出来る. すなわち, $H \backslash G_0 = \sum_\alpha A_\alpha$, A_α はある $\pi(F(E, \varepsilon))$ に入る H -不変で $0 < \mu(A_\alpha) < +\infty$ となる集合で, これにより,

$$L^2_\mu(H \backslash G_0) = \sum_\alpha L^2_\mu(A_\alpha). \quad (\text{各 } L^2_\mu(A_\alpha) \text{ は } H\text{-不変}).$$

さて, 補題 8 の仮定をみたす E_0 に対して, T_{E_0} を作りこれを $L^2_\mu(A_\alpha)$ 上に制限すると, $L^2_\mu(A_\alpha)$ から $L^2_\mu(H \backslash G_0)$ への作用素と見て, Hilbert-Schmidt 型であり, $\{T_{E_0}^\sigma \mid \forall \sigma \in H\}$ と可換である. これを T_α とかくと, $(T_\alpha)^* T_\alpha$ は跡作用素となり, $\{L^2_\mu(A_\alpha), T_{E_0}^\sigma\}$ なる H のユニタリ表現の *intertwining operator* を与える. 通常の議論によつて, $(T_\alpha)^*(0)$ の $L^2_\mu(A_\alpha)$ 内の直交空間は, $\{T_{E_0}^\sigma\}$ -不変な有限次元部分空間の直和として分解されるが, 補題 9 により E_0 を走らせると, σ_α は有限次

元の H のユニタリ表現の直和として完全に分解され、この分解とあわせて補題 10 の結果が示された。

さて、補題 10. で得られた、 H の $L^2(H \backslash G_0)$ 上での表現の分解を、 $\tau_{G_0} \equiv \{L^2(H \backslash G_0), T_R^\sigma\} = \sum_{\alpha}^{\oplus} \tau_{\alpha}$ ($\dim \tau_{\alpha} < +\infty$).

とする。ここで H 中の、この表現の核 $N \equiv \ker \tau_{G_0} = \bigcap_{\alpha} \ker \tau_{\alpha}$ を考えよう。

補題 11. $N = \bigcap_{g \in G_0} g H g^{-1}$

特に、 N は G_0 の正規部分群である。

証明. τ_{G_0} の核は、 $L^2(H \backslash G_0)$ の元を、元毎に不変にする H の部分群として特徴づけられる。すなわち、 $\forall x \in H \backslash G_0$ で $xh = x$ 。これを H -coset で書くと、 $\forall g \in G_0$ で、

$H g h = H g$ 。従って、 $N = \{h \in H \mid g h g^{-1} \in H, \forall g \in G_0\}$

此の右辺が上の形に示される事は明らかである。

補題 11 より、 τ_{G_0} は $N \backslash H$ の忠実な表現と考えられるが、更に補題 10 より、これは有限次元表現の直和である。すなわち $N \backslash H$ はコンパクト群の中に忠実に表現されて居るわけで、次の結果が使える。

補題 12. (A. Weil [1]) コンパクト群の忠実に表現されている連結局所コンパクト群は、 K をコンパクト群として、

$\mathbb{R}^n \times K$ の形に限る。

系 $N \backslash H$ のどの連結成分は、 $\mathbb{R}^n \times K$ の形である。

5. 此処でこれ迄に判った事をまとめる。

a) 局所コンパクト群 G とその開部分群 H に対し, H の (P-1) 閉包 $H^\sim (\supset H)$ を作ると, $H^\sim \neq G$, すなわち (G, H) が (P-0) なら, $(G, H^\sim)$ は (P-1) 対となる. 特に, (G, H) が (P-1) 対である事は, $H = H^\sim$ と同値である.

b) 次に $H^\sim$ の開部分群 H_0 を適当にとり, (G, H) を (P-2) 対とする事が出来る.

c) 更に H_0 を含む G のある開部分群 G_0 をとると, H_0 に入る G_0 の正規部分群 N があって, $\forall g \in G_0, \forall n \in N$ に対して, $H_0 g n = H_0 g$ で, $N \setminus H_0$ の単位元の連結成分 $(N \setminus H_0)^0$ は $\mathbb{R}^m \times (\text{コンパクト群})$ の形となる. ┘

さて, 先ず H が連結群の場合を考える. この時 $H_0 \supset H$ となるから $H^\sim = H_0$, すなわち $(G, H^\sim)$ が (P-2) 対となり, N は $H^\sim \setminus G_0$ の各元をとめる. 特に G も連結なら, $G = G_0$ となり, N は G 自身の正規部分群である事に注意する.

(i) $N \not\supset H$ の時, $N_0 \equiv N \cap H$ と書くと, $N_0 \setminus H$ は自明でない連結群で, $N \setminus H^\sim$ の部分群と見られるから, $N_0 \setminus H$ も又, $\mathbb{R}^m \times (\text{コンパクト群}) (\neq \emptyset)$ の形である.

特に (G, H) が (P-1) 対なら, $H = H^\sim$ より又 (P-2) 対となり, $H \supset N$ で, H 自身が G のある開部分群の正規部分群 N を含んで, $N \setminus H$ が上の形ではなくてはならない.

(ii) $N \supset H$ の時は, $\forall f \in L^2(H^\sim \setminus G_0)$ は H -不変であるから, $H^\sim$ -不変である. この事は $H^\sim = N$ を意味する. そしてこの時, (G, H) が (P-1) 対である事は, 正しく H が G のある開部分群の正規部分群である場合に他ならない. $\square$

これ等の結果から, たとえば次が導かれる.

命題 13. G を連結単純群, H を G の連結開部分群とする.

この時, (G, H) が (P-0) 対である為には,

$$H = \mathbb{R}^m \times (\text{コンパクト群}) \quad \text{が必要である.} \quad \square$$

これは, 1 節であげた 3 つの例の最後のものが, (P-0) を満たさない事の証明にもなっている.

一般の場合, H がコンパクト群なら不変ベクトルを持つことは容易に示される. しかし $\mathbb{R}^m$ の形の時には判らない. 唯, $H \cong \mathbb{R}$ の時, 不変ベクトルを持つ例は, 所謂 "Mautner の例" として知られる群で与えられる. すなわち,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z_1 \\ 0 & e^{i\alpha t} & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; -\infty < t < \infty; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; -\infty < t < \infty \right\} \quad (\alpha: \text{無理数})$$

とすれば, (G, H) は (P-2) 対となる.

次に, H が連結でない場合は, 条件は H の e の連結成分についてのみ得られる. この時, H の e の連結成分 H^0 は, $H^\sim$ の

その連結成分に入り，従つて $H^\sim$ の開部分群 H_0 の連結成分に入る事に注意する。 $N_0 \equiv N \cap H^0$ とすれば， $N_0 \setminus H^0$ は $(N \setminus H_0)^0$ の部分群になるから，やはり $\mathbb{R}^m \times (\text{コンパクト群})$ の形となる。

文 献

- [1] A. Weil ; L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann (1940).
- [2] 辰馬伸孝 ; 等質空間に対する淡中型双対定理，数理解析研究所講究録. 280 (1976) pp 65-84.