

WIJSMAN 位相の零次元性について

島根大学・総合理工学研究科 末吉亮也

RYOYA SUEYOSHI

INTERDISCIPLINARY FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING,
SHIMANE UNIVERSITY

1. INTRODUCTION

(X, d) を距離空間, $CL(X)$ を X の空でない閉集合全体とする. 任意の $x \in X$, $A \in CL(X)$ に対して, 点 x と集合 A の距離 $d(x, A)$ を $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ で定める. また任意の $x \in X$ に対して, 実数値関数 $f_x : CL(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_x(A) = d(x, A)$ で定める. このとき $\{f_x : x \in X\}$ によって定まる $CL(X)$ 上の弱位相, すなわち $\{f_x^{-1}(V) : V \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開}, x \in X\}$ を準基にもつ位相を **Wijsman 位相**といい, $\mathcal{T}_{w(d)}$ と書く.

可分な距離空間に対する Wijsman 位相の性質は, 今まで多くの研究者によって研究されてきた. Lechicki, Levi [5] は, 距離空間 (X, d) が可分であることと, その Wijsman 位相 $\mathcal{T}_{w(d)}$ が距離化可能であることが同値であることを証明し, Beer [1] は, 可分な距離空間に対する Wijsman 位相が Polish であることを証明した. この結果から, Costantini [4] は空間 X が Polish であることと, 任意の compatible な X 上の距離 d に対して, d に対する Wijsman 位相 $\mathcal{T}_{w(d)}$ が Polish であることが同値であることを証明した.

一方で, 非可分な距離空間に対する Wijsman 位相の性質については, 最近まであまり研究されてこなかった. その状況の中で, Cao, Junnila, Moors [3] は, 一般の離散距離空間に対する Wijsman 位相についていくつかの定理を証明し, Wijsman 位相の零次元性に関する問題を提起した.

本稿では, Cao, Junnila, Moors [3] による Wijsman 位相の零次元性に関する研究を紹介するとともに, 彼らの提起した問題に対する反例を報告する.

2. WIJSMAN 位相

この節では, Wijsman 位相がもつ基本的性質を紹介する. 詳しくは [2] を参照して頂きたい. Wijsman 位相において, 点列の収束に関して次の同値条件が知られている.

Proposition 2.1. (X, d) を距離空間, $A_0 \in CL(X)$, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を $CL(X)$ の点列とする. このとき A_i が Wijsman 位相に関して A_0 に収束することの必要かつ十分な条件は, 任意の $x \in X$ に対して, 実数列 $\{d(x, A_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ が $d(x, A_0)$ に収束することである.

この同値条件から, Wijsman 位相における収束について, 以下のことが分かる.

Example 2.2. (X, d) を 2 次元ユークリッド空間とする. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $B_i = \{(1/i, 0), (1/i, i)\}$, $B_0 = \{(0, 0)\}$ とおく. このとき $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は Wijsman 位相に関して B_0 に収束する.

Example 2.3. (X, d) を 2 次元ユークリッド空間とする. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $C_i = \{(1/i, 0)\} \times [0, i]$, $C_0 = \{(0, 0)\}$ とおく. このとき $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は Wijsman 位相に関して C_0 に収束しない.

次に hyperspace topology としてよく知られている Vietoris 位相と Wijsman 位相の関係について述べる. Vietoris 位相とは次で定義される位相である.

Definition 2.4. X を Hausdorff 空間とする. 任意の $E \subset X$ に対して,

$$E^+ = \{A \in CL(X) : A \subset E\}$$

$$E^- = \{A \in CL(X) : A \cap E \neq \emptyset\}$$

とすると, $\{V^+ : V \text{ は } X \text{ の開}\} \cup \{W^- : W \text{ は } X \text{ の開}\}$ を準基にもつ $CL(X)$ 上の位相を **Vietoris 位相**といい, $\mathcal{T}_V$ と書く.

一般に Wijsman 位相と Vietoris 位相の関係について次のことが知られている ([2, Theorem 1.2.6, 2.2.5] 参照).

Proposition 2.5. (X, d) を距離空間とし, d と同じ位相を生成する X 上の距離全体の集合を $\mathcal{D}$ とする. このとき,

$$\sup\{\mathcal{T}_{w(d')} : d' \in \mathcal{D}\} = \mathcal{T}_V.$$

このことから, 一般に Wijsman 位相は Vietoris 位相より弱いことが分かる. 一方, Example 2.2 における閉集合列 $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は Vietoris 位相に関して B_0 に収束しない. よって Wijsman 位相と Vietoris 位相は一般には異なる位相である.

次の例 ([2, Example 2.1.6] 参照) から分かるように Wijsman 位相は, 距離に大きく依存する.

Example 2.6. $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ とし, $d, d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める. 任意の $x_i, x_k \in X$ に対して

$$d(x_i, x_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = k, \\ 1 & \text{if } i \neq k, \end{cases}$$

$$d'(x_i, x_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = k, \\ 1 & \text{if } 2 \leq i < k, \\ 2 & \text{if } i = 1, i < k. \end{cases}$$

このとき, d, d' は X 上の距離となる. また d, d' はともに離散位相を生成するが, 一方で $T_{w(d)} \neq T_{w(d')}$ となる.

3. CAO, JUNNILA, MOORS の問題

Definition 3.1. (X, d) を距離空間とする. 任意の異なる $x, y \in X$ に対して, $d(x, y) > \varepsilon$ となるような正の実数 ε が存在するとき, d を一様離散距離であるという.

Definition 3.2. X を Hausdorff 空間とする. 任意の $x \in X$ と, x を含む任意の X の開集合 U に対して, $x \in V \subset U$ となるような X の開かつ閉集合 V が存在するとき, X を零次元であるという.

Definition 3.3. X を Hausdorff 空間とする. 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, $x \in V, x \notin V$ となる X の開かつ閉集合 V が存在するとき, X を完全不連結であるという.

明らかに, 零次元空間は完全不連結である.

Cao, Junnila, Moors は離散位相を生成するような距離に対する Wijsman 位相について, 次の定理を証明した.

Theorem 3.4 (Cao, Junnila and Moors [3]). X を空でない集合とし, d を有限個の値をとる (すなわち, $|d(X \times X)| < \aleph_0$ を満たす) X 上の離散距離とすると, $(CL(X), T_{w(d)})$ は零次元である.

Theorem 3.5 (Cao, Junnila and Moors [3]). X を空でない集合とし, d を任意の X 上の離散距離とすると, $(CL(X), T_{w(d)})$ は完全不連結である.

これらの定理に関して, 彼らは次の問題を提起した.

Question 3.6 (Cao, Junnila and Moors [3]). X を空でない集合とし, d を任意の X 上の離散距離 (または一様離散距離) としても, $(CL(X), T_{w(d)})$ は零次元になるか.

次がこの問題に対する反例である.

Example 3.7 ([6]). $\mathbb{R}^+$ 上の距離 $d: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ を次で定める.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y, \\ 1 & \text{if } 0 < |x - y| \leq 1, \\ |x - y| & \text{if } |x - y| > 1. \end{cases}$$

このとき, d は $\mathbb{R}^+$ 上の一様離散距離となるが, $CL(\mathbb{R}^+)$ 上の d に対する Wijsman 位相 $T_{w(d)}$ は零次元でない.

証明の概略. 任意の $x \in \mathbb{R}^+$ と, 任意の $a < b$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$S_{(a,b)}^x = \{A \in CL(x) : a < d(x, A) < b\}$$

とおくと, $\{S_{(a,b)}^x : a, b \in \mathbb{R}(a < b), x \in X\}$ は, $\mathcal{T}_{w(d)}$ の準基になる ([2, §2.1] 参照).
したがって $(CL(\mathbb{R}^+), \mathcal{T}_{w(d)})$ が零次元でないことを示すためには, $S_{(1,3)}^0$ に含まれる
任意の空でない $(CL(\mathbb{R}^+), \tau_{w(d)})$ の開集合 $\mathcal{U}$ が閉集合でないことを示せばよい.

実際, $S_{(1,3)}^0$ に含まれる任意の空でない $(CL(\mathbb{R}^+), \tau_{w(d)})$ の開集合 $\mathcal{U}$ を与える. こ
のとき, 半順序集合 $(\overline{\mathcal{U}}, \subset)$ は極大元 E_0 をもつことが分かる. さらにこの E_0 は $\mathcal{U}$
に含まれないことが示される. よって $\overline{\mathcal{U}} \neq \mathcal{U}$ より, $\mathcal{U}$ は閉集合でない. □

REFERENCES

- [1] G. Beer, *A Polish topology for the closed subsets of a polish*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 1123–1133.
- [2] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [3] J. Cao, H. J. K. Junnila and W. B. Moors, *Wijsman hyperspaces: Subspaces and embeddings*, Topology Appl. **159** (2012), 1620–1624.
- [4] C. Costantini, *Every Wijsman topology relative to a Polish space is Polish*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1955), 2569–2574.
- [5] A. Lechicki, S. Levi, *Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **1-B** (1987), 439–452.
- [6] R. Sueyosi, *On zero-dimensionality of Wijsman hyperspaces on discrete spaces*, Sci. Math. Jpn. to appear.

INTERDISCIPLINARY FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING, SHIMANE UNIVERSITY,
MATSUE, 690-8504, JAPAN

E-mail address: s119315@matsu.shimane-u.ac.jp