

非線型差分方程式の

局所的理論について

都立大 理学部

高野 恭一

§ 1 序

$\vec{y}$ を m 次元ベクトル, $\vec{f}$ を m 次元ベクトルで, $|x|$ が十分大, $|y|$ が十分小で正則, $\vec{f}(\infty, \vec{0}) = \vec{0}$ とする時 $\vec{y}(x+1) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$ の有界な解の性質については, Y. Sibuya, W. A. Harris さんたちによって調べられている。(1) (2) (3) (4)

それは $\vec{f}(x, \vec{y}(x)) = \vec{f}_0(x) + A(x)\vec{y} + \sum_{|p| \geq 2} f_p(x) \vec{y}^p$ と展開したとき, $A_0 \equiv A(\infty)$ の固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, m}$ (但し $\{\lambda_i\} \neq 1$) が高々次の三つの分類の二つに分かれる場合である。(i) $|\lambda_i| < 1$, (ii) $|\lambda_i| > 1$, (iii) $|\lambda_i| = 1$ with linear elementary divisors.

むづかしいのは $\{\lambda_i\} \ni 1$ の場合である。S. Tanaka さんはこの場合に特殊解を求めてゐるが, 我々は一般解について、知ろうと思う訳で、始めから連立で調べるのは困難なので、単独方程式について調べる。

$y(x+1) = f(x, y(x))$, f は $|x|$ が十分大, $|y|$ が十分小で正則,

$f(\infty, 0) = 0$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{(\infty, 0)} = 1$ を考える。 $f(x, y) = y + ax^{-1} + \sum_{j+k \geq 1} a_{jk} x^j y^k$ と展開した時、 $a \neq 0$ の場合、 $y(x-1) = f(x, y(x))$ の主要部と思われる $y(x-1) = y(x) + ax^{-1}$ の解 $-a \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$ は $-\pi < \arg x < \pi$ で $x \rightarrow \infty$ のとき $\sim -a \log(x+1)$ であるので、有界な解を求める事は困難と思われる。(但し有界な特殊解はある?)。

そこで $a=0$ とするが、後で示す $y = z + \sum p_{jk} x^j z^k$ の形の変換をするとき、 $f(x, y) = y + x^{-1} \sum_{j+k \geq 0} a_{jk} x^j y^k$ であると、うまくない。

$$y(x-1) = f(x, y(x)) \left(= y(x) + x^{-1} \sum_{j+k \geq 0} a_{jk} x^j y(x)^k \right) \dots\dots (1)$$

の有界な一般解を求めることが、この小文の目的である。

(1) は $x(y(x-1) - y(x)) = \sum_{j+k \geq 0} a_{jk} x^j y(x)^k$ ともかいて、

Briot-Bouquet の微分方程式に似ている点に注意しておく。

§ 2. 形式的理論と解析的理論

定理 I.

□ $y(x-1) = y(x) + x^{-1} \sum_{j+k \geq 0} a_{jk} x^j y(x)^k \dots\dots (1)$ において $a_{01} = \lambda$ とする。

$y = z + \sum_{j+k \geq 1} p_{jk} x^j z^k$ なる形の形式的変換を適当に行うと

(1) は、次の 4 つの型の方程式のどれかに帰着される。

(I) $\lambda \neq$ 正の整数, 0, 負の有理数 の場合

$$Z(x-1) = (1 + \lambda x^{-1}) Z(x) \quad \text{-----} \quad (1)$$

(II) $\lambda =$ 正の整数の場合

$$Z(x-1) = (1 + \lambda x^{-1}) Z(x) + b x^{-\lambda-1} \quad \text{-----} \quad (2)$$

(III) $\lambda = 0$ の場合

$$Z(x-1) = Z(x) \left(1 - mc x^{-1} Z(x)^m - md x^{-1} Z(x)^{2m} \right)^{-\frac{1}{m}} \quad \text{-----} \quad (3)$$

(IV) $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν : 正の整数) の場合

$$Z(x-1) = Z(x) + x^{-1} Z(x) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l (x^{-\mu} Z(x)^{\nu})^l \right) \quad \text{-----} \quad (4)$$

但し b, c, d は定数, $m > 0$ 整数.

④ の右辺は形式的級数である

□

定理2 (定理Iで (1) の場合)

『 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ と仮定すると.

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x, z) \in \mathbb{C}^2, \quad |x| \geq \frac{1}{\delta}, \quad |z| \leq \Delta, \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \right.$$

$$\left. -\frac{\pi}{2} + \arg \lambda + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} + \arg \lambda - \varepsilon, \right.$$

δ, Δ は十分小, $\varepsilon > 0$ は任意に十分小 } があり.

$\mathcal{Q}$ で正則な $\varphi(x, z)$ で次の性質を満たすものがある.

- $\varphi(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) z^k$ (収束)
- $g_k(x) \sim \sum_j P_{jk} x^{-j}$, $x \rightarrow \infty$ in $\mathcal{Q}_x$. P_{jk} は定理1の係数.
- $p(x)$ を任意の周期1の周期函数とすると

$$\varphi(x, p(x) \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\lambda+1)}) \text{ は } \mathcal{Q}_x \text{ で (1) の解となる}$$

』

定理3 (定理Iで(II)の場合)

『定理2と同様のことがいえる。但し $\mathcal{Q}$ としては

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x, z); \quad |x| \geq \frac{1}{\delta}, \quad |z| \leq \Delta, \quad |\arg x| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}$$

$$y(x, \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\lambda+1)} \left(\int_{x=\lambda-1}^{\infty} -t^{x-\lambda-1} \frac{\Gamma(x+\lambda)}{\Gamma(x)} \right) + p(x)),$$

は(1)の解となる。 $p(x)$ は周期1の周期関数。

』

定理4 (定理IでIIIの場合)

『任意の正整数 N に対して、次の性質をもつ $\mathcal{Q}$ と $y(x, z)$

$$\text{が存在する。 } \mathcal{Q} = \left\{ (x, z) \in \mathbb{C}^2, \quad |x| \geq \frac{1}{\delta}, \quad |z| \leq \Delta, \quad |\arg x| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right. \\ \left. |m \arg x - \arg c| \leq \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon, \quad \right\}.$$

• $y(x, z)$ は $\mathcal{Q}$ で正則

$$\bullet \left| y_N(x, z) - \sum_{N+1 \leq j+k \leq 0} p_{j,k} x^j z^k \right| = O(|x|^{-N} + |z|^N)$$

• $z(x)$ を (3) の解とすると $y_N(x, z(x))$ は (1) の解。

もし (3) において $d=0$ ならば $z(x)$ としては

$$z(x) = \left(m c \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} + p(x) \right)^{-\frac{1}{m}}. \quad \text{但し } p(x) \text{ は任意の周期1の}$$

周期関数

』

§3. 定理1の証明の概略

$$y = z + \sum p_{j,k} x^j z^k \quad \text{なる変換を}$$

$$y = z + \sum_{j+k=n+1} p_{j,k} x^j z^k \quad \text{なる変換に分解して考える。}$$

(1) の type の方程式にこの変換を行くと

$$Z(x-1) = Z(x) + x^{-1} \sum_{j+k>0} b_{jk} x^{-j} Z(x)^k \quad \text{をえるか}$$

$$j+k < n+1 \quad \text{では} \quad b_{jk} = a_{jk},$$

$$j+k = n+1 \quad \text{では} \quad b_{jk} = a_{jk} - ((k-1)\lambda + j) a_{jk} + (k+1) a_{10} a_{j-1, k+1}.$$

若干の細かい注意が必要であるか。これより定理1の (I) (II)

(IV) はそれぞれに与える。

(III) については、上の type の変換の外に $y = z + p z^{n+1}$ なる変換を交互にくりかえしてゆくばよい。

§ 4 定理 2, 3, 4 の証明の概略.

定理 2 について考える。3, 4 は大体同様である。

微分方程式の専門家には、周知の方法である。

$$P_N(x, z) = z + \sum_{j+k}^{N-1} p_{jk} x^{-j} z^k \quad \text{とする.}$$

$$u = y - P_N(x, z) \quad \text{とおいて} \quad u(x, Z(x)) \text{ の満足する}$$

方程式を求める。但し $Z(x)$ は 0 の解。

$$u(x-1) = f(x, u(x) + P_N(x, Z(x))) - P_N(x-1, (1+\lambda x^{-1})Z(x))$$

$$g_N(x, z, u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u + P_N(x, z)) - P_N(x-1, (1+\lambda x^{-1})z) = u + x^{-1} \sum_{j+k, l} b_{jkl} x^{-j} z^k u^l$$

とすると $u(x, z) \sim \sum_{j+k}^{\infty} p_{jk} x^{-j} z^k$ なる形式解をもつので、

$$b_{j+k, 0} = 0, \quad (j+k < N) \quad b_{001} = \lambda.$$

$$\therefore |g(x, z, u)| \leq |u| + |x|^{-1} (A|u| + B_N(|x|^{-N} + |z|^N))$$

$\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_N^z$ 正則で $|g(x, z)| \leq K_N (|x|^{-N} + |z|^N)$ なる函数族と

する。 $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ におして $T\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}(x, z)$ と

$\bar{g}(x, z) = g(x+1, (1+\lambda(x+1)^{-1})^{-1}z, g(x+1, (1+\lambda(x+1)^{-1})^{-1}z))$ で定義する。 $\bar{g} \in \mathcal{F}$ になる様に $\mathcal{Q}_N, \mathcal{F}$ をきめてやる。

うまくとれば 不動点定理の他の条件は容易に確かめられるので $Tg = g$ なる g が存在し $\phi_N(x, z(x)) + g(x, z(x))$ ($z(x)$ は ① の解) は (1) の解となる。

定理 2 を示すためには、 $O(|x|^{-N} + |z|^N)$ ^{上の} 一意性を用いる必要がある。二つの解 $g_i(x, z)$ ($i=1, 2$) に対して、

$\psi_i(x, c) = g_i(x, c \frac{\Gamma(x+\lambda)}{\Gamma(x+\lambda+1)})$ とする。 $\mathcal{Q}_x$ で $x \rightarrow \infty$ とし、
 $c \frac{\Gamma(x+\lambda)}{\Gamma(x+\lambda+1)} \sim C x^{-\lambda}$ とある。

$\min(1, \operatorname{Re} \lambda) = \sigma$ とすると $|\psi_i(x)| = O(|x|^{-N\sigma})$ で、 $|w(x)| \equiv |x|^{N\sigma} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq k$ 。 $\psi_i(x) = g_i(x+1, c \frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+\lambda+2)}, \psi_i(x+1))$ より

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq (1 + \alpha |x|^{-1}) |\psi_1(x+1) - \psi_2(x+1)|。$$

$x = x_1 + i x_2$ とすると $|x_1| \geq |x| |\sin \eta|$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ 。

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq |x|^{N\sigma} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq |x|^{N\sigma} (x+1)^{-N\sigma} (1 + \alpha |x|^{-1}) |w(x+1)| \leq (1 - \beta |x|^{-1}) |w(x+1)|, \\ &\leq (1 - \delta |x|^{-1}) |w(x+1)| \leq \dots \leq \frac{\Gamma(|x_1|)}{\Gamma(|x_1| - \delta)} \frac{\Gamma(|x_1| + n - \delta)}{\Gamma(|x_1| + n)} k。 \end{aligned}$$

$$\gamma = \beta |\sin \eta| > 0, \quad \therefore |w(x)| = 0。$$

$$\therefore \psi_1(x, c) = \psi_2(x, c) \quad \therefore g_1(x, z) = g_2(x, z)。$$

存在と一意性から之れは定理 2 は、簡単に証明できる。

定理 3, 4 について同様。

§ 4 結び

形式的理論は (IV) $\lambda = \text{負の有理数の場合}$ がまだ出来ていない。解析的理論で (I) で $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ の時、うまくいけば、 $|\bar{f}(x, z)| \leq K_N(|x|^N + |z|^N)$ なる様に $\mathcal{Q}_N$ をとくと、 $\bar{f}(x, z)$ の定義域が $\mathcal{Q}_N$ となるからである。定理 4 で $\mathcal{Q}, \mathcal{F}$ が N に依存するのは、定理 2 でやった一意性がまだいえてないからである。

参考文献 (若干)

- 1) W.A Harris and Y. Shibuya; Asymptotic solutions of systems of nonlinear difference equations. (Arch. for Rat. Mech. & Analysis, 15(1964) 377-395)
- 2) ———; Note on linear difference equations (Bull. Amer. Math. Soc. 70(1964) 123-127)
- 3) ———; General solutions of nonlinear difference equations (Trans. Amer. Math. Soc. 115(1965) 62-75)
- 4) ———, On asymptotic solutions of systems of nonlinear difference equations, J. Reine Angew. Math. 222(1966) 120-135
- 5) J. Horn; Zur Theorie der nichtlinearen Differential- und Differenzgleichungen (J. für reine u. angew. Math. 141 (1912) 182-216)
- 6) ———, Laplacesche-Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen (—————, 146(1916) 95-115)
- 7) ———, Über eine nichtlineare Differenzgleichungen (Jahresb. deutsch. Math. Ver. 26(1918) 23-251)
- 8) S. Tanaka; On asymptotic solutions of non-linear difference equations I II III Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.(A), 7(1953) 107-127, 10(1956) 45-83, 11(1957) 167-184.