

Convergence theorems for resolvents of accretive operators and convex minimization problems

Wataru Takahashi (高橋 渉)

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND COMPUTING SCIENCES

(東京工業大学大学院情報理工学研究科)

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. $f: H \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で凸な下半連続関数とする. このとき, 凸最小化問題

$$\min\{f(x) : x \in C\} = \alpha$$

を考えよう. α は optimal value といわれ, C は admissible set といわれる. 集合 $M = \{y \in C : f(y) = \alpha\}$ は optimal set といわれる. つぎに, この f を用いて

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in C) \\ \infty & (x \notin C) \end{cases}$$

を考えよう. このとき, g は H から $(-\infty, \infty]$ に値をとる proper で凸な下半連続関数である. そこで, 我々は

$$\min\{g(x) : x \in H\} \tag{1}$$

という凸最小化問題を考えることができる. このような g に対して, H 上の集合値写像 ∂g を, $x \in H$ に対して

$$\partial g(x) = \{x^* \in H : g(y) \geq g(x) + (x^*, y - x), y \in H\}$$

で定義し, これを g の劣微分と呼ぶ. H 上の集合値写像 $A \subset H \times H$ は, 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$$

を満たすならば, 増大であるといわれ, $\lambda > 0$ に対して, A の resolvent が

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$$

で定義される. 増大写像 A が, すべての $\lambda > 0$ に対して, $R(I + \lambda A) = H$ を満たすならば, m -増大といわれる. ただし, $R(I + \lambda A)$ は $I + \lambda A$ の値域を表す. proper で凸な下半連続関数 $g: H \rightarrow (-\infty, \infty]$ に対して, その劣微分 ∂g は m -増大になることが知られている.

(1) の解を求めるよく知られた方法として, Martinet[9] によって導入された proximal point algorithm というものがある. このアルゴリズムは, resolvent J_λ に関係がある. すなわち,

$$J_\lambda x = \operatorname{argmin} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 : z \in H \right\}$$

である (Moreau[10] を参照せよ).

proximal point algorithm とは, $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ とするとき, $x_0 \in H$ を初期点とし,

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で帰納的に点列 $\{x_n\}$ を生成し, (1) の解を求める点列的構成法のことである (Rockafellar[13] を参照せよ).

一方, 我々は, 非拡大写像 T の 2 つの不動点近似法を知っている. Halpern[4] によって導入された点列的近似法

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と, あとは Mann[8] によって導入された

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の近似法である. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ である.

ここでは, Halpern と Mann によって導入された点列的不動点近似法を用いて, (1) の解を求める点列的構成法を議論するのが一つの目的である. Halpern による構成法では強収束のかたちで (1) の解が求まり, Mann による構成法を用いると, Rockafellar の定理 [13] が一般化されたかたちで得られる.

2. 準備

E を Banach 空間とし, E^* をその共役空間とする. $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または (x, x^*) で表す. E における点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \rightarrow x$ で表し, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す.

E の凸性の modulus δ は, $0 \leq \varepsilon \leq 2$ となる ε に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

で定義される. Banach 空間 E が一様凸であるとは, $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta(\varepsilon) > 0$ がつねに成り立つときをいう. E の元 x に対して,

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが, この J を E 上の duality 写像という. $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ としよう. このとき, $x, y \in U$ に対して, 極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (2)$$

を考えよう. E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは, 任意の $x, y \in U$ に対して, (2) がつねに存在するときをいう. E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは, 任意の $y \in U$ に対して, (2) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう. E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは, 任意の $x \in U$ に対して, (2) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう. E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば, E 上の duality 写像は一価写像になる.

E を Banach 空間とし, $A \subset E \times E$ としよう. このとき, $A \subset E \times E$ が増大作用素 (accretive operator) であるとは, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対してつねに

$$(y_1 - y_2, j) \geq 0$$

となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう. ただし, J は E の双対写像である.

補助定理 2.1 $x, y \in E$ とする. このとき, つぎの (1) と (2) は同値である.

(1) すべての $\lambda \geq 0$ に対して, $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ である;

(2) $(y, f) \geq 0$ となる $f \in J(x)$ が存在する.

この補助定理を用いて, 増大作用素の特徴づけを行うことができる.

定理 2.2 つぎの条件 (1) と (2) は同値である.

(1) $A \subset E \times E$ は増大作用素である;

(2) すべての $\lambda \geq 0$ と $(x_i, y_i) \in A$ ($i = 1, 2$) に対して, つねに

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|$$

が成り立つ.

$A \subset E \times E$ を増大作用素とする. このとき, すべての $\lambda > 0$ に対して,

$$J_\lambda x = \{z \in E : z + \lambda Az \ni x\} \quad (3)$$

を考えよう.

$$z_1 + \lambda w_1 = x, \quad z_2 + \lambda w_2 = x, \quad w_1 \in Az_1, \quad w_2 \in Az_2$$

とすると, A は増大作用素であるから

$$0 = \|z_1 + \lambda w_1 - (z_2 + \lambda w_2)\| = \|z_1 - z_2 + \lambda(w_1 - w_2)\| \geq \|z_1 - z_2\|$$

である. よって, $z_1 = z_2$ であり, $J_\lambda x$ は一価となる.

また, J_λ の定義域と値域は

$$D(J_\lambda) = R(I + \lambda A), \quad R(J_\lambda) = D(A)$$

である. このような J_λ ($\lambda > 0$) は A の resolvent とよばれ, (3) からわかるように,

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad (\lambda > 0)$$

である. この J_λ ($\lambda > 0$) から, A の吉田近似といわれる

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \quad (\lambda > 0)$$

も定義できるが, J_λ , A_λ についてはつぎの性質が成り立つ.

定理 2.3 (J_λ , A_λ の基本的性質) $A \subset E \times E$ を増大作用素とし, $\lambda > 0$ とする. このとき, つぎの (i), (ii), (iii), (iv) が成り立つ.

$$(i) \quad \|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in R(I + \lambda A));$$

(ii) A_λ は一価の増大作用素であり, かつ

$$\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leq \frac{2}{\lambda} \|x - y\| \quad (\forall x, y \in R(I + \lambda A));$$

$$(iii) \quad (J_\lambda x, A_\lambda x) \in A \quad (\forall x \in R(I + \lambda A));$$

$$(iv) \quad \|A_\lambda x\| \leq |Ax| \quad (\forall x \in D(A) \cap R(I + \lambda A)) \text{ である. ただし, } |Ax| = \inf\{\|z\| : z \in Ax\} \text{ である.}$$

$A \subset E \times E$ が増大作用素であり, かつ

$$R(I + \lambda A) = E \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成立しているとき, A は m -増大作用素 (m -accretive operator) であるといわれる.

定理 2.4 (m -増大作用素の同値条件) $A \subset E \times E$ が m -増大作用素であるための必要十分条件は, A が増大作用素で, かつ

$$\text{ある } r > 0 \text{ に対して } R(I + rA) = E$$

が成立することである.

定理 2.5 (∂f は m -増大作用素) H を Hilbert 空間とし, f を H から $(-\infty, \infty]$ への proper で下半連続な凸関数とする. このとき, ∂f は m -増大作用素である.

E を Banach 空間とし, $A \subset E \times E$ を増大作用素とする. このとき, すべての $\lambda > 0$ に対して

$$\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$$

が成立するならば, A は値域条件 (range condition) を満たすといわれる.

このとき, $A^{-1}0 = \{x \in D(A) : 0 \in Ax\}$ と A の resolvent J_r の不動点の集合の間にはつぎの関係がある.

補助定理 2.6 E を Banach 空間とし, $A \subset E \times E$ を増大作用素とする. このとき, すべての $r > 0$ に対して

$$F(J_r) = A^{-1}0$$

である.

これを用いてつぎの補助定理を証明することができる.

補助定理 2.7 E を Banach 空間とし, $A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする. このとき, $x \in \bigcap_{r>0} R(I+rA)$ に対して, つぎの (i), (ii) が成立する.

(i) $t_n \rightarrow \infty$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{t_n} x$ となる $\{t_n\}$ が存在すれば, $y \in A^{-1}0$ である.

(ii) E が一様凸であり, $t_n \rightarrow \infty$, $s_n \rightarrow \infty$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{t_n} x$, $z = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{s_n} x$ となる $\{t_n\}$, $\{s_n\}$ が存在すれば, $y = z$ となる.

定理 2.8 ($r \rightarrow \infty$ のときの $J_r x$ の収束性) E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし, $A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする. C を E の空でない閉凸集合で,

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$$

を満たすものとする. このとき, $0 \in R(A)$ ならば, 任意の $x \in C$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} J_t x$ が存在して, その極限は $A^{-1}0$ に属する.

つぎに $r \rightarrow \infty$ のときの $J_r x$ の収束先について, 少々考察を加える.

E を Banach 空間とし, C, D を E の部分集合とする. $P: C \rightarrow D$ が sunny であるとは, $x \in C$ に対して, $Px + t(x - Px) \in C$, $t \geq 0$ ならば

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

がつねに成り立つことである.

補助定理 2.9 E を一様凸な Banach 空間とし, C を E の凸集合とする. また $C_0 \subset C$ とし, P を C から C_0 の上への retraction とする. このとき, 任意の $x \in C$ と $y \in C_0$ に対して, $(x - Px, J(Px - y)) \geq 0$ がつねに成り立つならば, P は nonexpansive であり, かつ sunny である.

定理 2.10 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様な凸 Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$ を C から C への非拡大写像の列とし, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ を仮定する. $x \in C$ とし, $S_n = T_n T_{n-1} \dots T_1$ ($n \in N$) とする. このとき, 集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}\{S_m x : m \geq n\} \cap U$$

は高々一点からなる. ただし $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である.

3 Resolvents の収束定理

この節では, Halpern と Mann の不動点近似法のアイデアを用いて, resolvents の収束定理を証明する.

定理 3.1[6] E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし, $A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする. C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$$

を満たすものとする. $x_0 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する. ここで, $Px = u$ とおくと, P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である.

証明 $t > 0$ に対して, $z_t = J_t x$ とし, $y_n = J_{r_n} x_n$ とする. $A^{-1}0 \neq \emptyset$ から, $v \in A^{-1}0$ となる元 v が存在する. このとき, すべての $s > 0$ に対して, $J_s v = v$ である. そこで

$$\begin{aligned} \|x_1 - v\| &= \|\alpha_0 x + (1 - \alpha_0) J_{r_0} x_0 - v\| \\ &\leq \alpha_0 \|x - v\| + (1 - \alpha_0) \|J_{r_0} x_0 - J_{r_0} v\| \\ &\leq \alpha_0 \|x - v\| + (1 - \alpha_0) \|x_0 - v\| \\ &= \|x - v\| \end{aligned}$$

となる. いま, $\|x_k - v\| \leq \|x - v\|$ を仮定すると,

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - v\| &= \|\alpha_k x + (1 - \alpha_k) J_{r_k} x_k - v\| \\ &\leq \alpha_k \|x - v\| + (1 - \alpha_k) \|J_{r_k} x_k - J_{r_k} v\| \\ &\leq \alpha_k \|x - v\| + (1 - \alpha_k) \|x_k - v\| \\ &\leq \alpha_k \|x - v\| + (1 - \alpha_k) \|x - v\| \\ &= \|x - v\| \end{aligned}$$

となり, 数学的帰納法によりすべての $n \in N$ に対して, $\|x_n - v\| \leq \|x - v\|$ であることがわかる. また

$$\|y_n - v\| = \|J_{r_n} x_n - v\| \leq \|x_n - v\| \leq \|x - v\|$$

であるから, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界な点列である.

定理 2.8 より, $t \rightarrow \infty$ のとき, $J_t x$ は $A^{-1}0$ の元に強収束することを知っている. そこで, いま $z = \lim_{t \rightarrow \infty} J_t x$ とおくと, 不等式

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x - z, J(x_n - z)) \leq 0 \quad (4)$$

が成り立つ. これを証明するためには

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x - z, J(y_n - z)) \leq 0 \quad (5)$$

を証明すればよい. 実際

$$x_{n+1} - y_n = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) y_n - y_n = \alpha_n (x - y_n)$$

なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ より, $x_{n+1} - y_n \rightarrow 0$ となる. ここで, E が一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつことより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x - z, J(x_{n+1} - z)) - (x - z, J(y_n - z))| = 0$$

となる. よって (5) は (4) を意味する.

(5) を証明する. 定理 2.3 より, $A_t x \in AJ_t x = Az_t$, $A_{r_n} x_n \in AJ_{r_n} x_n = Ay_n$ を知っている. これらと A が増大作用素であることから

$$(A_{r_n} x_n - A_t x, J(y_n - z_t)) = \left(A_{r_n} x_n - \frac{x - z_t}{t}, J(y_n - z_t) \right) \geq 0$$

である. よって

$$(x - z_t, J(y_n - z_t)) \leq t(A_{r_n} x_n, J(y_n - z_t)) \quad (6)$$

である. また $r_n \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_{r_n} x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n - J_{r_n} x_n}{r_n} \right\| = 0 \quad (7)$$

でもある. いま, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $z_t \rightarrow z$ と E が一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつことより,

$$|(x - z, J(y_n - z)) - (x - z, J(y_n - z_s))| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall n)$$

であり, かつ

$$|(x - z, J(y_n - z_s)) - (x - z_s, J(y_n - z_s))| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall n)$$

となるような十分大きな $s > 0$ をとることができる. また (6) と (7) から, ある n_0 が存在し, $n \geq n_0$ ならば

$$(x - z_s, J(y_n - z_s)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

である. そこで $n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned} (x - z, J(y_n - z)) &= (x - z, J(y_n - z)) - (x - z, J(y_n - z_s)) \\ &\quad + (x - z, J(y_n - z_s)) - (x - z_s, J(y_n - z_s)) \\ &\quad + (x - z_s, J(y_n - z_s)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

である. これは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x - z, J(y_n - z)) \leq \varepsilon$$

を意味する. $\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x - z, J(y_n - z)) \leq 0$$

である. これで (5) が証明できた.

$$(1 - \alpha_n)(y_n - z) = x_{n+1} - z - \alpha_n(x - z)$$

なので,

$$(1 - \alpha_n)^2 \|y_n - z\|^2 \geq \|x_{n+1} - z\|^2 - 2(\alpha_n(x - z), J(x_{n+1} - z))$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|y_n - z\|^2 + 2(\alpha_n(x - z), J(x_{n+1} - z)) \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n(x - z, J(x_{n+1} - z)) \end{aligned}$$

である. (4) によって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 m があって, $n \geq m$ ならば

$$(x - z, J(x_n - z)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにできる. よって, すべての n に対して

$$\|x_{n+m+1} - z\|^2 \leq (1 - \alpha_{n+m}) \|x_{n+m} - z\|^2 + \alpha_{n+m} \varepsilon$$

である. これから

$$\|x_{n+m+1} - z\|^2 \leq \prod_{i=m}^{n+m} (1 - \alpha_i) \|x_m - z\|^2 + \left\{ 1 - \prod_{i=m}^{n+m} (1 - \alpha_i) \right\} \varepsilon$$

を得る. よって

$$\|x_{n+m+1} - z\|^2 \leq \exp \left(- \sum_{i=m}^{n+m} \alpha_i \right) \|x_m - z\|^2 + \varepsilon$$

を得る. そこで, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ より

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+m+1} - z\|^2 \leq \varepsilon$$

となる. $\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|^2 \leq 0$$

となり, $\{x_n\}$ が z に強収束することがわかる.

定理 3.2[6] E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし, $A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする. C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする. $x_0 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$$

を満たすものとする. このとき, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある元 v に弱収束する.

証明 $u \in A^{-1}0$ とし, $y_n = J_{r_n}x_n$ とする. $x \neq u$ と仮定してもよいので $l = \|x - u\| > 0$ に対して

$$D = C \cap \{z \in E : \|z - u\| \leq l\}$$

とする. このとき, D は C の空でない有界閉凸集合で, すべての $s > 0$ に対して $J_s D \subset D$ でもある. そこで一般性を失うことなしで, C を有界であると仮定できる.

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\| &= \|\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)y_n - u\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - u\| + (1 - \alpha_n)\|y_n - u\| \\ &\leq \|x_n - u\| \end{aligned}$$

より, $\{\|x_n - u\|\}$ は単調減少数列である. そこで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ が存在する. いま, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ とする. 一般性を失うことなしで $c > 0$ と仮定してもよい. A が増大作用素であることと, E の凸性の modulus δ の性質より,

$$\begin{aligned} \|y_n - u\| &\leq \left\| y_n - u + \frac{r_n}{2}(A_{r_n}x_n - 0) \right\| \\ &= \left\| y_n - u + \frac{1}{2}(x_n - J_{r_n}x_n) \right\| \\ &= \left\| \frac{x_n + y_n}{2} - u \right\| \\ &\leq \|x_n - u\| \left\{ 1 - \delta \left(\frac{\|x_n - y_n\|}{\|x - u\|} \right) \right\} \end{aligned}$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_n)\|x_n - u\| \delta \left(\frac{\|x_n - y_n\|}{\|x - u\|} \right) &\leq (1 - \alpha_n)\{\|x_n - u\| - \|y_n - u\|\} \\ &= \|x_n - u\| - \alpha_n\|x_n - u\| - (1 - \alpha_n)\|y_n - u\| \\ &\leq \|x_n - u\| - \|x_{n+1} - u\| \end{aligned}$$

である. ここで $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$ と $c > 0$ であることより, $\delta \left(\frac{\|x_n - y_n\|}{\|x - u\|} \right) \rightarrow 0$ を得る.

E は一様凸なので, δ の性質より, $x_n - y_n \rightarrow 0$ である. これと $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$ を用いて, $y_n - J_1 y_n \rightarrow 0$ である. 実際,

$$\begin{aligned} \|y_n - J_1 y_n\| &= \|(I - J_1)y_n\| \\ &= \|A_1 y_n\| \\ &\leq \inf\{\|z\| : z \in Ay_n\} \\ &\leq \|A_{r_n} x_n\| \\ &= \left\| \frac{x_n - y_n}{r_n} \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となるからである. いまや, $\{x_n\}$ が $A^{-1}0$ の元に弱収束することを示そう.

$\{x_n\}$ は有界であるから, 弱収束する部分列 $\{x_{n_i}\}$ をもつ. $x_{n_i} \rightharpoonup v$ としよう. このとき, $x_n - y_n \rightarrow 0$ であることより, $y_{n_i} \rightharpoonup v$ でもある. ここで $y_n - J_1 y_n \rightarrow 0$ を用いると

$v \in F(J_1) = A^{-1}0$ である. 一方, $T_n = \alpha_n I + (1 - \alpha_n)J_{r_n}$ とし, $S_n = T_n T_{n-1} \dots T_0$ とすると $F(T_n) = F(J_{r_n}) = A^{-1}0$, $x_{n+1} = S_n x$ を得る. そこで定理 2.10 を用いると

$$\{v\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\text{co}}\{x_m : m \geq n\} \cap A^{-1}0$$

である. よって, $\{x_n\}$ は v に弱収束する.

定理 3.1 および定理 3.2 の直接的結果としてつぎの 2 つの定理が得られる.

定理 3.3 H を Hilbert 空間とし, $A : H \rightarrow 2^H$ を極大単調作用素とする. $x_0 = x \in H$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する. ここで, $Px = u$ とおくと, P は H から $A^{-1}0$ の上への metric projection である.

定理 3.4 H を Hilbert 空間とし, $A : H \rightarrow 2^H$ を極大単調作用素とする. $x_0 = x \in H$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$ を満たすものとする. このとき, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する.

4 応用

この節では, 定理 3.3 および定理 3.4 を用いて, 凸最小化問題の解を求める proximal point algorithm について議論する.

定理 4.1 H を Hilbert 空間とし, $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする. $x_0 = x \in H$ とし,

$$y_n = \arg \min_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \right\},$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)y_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $(\partial f)^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 v に強収束する. ここで, v は x に一番近い f の minimizer である. さらに,

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leq \alpha_n (f(x) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n} \|y_n - v\| \|y_n - x_n\|$$

が成り立つ.

証明

$$g_n(z) = f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \quad (\forall z \in H)$$

とすると,

$$\partial g_n(z) = \partial f(z) + \frac{1}{r_n}(z - x_n) \quad (\forall z \in H)$$

である. いま

$$y_n = \arg \min_{z \in H} g_n(z)$$

とするならば, $0 \in \partial g_n(y_n) = \partial f(y_n) + \frac{1}{r_n}(y_n - x_n)$ となる. これより

$$x_n \in y_n + r_n \partial f(y_n) \quad (8)$$

となり, $J_{r_n} x_n = y_n$ を得る. ここで, 補助定理 2.9 を用いると, $\{x_n\}$ は f の minimizer のうちの x に一番近い点 v に強収束する.

つぎに, (8) より, $\frac{1}{r_n}(x_n - y_n) \in \partial f(y_n)$ を得る. これから

$$f(v) \geq f(y_n) + \left(\frac{1}{r_n}(x_n - y_n), v - y_n \right)$$

となる. よって

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) - f(v) &= f(\alpha_n x + (1 - \alpha_n) y_n) - f(v) \\ &\leq \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n) f(y_n) - f(v) \\ &= \alpha_n (f(x) - f(v)) + (1 - \alpha_n) (f(y_n) - f(v)) \\ &\leq \alpha_n (f(x) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n} (x_n - y_n, y_n - v) \\ &\leq \alpha_n (f(x) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n} \|y_n - x_n\| \|y_n - v\| \end{aligned}$$

を得る.

定理 4.2 H を Hilbert 空間とし, $f: H \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする. $x_0 = x \in H$ とし,

$$\begin{aligned} y_n &= \arg \min_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \right\}, \\ x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

とする. ただし, $\{x_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$ を満たすものとする. このとき, $(\partial f)^{-1} 0 \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1} 0$ の元 v に弱収束する. さらに,

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leq \alpha_n (f(x_n) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n} \|y_n - v\| \|y_n - x_n\|$$

が成り立つ.

証明 定理 4.1 の証明と同じようにできる.

REFERENCES

1. F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach space*, Archs. Ratio. Anal., 24 (1967), 82-90.
2. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer, Berlin, 1975.
3. O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim., 29 (1991), 403-419.
4. B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 957-961.
5. S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, to appear.
6. S. Kamimura and W. Takahashi, *Convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, to appear.
7. S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Analysis, 2 (1993), 333-342.
8. W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 506-510.
9. B. Martinet, *Regularisation, d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle, 1970, 154-159.
10. J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien*, Bull. Soc. Math., France, 93 (1965), 273-299.
11. S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 67 (1979), 274-276.
12. S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 287-292.
13. R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim., 14 (1976), 877-898.
14. J. Schu, *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., 43 (1991), 153-159.
15. N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 3641-3645.
16. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.
17. W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.
18. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 97 (1986), 55-58.
19. W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)*, Kindaikagakusha, Tokyo, 1988.
20. W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Can. J. Math., 44 (1992), 880-887.
21. W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Analysis, 30 (1997), 1283-1293.
22. W. Takahashi, *Fan's existence theorem for inequalities concerning convex functions and its applications*, in Minimax Theory and Applications (S. Simons and B. Ricceri, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, 241-260.
23. W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica, 48 (1998), 1-9.
24. W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Mathematical and Computer Modelling, to appear.
25. W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Approximation Theory, 91 (1997), 386-397.
26. W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Analysis, 5 (1998), 45-56.
27. W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., 104 (1984), 546-553.
28. R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math., 58 (1992), 486-491.