

ヒルベルト空間の中の 4 個の部分空間の 配置問題

九州大学数理 綿谷安男 (Yasuo Watatani)

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

甲子園大学経営情報 榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto)

College of Business Administration and Information Science,
Koshien University

1 動機と我々の枠組み

動機

この論説では、ヒルベルト空間の中の閉部分空間の配置問題を扱う。

ヒルベルト空間 H の中の 1 個の部分空間 E の配置は、 $(\dim E, \operatorname{codim} E)$ により、決定される。ヒルベルト空間 H の中の 2 個の部分空間 E と F の配置は H を、 E と F の 2-subspaces で分解すると、

$$H = (E \cap F) \oplus (E \cap F^\perp) \oplus (E^\perp \cap F) \oplus (E^\perp \cap F^\perp) \oplus (\text{残り})$$

より、

$$E = (E \cap F) \oplus (E \cap F^\perp) \oplus 0 \oplus 0 \oplus \operatorname{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = (E \cap F) \oplus 0 \oplus (E^\perp \cap F) \oplus 0 \oplus \operatorname{Im} \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$$

の形から、unitary の枠内で完全に決定される。

この 2 個の場合を、群の表現で見ると、 $e = \operatorname{Proj}(E)$, $f = \operatorname{Proj}(F)$ として、 (E, F) の組と、symmetry $(2e-1, 2f-1)$ を対応させることにより、2 つの部分空間の組の集合と、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G_2$ の unitary 表現集合とが一对一に対応する。

3 個以上の場合に、群 $G_n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は、type I でない、non-amenable 群である。従って、その unitary 表現の分類は困難である。そこで、unitary 性を弱めることを考える。つまり、分類を位相ベクトル空間としての同値性から考えようというのが、そもそもの動機である。

枠組

まず、無限次元ヒルベルト空間 H の中の部分空間 $E_1, E_2, \dots, E_n$ に対して、順序付けられた組 $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ を考え、これを、n-subspace system ということにする。このものの間の同値関係として、unitary 性よりも弱く次をおく。

定義 1.1

2 つの n-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \dots, E'_n)$ に対して、 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が (同配置) 同値である ($\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$) とは、ある有界可逆作用素 $T: H \rightarrow H'$ が存在して、 $T(E_i) = E'_i (\forall i = 1, \dots, n)$ をみたすときをいう。

注意 1.2

K を、ヒルベルト空間、 $A \in B(K)$ とするとき、 A には、標準的に、4-subspace system $\mathcal{S}_A = (H; E_1, \dots, E_4)$ が、次のように、対応する。

$$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K, E_3 = \{(x \oplus Ax) | x \in K\}, E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}.$$

このとき、 $A, B \in B(K)$ に対して、 $A \cong B$ (similar), つまり、ある $V \in B(K)$ (有界可逆作用素) が存在して、 $VAV^{-1} = B$ であることと、 $\mathcal{S}_A \cong \mathcal{S}_B$ であることとは同値である。(何故なら、 $\mathcal{S}_A \cong \mathcal{S}_B$ とすると、ある $T \in B(K \oplus K)$ が存在して、 $T(E_i) = E_i (i = 1, \dots, 4)$ である。 $T(E_1) = E_1$ より、 $T(K \oplus 0) = K \oplus 0$ から、 $\begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ T_4 & T_2 \end{pmatrix}$ として、 $\begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ の形とな

る。 $T(E_2) = E_2$ より、 $T(0 \oplus K) = 0 \oplus K$ から、 $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ の形となる。

また、 $T(E_4) = E_4$ より、 $T(x \oplus x) = y \oplus y$ より、 $T_1x \oplus T_2x = y \oplus y$ から、 $T_1x = T_2x$ を得て、 $T_1 = T_2$ を持つ。これを V とおくと、 $(V \oplus V)(E_3) = E_3$

から、 $(V \oplus V)(x \oplus Ax) = Vx \oplus VAx = (y \oplus By)$ より、 $BVx = VAx$ より、 $B = VAV^{-1}$ となる。このように、4-subspace systems の同値性は、operators の similarity の概念を、一般化したものとなっている。

注意 1.3

n-subspace systems $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が、similar (同配置同値) であることと、 $\mathcal{S}$ と、 $\mathcal{S}'$ から、決まる表現 $\pi_{\mathcal{S}}$ と $\pi_{\mathcal{S}'}$ が、similar であることとは、同じ

ではない。

n-subspace systems の分類を考える上で、基本となる building block として、indecomposable なものを、以下のように定義する。

定義 1.4

2 つの n-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \dots, E'_n)$ の直和を、 $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}' = (H \oplus H'; E_1 \oplus E'_1, \dots, E_n \oplus E'_n)$ で定義する。

定義 1.5

n-subspace system $\mathcal{S}$ が、decomposable system であることを、あるゼロでない 2 つの n-subspace systems $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ が存在して、 $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ となることとする。

$\mathcal{S}$ が、decomposable であることは、次の形でも述べることができる。

命題 1.6

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ が、decomposable であるということは、ある閉部分空間 $H_1 \neq (0), H_2 \neq (0)$ が、存在して、

$$H_1 + H_2 = H, H_1 \cap H_2 = (0), E_i = E_i \cap H_1 + E_i \cap H_2 (\forall i = 1, \dots, n)$$

を、満たすことである。

定義 1.7

n-subspace system $\mathcal{S}$ が、indecomposable system であるとは、 $\mathcal{S}$ が、decomposable でないときをいう。

同配置同値を projections の言葉を使って書くと、次になる。

命題 1.8

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \dots, E'_n)$ を、2 つの同配置同値な n-subspace systems とする。 $P_i = Proj(E_i), P'_i = Proj(E'_i) (\forall i = 1, \dots, n)$ 、とおく。このとき、ある可逆作用素 $a \in B(H, H')$ が、存在して、

$$P_i = (a^{-1} P'_i a) P_i \text{ かつ } P'_i = (a P_i a^{-1}) P'_i (\forall i = 1, \dots, n)$$

が成立する。

作用素論におけるように、similar 性よりも弱い同値性として、quasi 同配置同値を、次により、n-subspace systems に導入できる。

定義 1.9

2 つの n-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \dots, E'_n)$ に対して、 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が quasi 同配置同値である ($\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$) とは、ある $T \in B(H, H'), S \in B(H', H)$ が存在して、 $Ker T = Ker S = 0$ かつ、 $\overline{R(T)} = H', \overline{R(S)} = H$ 、かつ、 $T(E_i) \subset E'_i (\forall i = 1, \dots, n), S(E'_i) \subset E_i (\forall i = 1, \dots, n)$ 、を、満たすことである。

命題 1.10

n -subspace systems に対して、同配置同値により、indecomposability は、移り合うが、quasi 同配置同値では、一般に、indecomposability は、移り合わない。

以上の枠組で、無限次元ヒルベルト空間における、indecomposable n -subspace systems を、考察の対象とするのが我々の目的である。

2 Gelfand と Ponomarev の結果

次に、我々のモデルとなる有限次元ベクトル空間における Gelfand と Ponomarev による有名な仕事を要約しておこう。

Gelfand と Ponomarev は、1970 年に、有限次元ベクトル空間における indecomposable n -subspace systems を考え、それを、 $n=4$ のときまで、完全決定した。彼らの結果は次の通りである。

(1) $n=1$ のとき、

$\mathcal{S} \cong (H; E_1)$, $\dim H = 1$ で、 $\dim E_1 = 0$ か 1 。

(2) $n=2$ のとき、

$\mathcal{S} \cong (H; E_1, E_2)$, $\dim H = 1$ で、 $\dim E_i = 0$ か 1 ($i = 1, 2$)。

(3) $n=3$ のとき、

$\mathcal{S} \cong (H; E_1, E_2, E_3)$, $\dim H = 1$ で、 $\dim E_i = 0$ か 1 ($i = 1, 2, 3$) であるか、

$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}; \mathbb{C}(1 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1), \mathbb{C}(1 \oplus 1))$ である。

$n=4$ のとき Gelfand と Ponomarev は、4-subspace systems $\mathcal{S}$ に対して、次の defect と呼ばれる量 $\rho(\mathcal{S})$ を定義した。

$$\rho(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^4 \dim E_i - 2\dim H.$$

このとき、彼らは、この不変量の値域が、 $\{0, \pm 1, \pm 2\}$ を示して、その値に従って、indecomposable 4-subspace systems を以下のように、分類した。

(a) 全体空間が、偶数次元 ($2k$) ($k=1, 2, \dots$) である場合、及び、

(b) 全体空間が、奇数次元 ($2k+1$) ($k=0, 1, 2, \dots$) の場合は、次の通りである。

(添え字の置き換えで、同じものは同一視している。)

(a) 全体空間 H が、偶数次元の場合の分類

以下で、 $\{e_i, f_i\}, i = 1, \dots, k$ を、 H の $CONS$ とする。

(a の 1) defect が (-1) のとき、次の形のものと同値である。

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_2 + f_1, \dots, e_k + f_{k-1}],$$

$$E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k],$$

(a の 2) defect が $(+1)$ のとき、次の形のものと同値である。

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_k + f_{k-1}), f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(a の 3) defect が 0 のとき、(パラメータなし)、次の形のものと同値である。

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_k + f_{k-1})], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(a の 4) defect が 0 のとき、(パラメータ λ つき)、次の形のものと同値である。

$$(ここで、\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, 1 \text{ である。}). H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [(e_1 + \lambda f_1), (e_2 + f_1 + \lambda f_2), \dots, (e_k + f_{k-1} + \lambda f_k)], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(b) 全体空間 H が、奇数次元の場合の分類

以下で、 $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k\}$ を、 H の $CONS$ とする。

(b の 1) defect が (-1) のとき、

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [(e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(b の 2) defect が $(+1)$ のとき、

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k, e_{k+1}].$$

(b の 3) defect が 0 のとき、

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(b の 4) defect が (-2) のとき、

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [(e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)], E_4 = [e_1 + f_2, \dots, (e_{k-1} + f_k), (e_k + e_{k+1})].$$

(b の 5) defect が $(+2)$ のとき、

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k], E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k, e_{k+1}], E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)], E_4 = [f_1, (e_1 + f_2), \dots, (e_{k-1} + f_k), (e_k + e_{k+1})].$$

(Gelfand と Ponomarev のアイデア)

Gelfand と Ponomarev は、この証明のために、n-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ の全体を考える。道具として、2個の変換 Φ^+ と Φ^- を導入する。それは、n-subspace systems $\mathcal{S}$ を、n-subspace systems $\mathcal{S}^+ = \Phi^+(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}^- = \Phi^-(\mathcal{S})$ に動かす。 Φ^+ と Φ^- は、次の性質を持つ。

(1) n-subspace systems $\mathcal{S}$ が、indecomposable とする。このとき、 $\Phi^+(\mathcal{S})$ と $\Phi^-(\mathcal{S})$ は、indecomposable である。

(2) $\mathcal{S}$ が、indecomposable で、 $\mathcal{S} \neq 0$, $\Phi^+(\mathcal{S}) \neq 0$ (resp. $\Phi^-(\mathcal{S}) \neq 0$) ならば、 $\Phi^-\Phi^+(\mathcal{S})$ (resp. $\Phi^+\Phi^-(\mathcal{S})$) $\cong \mathcal{S}$ である。

(3) $\mathcal{S}$ が、indecomposable で、 $\mathcal{S} \neq 0$, $\Phi^+(\mathcal{S}) \neq 0$ (resp. $\Phi^-(\mathcal{S}) \neq 0$) ならば、 $\rho(\mathcal{S}) = \rho(\Phi^+(\mathcal{S}))$ (resp. $\rho(\mathcal{S}) = \rho(\Phi^-(\mathcal{S}))$) である。

(4) $\mathcal{S}$ が、indecomposable で、 $\rho(\mathcal{S}) < 0$ とする。このとき、 $\exists \ell \geq 1$ が存在して、 $(\Phi^+)^{\ell-1}(\mathcal{S}) \neq 0$, $(\Phi^+)^{\ell}(\mathcal{S}) = 0$ かつ、 $\mathcal{S} \cong (\Phi^-)^{\ell-1}(\Phi^+)^{\ell-1}(\mathcal{S})$ が成立する。

(5) $\mathcal{S}$ が、indecomposable で、 $\rho(\mathcal{S}) > 0$ とする。このとき、 $\exists \ell \geq 1$ が存在して、 $(\Phi^-)^{\ell-1}(\mathcal{S}) \neq 0$, $(\Phi^-)^{\ell}(\mathcal{S}) = 0$ 、かつ、 $\mathcal{S} \cong (\Phi^+)^{\ell-1}(\Phi^-)^{\ell-1}(\mathcal{S})$ が成立する。

これにより、この Φ^+ , Φ^- を使って、 $\rho(\mathcal{S}) \neq 0$ のときの、indecomposable 4 subspace system の分類がなされる。

注意 2.1

これより、 $\rho(\mathcal{S}) \neq 0$ の状況は、 $\Phi^{\pm}(\mathcal{S}) = 0$ となる indecomposable 4 subspace systems の決定になる。一方、 $\text{defect} \rho(\mathcal{S}) = 0$ のときは、 $\Phi^{\pm}$ は、働かない。

有限次元ヒルベルト空間での、 $\text{defect} \rho(\mathcal{S}) = 0$ のときは、次の形である。

命題 2.2

$\mathcal{S}$ を indecomposable 4-subspace system で、 $\rho(\mathcal{S}) = 0$ とする。このとき、 $\mathcal{S}$ は、次の形と添え字の置き換えを除いて、同値である。 E と F を、有限次元ヒルベルト空間、 $A : E \rightarrow F, B : F \rightarrow E$ を、bounded linear map とする。 $H = E \oplus F, E_1 = E \oplus 0, E_2 = 0 \oplus F$,

$E_3 = \{(x \oplus Sx) | x \in E\}, E_4 = \{(Ty \oplus y) | y \in F\}$ として、 $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ とおく。

3 無限次元 Indecomposable n -subspace systems ($n=1,2,3,4$) について

以下、 H を、ヒルベルト空間として、結果を述べる。

(1) $n=1$ のとき、

$S = (H; E)$ について、 S が、indecomposable であるためには、 $\dim H = 1$ でなければならない。よって、 $S \cong (H; E)$, $\dim H = 1$ かつ、 $\dim E = 0$ か 1 。

(2) $n=2$ のとき、

$S = (H; E, F)$ について、 S が、indecomposable であるための条件を調べる。 E と F に、2-subspaces method を行う。

$$E = (E \cap F) \oplus \operatorname{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus (E \cap F^\perp) \oplus 0_{E^\perp \cap F} \oplus 0_{E^\perp \cap F^\perp}$$

$$F = (E \cap F) \oplus \operatorname{Im} \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix} \oplus 0_{E \cap F^\perp} \oplus (E^\perp \cap F) \oplus 0_{E^\perp \cap F^\perp}$$

indecomposable より、直和成分が 1 個に落ちる。generic position の部分では、 c と s は可換である。よって、generic position の部分では、作用する空間は、 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ でなければならない。このとき、 $S \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}; E, F)$ は、decomposable となる。よって、2-subspace system S で、indecomposable なものは、 $S \cong (H; E_1, E_2)$ に対して、 $\dim H = 1$ かつ、 $\dim E_i = 0$ か 1 ($i=1,2$) のものである。

(3) $n=3$ のとき、

3-subspace system $S = (H; E_1, E_2, E_3)$ について、indecomposable で $\dim H < \infty$ となるものは、 $S \cong (H; E_1, E_2, E_3)$, $\dim H=1$ かつ、 $\dim E_i = 0$ か 1 ($i=1,2,3$) か又は、 $S \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}; \mathbb{C}(1 \oplus 0), \mathbb{C}(1 \oplus 0), \mathbb{C}(1 \oplus 1))$ である。 $\dim H = \infty$ に対しては、現在の所、indecomposable のものは構成できていない。(Rosenthal の open question がある : 5 個の要素を持つ transitive lattice は存在するのか? これが肯定的ならば、我々は無限次元の indecomposable なものを得ることが出来る。)

例 3.1

次のものは、decomposable である。

(1) $S = (H; E_1, E_2, E_3)$ で、次を取る。 K を、ヒルベルト空間、 A を、 K 上の (un)bounded linear operator とし、 $\dim K \geq 2$ とする。

$$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K, E_3 = \{(x \oplus Ax) | x \in D(A)\}.$$

(2) (C. Davis の例) $S = (H; E_1, E_2, E_3)$ で、次を取る。 H を、無限次

元ヒルベルト空間 $H = [e_1, f_1, e_2, f_2, \dots]$, (ここで、 $\{e_i, f_i\}, i = 1, 2, \dots$ は、 H の CONS である。).

$$g_n = (\cos \theta_n) e_n + (\sin \theta_n) f_n, n = 1, 2, \dots, \theta_n = \frac{\pi}{2n+1}.$$

$$E_1 = [e_1, e_2, e_3, \dots], E_2 = [g_1, g_2, \dots],$$

$$E_3 = [e_1 + e_2, f_2 + f_3, \dots, e_{2n-1} + e_{2n}, f_{2n} + f_{2n+1}, \dots].$$

このとき、 $(\text{Proj}(E_1), \text{Proj}(E_2), \text{Proj}(E_3))' = \mathbb{C}$ である。

一般的に、3-subspace systems については、次のことがわかる。

命題 3.2

$S = (H; E_1, E_2, E_3)$ を indecomposable 3-subspace systems とする。 $E_i \neq (0), H(\forall i = 1, 2, 3)$ とする。このとき、 $E_k \cap E_\ell = (0), (\forall k, \ell = 1, 2, 3, k \neq \ell)$ 。

命題 3.3

$S = (H; E_1, E_2, E_3)$ を indecomposable 3-subspace systems とする。更に、次を、満たすとする。

$$H = E_1 + E_2, E_1 \cap E_2 = (0).$$

このとき、 S は、有限次元の indecomposable systems である。

命題 3.4

$S = (H; E_1, E_2, E_3)$ を indecomposable 3-subspace systems とする。もし、 $\dim H = +\infty$ とすると、このとき、 $\dim E_i = +\infty (\forall i = 1, 2, 3)$ が成立する。

以下に、4-subspace systems の考察を、行う。

命題 3.5

K を、無限次元ヒルベルト空間、 S を、unilateral shift とする。このとき、次の system は、indecomposable である。

$$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K, E_3 = \{(x \oplus Sx) | x \in K\}, E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}.$$

(証明のスケッチ)

補題 1.

H を、ヒルベルト空間とする。 $E_1, \dots, E_4$ を、 H の閉部分空間とする。 $S = (H; E_1, \dots, E_n)$ は、次を、満たすと仮定する。

$$H = E_i + E_j, E_i \cap E_j = (0), \forall (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}.$$

このとき、ある $A \in B(H)$ が存在して、 $AE_1 \subset E_2, AE_2 \subset E_1$ かつ、 $\{(x_1 + Ax_1) | x_1 \in E_1\} = E_3, \{(Ax_2 + x_2) | x_2 \in E_2\} = E_4$ が、成立する。

補題 2.

S は、補題 1 の仮定の条件を満たすとする。作用素 $A \in B(H)$ を、補題 1 のものとする。 S が、decomposable であると仮定する。このとき、次のいずれかが起きる。

(I) $T_1 = A^2|_{E_1}$ は、decomposable である、

又は、

(II) $T_2 = A^2|_{E_2}$ は、decomposable である、

又は、

(III) $E_3 \subset E_1$ かつ、 $E_4 \subset E_2$ である。

補題 3.

unilateral shift S から作られる 4-subspace system は、補題 1 の仮定を満たす。この system では、(III) が、成立しない。

補題 4.

unilateral shift S から作られる 4-subspace system を取る。

このとき、導来される作用素 $A \in B(H)$ について、 $A^2|_{E_1}$ と $A^2|_{E_2}$ は、indecomposable である。

(補題 4 の証明)

Beurling の定理により、unilateral shift の invariant subspace M は、inner function θ により、 $M = \theta H^2$ と書けることから、decomposable の仮定と矛盾することを示す。

4 defects の概念の無限次元化と分数値 defects の出現

Gelfand と Ponomarev により、有限次元ベクトル空間の 4-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ の不変量として defect

$$\rho(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^4 \dim E_i - 2\dim H$$

が考えられている。この量は、このままの形では、無限次元の場合に意味をもたない。そこで、この量を無限次元の場合に定義するために、次の n -subspace systems を考える。まず、次を定義する。

定義 4.1

$T \in B(H)$ が、weak Fredholm operator であることを、 $\dim \text{Ker} T < +\infty$ かつ $\dim \text{Ker} T^* < \infty$ で定義する。

定義 4.2

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ を n -subspace systems とする。 $T_{ij} : E_i \oplus E_j \rightarrow H(i, j = 1, \dots, n)$ を、

$$T_{ij}(x_i \oplus x_j) = x_i + x_j$$

により、定義する。

$\mathcal{S}$ が、Fredholm system (resp. weak Fredholm system) を、 $T_{ij}(\forall i, j = 1, \dots, n)$ が Fredholm operator (resp. weak Fredholm operator) であると定義する。

このとき、

$$\text{Ind}T_{ij} = \dim \text{Ker}T_{ij} - \dim \text{Ker}T_{ij}^*$$

とおき、defect $\rho(\mathcal{S})$ を、

$$\rho(\mathcal{S}) = 1/3 \sum_{i < j} \text{Ind}T_{ij}$$

で、定義する。

命題 4.3

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ を、有限次元ベクトル空間上の 4-subspace system とする。このとき、

$$\text{Gelfand-Ponomarev defect } \rho(\mathcal{S}) = \text{our defect } \rho(\mathcal{S})$$

である。

命題 4.4

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ を、 n -subspace system とする。このとき、 $\text{Ker}T_{ij} \cong (E_i \cap E_j)$, $\text{Ker}T_{ij}^* \cong ((E_i)^\perp \cap (E_j)^\perp)(\forall i, j = 1, \dots, n)$ が成立する。

有限次元ヒルベルト空間上の、indecomposable 4-subspace systems の defects の値域は、 $\{0, \pm 1, \pm 2\}$ である。しかし、無限次元ヒルベルト空間上では、特異な現象が起きる。

定理 4.5

無限次元ヒルベルト空間上の、indecomposable 4-subspace systems の defects の値域は、 $\mathbb{Z}/3$ である。

例 4.6

K を、無限次元 ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ とする。 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおく。 $\alpha \in \mathbb{C}$ かつ、 $\alpha \notin \mathbb{T} \cup (\mathbb{T} + 1)$ とおく。 $\mathcal{S}$ を、 K 上の unilateral shift とする。このとき、次の 4-subspace system $\mathcal{S}_\alpha = (H; E_1, \dots, E_4)$ を

$$H = K \oplus K,$$

$$E_1 = K \oplus (0),$$

$$E_2 = (0) \oplus K,$$

$$E_3 = \{(x \oplus (S + \alpha)x) | x \in K\}, E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}$$

とおく。このとき、 $\{\mathcal{S}_\alpha\}_\alpha$ は、お互いに、(同配置) 同値でない indecomposable Fredholm 4-subspace system である。

$$\text{このとき、} \rho(\mathcal{S}_\alpha) = \begin{cases} -2/3 & \text{if } (|\alpha| < 1, |\alpha - 1| < 1), \\ -1/3 & \text{if } (|\alpha| < 1, |\alpha - 1| > 1), \\ -1/3 & \text{if } (|\alpha| > 1, |\alpha - 1| < 1), \\ 0 & \text{if } (|\alpha| > 1, |\alpha - 1| > 1) \end{cases}$$

例 4.7

(defects(-n/3) の indecomposable 4-subspace systems の例)

K を 無限次元ヒルベルト空間とし、 $\{u_i\}_{i \geq 1}$ を、その CONS とする。このとき、次の 4-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ は、indecomposable であり、その defects は、 $(-n/3)$ である。

$$H = K^n \oplus K^n \text{ とおく。 } E_1 = K^n \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K^n,$$

$$E_3 = [(u_i, 0, \dots, 0) \oplus (u_{i+1}, u_i, 0, \dots, 0),$$

$$(0, u_i, 0, \dots, 0) \oplus (0, u_{i+1}, u_i, 0, \dots, 0), \dots,$$

$$(0, 0, \dots, 0, u_i) \oplus (0, 0, \dots, 0, u_{i+1}) | i \in \mathbb{N}],$$

$$E_4 = [x \oplus x | x \in K^n].$$

5 bounded operator systems から来ない indecomposable systems

4-subspace system として、標準的に、bounded operators から来るものが考えられる。そこで、我々は、次のクラスをおく。

定義 5.1

次の 4-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ を考える。 K_1, K_2 をヒルベルト空間とし、 $S \in B(K_1, K_2), T \in B(K_2, K_1)$ とする。次をおく。

$$H = K_1 \oplus K_2,$$

$$E_1 = K_1 \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K_2, E_3 = \{(x \oplus Sx) | x \in K_1\},$$

$$E_4 = \{(Ty \oplus y) | y \in K_2\}$$

この形の system $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ と、添え字を入れ替えて同値となるものを、bounded operator system という。

このとき、次が成り立つ。

定理 5.2

bounded operator systems とは、(同配置) 同値とはならない、連続無限個の indecomposable 4-subspace system が存在する。

これは、次のようにして、示せる：

例 5.3

(bounded operator systems と同値にならない例)

次の 4-subspace system をおく。 K を、ヒルベルト空間として、 $\{e_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ を、その CONS とする。 $\alpha > 1$ に対して、重み列 $(w_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ を、次でおく。

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \geq 0, \\ e^{(-\alpha)^i} & \text{if } i \leq -1 \end{cases}$$

この重み列を使って、重み shift V_α を、次でおく。

$$V_\alpha e_i = w_i e_{i+1} (i \in \mathbb{Z})$$

これらを使って、4-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ を次で作る。

$$H = K \oplus K,$$

$$E_1 = K \oplus 0,$$

$$E_2 = 0 \oplus K,$$

$$E_3 = \{(x \oplus V_\alpha x) | x \in D(V_\alpha)\},$$

$$E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}$$

このとき、これらの 4-subspace systems は、お互いに (同配置) 同値とはならない、indecomposable 4-subspace systems である。しかも、これらの 4-subspace systems は、bounded operator systems と (同配置) 同値ではない。

indecomposable 4-subspace systems が、bounded operator systems を、変形して、得られるかについてであるが、次のものは、1 つの手術をおこなうと、decomposable なものが出来てしまう例になっている。

例 5.4

次の system を考える。 K を、 $\ell^2(\mathbb{Z})$ とする。 K の CONS を、 $(e_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ と書く。 V を、 K 上の bilateral shift とする。このとき、次をおく：

$$H = K \oplus K,$$

$$E_1 = K \oplus 0,$$

$$E_2 = 0 \oplus K,$$

$$E_3 = \{(x \oplus Vx) | x \in K\},$$

$$E_4 = [(e_i \oplus e_i) | i \neq 0]$$

このとき、この 4-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ は、decomposable となる。

また、Gelfand と Ponomarev の defect(-2) の有限次元 indecomposable system を、自然に、無限次元化した 4-subspace system を、考えると、それは、decomposable になってしまう。その例は次である。

例 5.5

$\{e_i, f_i | i \geq 1\}$ を、ヒルベルト空間 H 空間の CONS とする。

$H = [e_i, f_i | i \geq 1]$, $E_1 = [e_i | i \geq 2]$, $E_2 = [f_i | i \geq 1]$,

$E_3 = [e_i + f_i | i \geq 1]$, $E_4 = [e_1 + e_2, e_{i+2} + f_i | i \geq 1]$, とする。このとき、この system $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ は、decomposable である。しかし、これは、bounded operator system ではない。

6 Gelfand と Ponomarev の変換 Φ^+ と Φ^- の無限次元化

Gelfand と Ponomarev の分類理論に現れる変換 Φ^+ と Φ^- の無限次元化をここでは考えよう。

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ を、n-subspace system とする。 $R = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ とおく。

$\tau : R \rightarrow H$ を、 $\tau(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ とおく。又、 $H^+ = \text{Ker} \tau$ とおく。

$$E_k^+ = \{x = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0_k, x_{k+1}, \dots, x_n) | \tau(x) = 0\}.$$

とおく。

これより、 Φ^+ の定義として、

定義 6.1

$\Phi^+(\mathcal{S}) = (H^+; E_1^+, \dots, E_n^+)$ と定義する。このとき、 $\Phi^+(\mathcal{S})$ を、 $\mathcal{S}^+$ とも書く。

例 6.2

- (1) $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; \mathbb{C}, 0, 0)$ のとき、 $\mathcal{S}^+ \cong (0; 0, 0, 0)$ である。
- (2) $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}^2; \mathbb{C} \oplus 0, 0 \oplus \mathbb{C})$ のとき、 $\mathcal{S}^+ \cong (0; 0, 0)$ である。
- (3) $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \mathbb{C}, 0)$ のとき、 $\mathcal{S}^+ \cong (\mathbb{C}; 0, 0, \mathbb{C})$ である。
- (4) $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4) \cong (\mathbb{C}^3; \mathbb{C}(1 \oplus 0 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1 \oplus 1), \mathbb{C}(1 \oplus 0 \oplus 1))$ のとき、
 $\mathcal{S}^+ \cong (\mathbb{C}; 0, 0, 0, 0)$ である。

次に、 Φ^- の定義を与えよう。まず、

定義 6.3

$S = (H; E_1, \dots, E_n)$ を、n-subspace system とする。 $S^\perp = \Phi^\perp(S)$ を、 $S^\perp = \Phi^\perp(S) = (H; E_1^\perp, \dots, E_n^\perp)$ で定義する。

これを使って、 Φ^- の定義を、次のようにする。

定義 6.4

$S = (H; E_1, \dots, E_n)$ を、n-subspace system とする。 $S^- = \Phi^-(S)$ を、 $S^- = \Phi^-(S) = \Phi^\perp \Phi^+ \Phi^\perp(S)$ で定義する。

例 6.5

(1) $S = (\mathbb{C}; 0, 0, 0)$ のとき、 $S^- \cong (\mathbb{C}^2; \mathbb{C}(1 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1), \mathbb{C}(1 \oplus 1))$ である。

(2) $S = (\mathbb{C}; 0, 0, 0, 0)$ のとき、 $S^- \cong (\mathbb{C}^3; \mathbb{C}(1 \oplus 0 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1 \oplus 1), \mathbb{C}(1 \oplus 0 \oplus 1))$ である。

Φ^+ と Φ^- は、以下の性質をもつ。

命題 6.6

S_1, S_2 を、n-subspace system とする。このとき、

$$\Phi^\pm(S_1 \oplus S_2) \cong \Phi^\pm(S_1) \oplus \Phi^\pm(S_2)$$

が、成立する。

Φ^+ と Φ^- の双対性を見るために、次の条件を設定する。

定義 6.7

$S = (H; E_1, \dots, E_n)$ を、n-subspace system とする。 S が、strongly reduced above (SRA) という性質を満たすということを、 $\sum_{i=1, i \neq k}^n E_i = H (\forall k = 1, \dots, n)$ であることと、定義する。

定義 6.8

$S = (H; E_1, \dots, E_n)$ を、n-subspace system とする。 S が、closed image property (CIP) という性質を満たすとは、次が成立するときをいう。

$$p_k : R = \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow 0 \oplus E_k \oplus 0 (\text{projection}),$$

$$r : R = \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow H^+ (\text{projection}),$$

$e_i : H \rightarrow E_i (\text{projection})$ とおくとき、次が、成立している。

(1) $\text{Im}(rp_k)$ が、closed である。

(2) $\{(e_1 x, \dots, e_n x) \in R \mid x \in H\}$ が、closed である。

定義 6.9

$S = (H; E_1, \dots, E_n)$ を、n-subspace system とする。 S が、(CIP) を満たすある n-subspace system と同値であるとき、 S は、性質 (WCIP) を、満たすという。

このとき、 Φ^+ と Φ^- の双対性が、次のように成り立つ。

定理 6.10

(1) S を、n-subspace system とする。もし、 S が、性質 (SRA) 及び性質 (WCIP) を満たすとする。このとき、 $\Phi^-\Phi^+(S) \cong S$ となる。

(2) S を、n-subspace system とする。もし、 $S^\perp$ が、性質 (SRA) 及び性質 (WCIP) を満たすとする。このとき、 $\Phi^+\Phi^-(S) \cong S$ となる。

次に、 S^+, S^- の indecomposability の条件を見ることにする。

定理 6.11

$S(\neq 0)$ は、indecomposable n-subspace system とする。このとき、次の仮定をおく。

(仮定)

$S, (S^+)^\perp$ は、共に、性質 (SRA) 及び性質 (WCIP) を満たすとする。

このとき、 S^+ は、indecomposable である。

定理 6.12

$S(\neq 0)$ は、indecomposable n-subspace system とする。このとき、次の仮定をおく。

(仮定)

$S^\perp$ と S^- が、共に、性質 (SRA) 及び性質 (WCIP) を満たすとする。

このとき、 S^- は、indecomposable である。

以下に、注意として、定理の仮定である性質は、無条件には、成立しないことを指摘しておく。ここで、性質 (CIP) の成立しない例をあげておくことにする。

命題 6.13

$\{e_n, f_n\}_{n=1,2,\dots}$ を、ヒルベルト空間 H の CONS とする。

$$g_n = (\cos \frac{1}{n})e_n + (\sin \frac{1}{n})f_n$$

とおく。又、 $M = [e_n | n \in \mathbb{N}]$, $N = [g_n | n \in \mathbb{N}]$, $H = [e_n, f_n | n \in \mathbb{N}]$ とおく。

又、 $p = Proj(M)$, $q = Proj(N)$ とおく。このとき、

$L = \{((p(x), q(x)) | x \in H)\}$ は、closed ではない。

以下に、 $\Phi^\pm(S)$ が、indecomposable となる無限次元の例を与える。

例 6.14

K を、無限次元 ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ とする。 S を、 K 上の unilateral shift とする。 $\alpha \in \mathbb{C}$ とする。このとき、次の 4-subspace systems S_α は、同配置同値でない indecomposable systems である。

$$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0,$$

$$E_2 = 0 \oplus K,$$

$$E_3 = \{(x \oplus (S + \alpha)x) | x \in K\},$$

$$E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}$$

このとき、 $\mathcal{S}_\alpha$, $(\mathcal{S}_\alpha^+)^{\perp}, \mathcal{S}_\alpha^{\perp}, (\mathcal{S}_\alpha^-)$ は、すべて性質 (SRA) 及び 性質 (WCIP) をみたす。

これより、 $\mathcal{S}_\alpha^+, \mathcal{S}_\alpha^-$ は、indecomposable である。

以下では、我々の定義した defects と Φ^+ の関係を見る。

定理 6.15

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ を、次の 4-subspace system とする。 K を、ヒルベルト空間, $T, S \in B(K)$ とする。 $H = K \oplus K$,

$$E_1 = K \oplus 0,$$

$$E_2 = 0 \oplus K,$$

$$E_3 = \{(x \oplus Tx) | x \in K\}, E_4 = \{(Sy \oplus y) | y \in K\}$$

とおく。このとき、 $\mathcal{S}$ が、Fredholm system であることと、 $S, T, (ST - 1)$ が、Fredholm operators であることは同値である。更に、 $\mathcal{S}$ の defect $\rho(\mathcal{S})$ は、次で与えられる。

$$\rho(\mathcal{S}) = 1/3(IndT + IndS + Ind(ST - 1))$$

次に、 Φ^+ による defect の保存状況を見る。

命題 6.16

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ を次でおく。 K を ヒルベルト空間, $T \in B(K)$ とする。

$$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K, E_3 = \{(x \oplus Tx) | x \in K\},$$

$$E_4 = \{(y \oplus y) | y \in K\} \text{ とする。}$$

このとき、 $\rho(\mathcal{S}^+) = \rho(\mathcal{S})$ が成立する。

参考文献

- [1] Y.Watatani: Relative positions of four subspaces in a Hilbert space and subfactors, (to appear in a conference report).
- [2] I.M.Gelfand and V.A.Ponomarev: Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space, Coll.Math.Soc.Ianos Bolyai 5, Hilbert space operators, Tihany (Hungary) 1970,163-237 (in English).