

制御確率微分方程式の自由境界問題

神戸大 理. 西尾真喜子

マルコフ過程の最適停止の問題が、自由境界問題に関連していることはよく知られている。確率微分方程式に（それ）で運動する系に制御を行い、さらに最適停止を含めさせてみると、ベルマン方程式の自由境界問題が関連してくる。この場合、最適制御に対する半群が、マルコフ過程の推移半群の役目をする。

§1. 最適問題に関連する半群.

$\Gamma \subset R^k$ をコンパクト凸集合。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の n 次元ブラウン運動 $B(t), t \geq 0$ とし、 $\mathcal{F}_t = \sigma(B(s), s \leq t)$ とおく。 $\mathcal{F}_t$ -発展的可測な P -値確率過程を *admissible control* とよび、その全体を $\mathcal{C}$ とかく。

$\alpha(x, u)$ を $n \times n$ 対称行列, $\gamma(x, u) \in R^n$ で, とともに $R^n \times \Gamma$ 上の関数として, 次の条件を仮定しておく。

(A.1) 有界, $|h(x, u)| \leq b, \quad \forall x \in R^n, u \in \Gamma$

(A.2) u に固く一致に, x の Lipschitz 連続, かつ,
 x に固く一致に, u の連続関数, i.e.

$$|h(x, u) - h(x', u')| \leq K|x - x'| + \rho(|u - u'|)$$

ここで, ρ は $\rho(0) = 0$ とする $[0, \infty)$ 上の連続有界関数.

$U \in \mathcal{U}$ に對し, 制御確率微分方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} dX(t) = \alpha(X(t), U(t)) dB(t) + \gamma(X(t), U(t)) dt \\ X(0) = x \end{cases}$$

は, $\mathcal{F}_t$ に適合 (と一致) 解 $X(t) = X(t; U, x)$ を持つ. この解を

U の response とよぶ. さてここで, 定数コストに拘らず $u \in \Gamma$

の response ξ^u は, 生成作用素が $L^u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^u(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$
 $+ \sum_{i=1}^n \gamma_i^u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, である ($a^u(x) = \frac{1}{2} \alpha^2(x, u)$, $\gamma^u(x) = \gamma(x, u)$)

は diffusion である. 以後 $h(x, u) \equiv h^u(x)$ と書くこともある.

$\mathcal{F}_t$ -停止時間の全体を $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}(t) = \{t \wedge \tau, \tau \in \mathcal{M}\}$ とす

る.

$$f: R^n \times \Gamma \rightarrow R^1, \quad c: R^n \times \Gamma \rightarrow [0, \infty)$$

が, ともに (A1) (A2) を満たすことを仮定する. pay off

$I(t, x, \varphi, U)$ を次のように定義する

$$I(t, x, \varphi, U) = \int_0^t e^{-\int_0^s c(X(\theta), U(\theta)) d\theta} f(X(s), U(s)) ds + e^{-\int_0^t c(X(\theta), U(\theta)) d\theta} \varphi(X(t))$$

である, $X(t) = X(t; U, x)$.

最適制御の optimal value, $Q(t, x, \varphi) = \sup_{U \in \mathcal{U}} E I(t, x, \varphi, U)$

最適停止の optimal value, $V(t, x, \varphi) = \sup_{U \in \mathcal{U}, \tau \in M(t)} E I(\tau, x, \varphi, U)$

R^n 上の有界, 一様連続な実数値関数の全体を C とする.
 $\|\varphi\| = \sup_{x \in R^n} |\varphi(x)|$ と順序 " $\varphi \leq \psi \iff \varphi(x) \leq \psi(x) \forall x$ " を与えることにより, Banach lattice になる.

(A.1), (A.2) により, $\varphi \in C$ ならば, $Q(t, \cdot, \varphi)$, $V(t, \cdot, \varphi)$ も C に属する. C 上の作用 $Q(t)$, $V(t)$ を次式により定義する.

$$(1.2) \quad Q(t)\varphi = Q(t, \cdot, \varphi), \quad V(t)\varphi = V(t, \cdot, \varphi)$$

u の response $\xi^u \in C^u$ rate で killing (と diffusion) の推移半群を $H^u(t)$ とおけば, $T^u(t)\varphi = H^u(t)\varphi + \int_0^t H^u(s)f^u ds$ ($= E I(t, \cdot, \varphi, u)$) $\varphi \in C$, により与えられる作用 $T^u(t)$ は単調縮小半群で, 生成作用素 G^u は

$$G^u\varphi = L^u\varphi - c^u\varphi + f^u, \quad \varphi \in C^2$$

ただし, $C^2 = \{\varphi \in C; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in C, i, j = 1, \dots, n\}$.

定理 1. [3]. $Q(t)$ は次の性質をもつ

(Q1) 半群性, $Q(t+s) = Q(t)Q(s) = Q(s)Q(t)$, $Q(0) = \text{identity}$.

(Q2) 連続性, $\|Q(t)\varphi - Q(s)\varphi\| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow s$

(Q3) 単調性, $\varphi \leq \psi \Rightarrow Q(t)\varphi \leq Q(t)\psi$

(Q4) 縮小性, $\|Q(t)\varphi - Q(t)\psi\| \leq \|\varphi - \psi\|$

(Q5) $Q \in Q(t)$ の生成作用素とすれど, $D(Q) \supset C^2$,
かつ,

$$(1.3) \quad Q\varphi = \sup_{u \in \Gamma} \mathbb{E}^u \varphi \quad \varphi \in C^2$$

(Q6) $Q(t)\varphi \geq T^u(t)\varphi \quad \forall u \in \Gamma$

(Q7) 最小性, $\Lambda(t), t \geq 0$ が C 上の半群 (i.e.,

(Q1) (Q2) を満たす) で, $\Lambda(t)\varphi \geq T^u(t)\varphi \quad \forall u \in \Gamma$
 $\Rightarrow \Lambda(t)\varphi \geq Q(t)\varphi \quad \forall t, \varphi$.

半群性 (Q1) はヘルムホルツ原理とよばれる2段階最適化に他ならない。また, (1.3) がヘルムホルツ方程式に関連している。

(Q7)より, 半群の envelope を次のように定義しよう。

$(S(t), t \geq 0), (\mathbb{H}^u(t), t \geq 0) \quad u \in \Gamma$ は C 上の半群とす。 $S(t)$ が次の (e1), (e2) を満たすとき, $(\mathbb{H}^u(t), t \geq 0) \quad u \in \Gamma$ の envelope とする。

(e1) $S(t)\varphi \geq \mathbb{H}^u(t)\varphi \quad \forall u \in \Gamma$

(e2) C 上の半群 $\Lambda(t), t \geq 0$, が $\Lambda(t)\varphi \geq \mathbb{H}^u(t)\varphi$
 $\forall u \in \Gamma, \Rightarrow \Lambda(t)\varphi \geq S(t)\varphi \quad \forall t, \varphi$.

定理2, [4]. $V(t), t \geq 0$ は単調縮小半群で, 生成作用素 A 且, $D(A) \supset C^2$ かつ, $\varphi \in C^2$ のとき

$$(1.4) \quad A\varphi = \max(0, \sup_{u \in \Gamma} \mathbb{E}^u \varphi) = \max(0, Q\varphi).$$

さらに, $I(t)$ は identity map とすれば, $(V(t), t \geq 0)$ は $(T^u(t), t \geq 0) \cup \Gamma$ と $(I(t), t \geq 0)$ の envelope になる. したがって, $(Q(t), t \geq 0)$ と $(I(t), t \geq 0)$ の envelope と同値である.

§ 2. $V(t)\varphi$ の regularity と自由境界問題.

$V(t)\varphi$ のなめらかさを知るために, 係数 $h = \alpha, \gamma, c, f$ は x について 2 回連続微分可能で, 次の条件を仮定しよう.

(A3) 1 次微分が (A1) (A2) を満たす

(A4) 2 次微分が (A1) を満たし, u に関して一様に, x の h が一連続, x に関して一様に, u の連続関数, i. e.

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x, u) - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x', u') \right| \leq K |x - x'|^\alpha + \rho |u - u'|$$

(A5) 適当な $\lambda > 0$ に対し,

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x, u) \theta_i \theta_j \geq \lambda |\theta|^2 \quad \forall x, u, \theta.$$

Krylov [1, 2] にしたがって, $Q(t)\varphi$, $V(t)\varphi$ のなめらかさについて次の定理 3, 4 が証明できる.

定理 3. $\rho \in C^2$ の 2 次微分が h の h が一連続とす. (A1) ~

(A5) の下で

(i) $Q(t)\varphi(x)$, $V(t)\varphi(x)$ は $W_{p, loc}^{1,2}$ に属する. ここで p は

任意に $\delta < \epsilon$ により.

(ii) $\forall u \in \Gamma$ に対し

$$L^u Q(t) \varphi(x) - C^u(x) Q(t) \varphi(x) + f^u(x) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t) \varphi(x)$$

$$L^u V(t) \varphi(x) - C^u(x) V(t) \varphi(x) + f^u(x) - \frac{\partial}{\partial t} V(t) \varphi(x)$$

は, t に, $[0, T] \times R^n$ 上で本質的に有界.

(iii). $Q(t) \varphi(x)$ は次のヘルマン方程式 (2.1) の $W_{2n+2, loc}^{1,2}$ における一意解になる.

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t}(t, x) = \sup_{u \in \Gamma} L^u q(t, x) - C^u(x) q(t, x) + f^u(x), & \forall t, x \\ q(0, x) = \varphi(x) & \forall x \end{cases}$$

ただし, (2.1) の右辺では, q の 1 次微分, 2 次微分を固定し, u に関する supremum をとることとする.

定理 4. 前定理と同じ条件で, $V(t) \varphi(x)$ は次の自由境界問題 (2.2) の $W_{2n+2, loc}^{1,2}$ における一意解になる.

$$(i). \quad V(0, x) = \varphi(x) \quad \forall x$$

$$(2.2) \quad (ii) \quad V(t, x) \geq \varphi(x) \quad \forall t, x$$

$$(iii) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \geq \sup_{u \in \Gamma} L^u V(t, x) - C^u(x) V(t, x) + f^u(x), \quad \forall t, x$$

$$(iv) \quad (V(t, x) - \varphi(x)) \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - \sup_{u \in \Gamma} L^u V(t, x) - C^u(x) V(t, x) + f^u(x) \right) = 0, \quad \forall t, x$$

定理4によろ, $v(t, x) = V(t) \varphi(x)$ は生成作用素 A に対する発展方程式の解となることを示さる。何故ならば,

$$D = \{ (t, x) \in [0, \infty) \times R^n; V(t) \varphi(x) = \varphi(x) \}$$

と示す。 D は開集合で, $(0, x) \in D, \forall x$. さらに, $V(t) \varphi(x)$ は t の増大函数であるから, " $t \leq T(x) \Rightarrow (t, x) \in D$, $t > T(x) \Rightarrow (t, x) \notin D$ " とする $T(x) (\leq \infty)$ が定まる。ゆえに, (iv) より, $\forall t, x$ に対し

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = 0 \chi_D(t, x) + \left(\sup_{u \in T} L^u v(t, x) - c^u(x) v(t, x) + f^u(x) \right) \chi_{D^c}$$

(iii) と $\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0$ を考慮し合めると, $\forall t, x$ に対し

$$(2.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \max \left(\sup_{u \in T} L^u v(t, x) - c^u(x) v(t, x) + f^u(x), 0 \right)$$

定理4. (iv) の証明の概略を示そう。次の不等式 Lemma 1 が有用である。

A ; $n \times n$ 対称行列の値をとる $\mathcal{F}_t$ -発展的可測な確率過程で, $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t, \omega) \theta_i \theta_j \geq \lambda |\theta|^2 \quad \forall t, \omega, \theta, \quad |A(t, \omega)| \leq K$
 $\forall t, \omega$.

R ; $\mathcal{F}_t$ -発展的可測な n 次元確率過程で, $|R(t, \omega)| \leq K, \forall t, \omega$.
 上の条件を満たす (A, R) の全体を $M = M_{K, \lambda}$ とする。

$S = S(0, d) \in \mathbb{R}^d$ の n 次元開球, $\tau \in \bar{S}^c$ の hitting time とする.

Lemma 1.

$$W(t, x; h, M, K, \lambda, d) = \sup_{(A, R) \in M} E \int_0^{(T-t) \wedge \tau} e^{-\mu s} h(t+s, x + \int_0^t A dB + \int_0^s R d\theta) ds$$

と仮定し, $\mu \geq \frac{1+2K}{n\lambda^2}$, $p \geq 2n+2$ とする.

$$\|W\|_{L_p([0, T] \times S)} \leq \|h\|_{L_p([0, T] \times S)} \frac{\tilde{K}}{\mu}$$

ここで $\tilde{K}$ は K, n, λ のみに依存する定数.

(iv) を示すために, random stopping を導入する.

互に発展的可能な非負有界確率過程の全体を $\mathcal{R}$ とする.

$r \in \mathcal{R}$ に対し, 次の random stopping を考える.

$$(2.4) \quad P(t, t+dt) \text{ に stop} \mid t \leq \text{stop} \text{ しない} = r(t) e^{-\int_0^t r(s) ds} dt$$

pay off J を次式で与える.

$$J(T, x, \varphi, U, r) = \int_0^T I(t, x, \varphi, U) r(t) e^{-\int_0^t r(s) ds} dt + I(T, x, \varphi, U) e^{-\int_0^T r(s) ds}$$

すなわち, T 迄の stop を density $r(t)$ の random stopping で行う.

T で停止することは, random stopping の極限とみなす.

であるが、実際、次の Lemma 2 が成り立つ。

Lemma 2.

$$V(T)\varphi(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}, r \in \mathcal{R}} E J(T, x, \varphi, U, r)$$

以下簡単のため、

$$F(t, x, U, h) = L^h(t, x) - c^h(x)h(t, x) + f^h(x) + \frac{\partial h}{\partial t}(t, x)$$

と置く。 T は任意に固定し、 $h(t, x) = V(T-t)\varphi(x)$ とおけば、 Lemma 2 より

$$(2.5) \quad 0 = \sup_{U \in \mathcal{U}, r \in \mathcal{R}} \left(E \int_0^T e^{-\int_0^s c(X(r); U, x) + r(r)} ds F(t, X(t); U, x, U(t), h) dt \right. \\ \left. + E \int_0^T e^{-\int_0^s c(X(r); U, x) + r(r)} ds r(t) (\varphi(X(t); U, x) - h(t, X(t); U, x)) dt \right)$$

$$D_\varepsilon(T) = \{ (t, x) \in [0, T] \times R^n; V(T-t)\varphi(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon \}$$

とおけば、 $D_\varepsilon(T)$ は閉集合。ゆえに、 $(0, y) \notin D_\varepsilon(T)$ のとき、

$$[0, \Delta] \times S(y, \delta) \subset D_\varepsilon(T)^c \quad \text{となる } \Delta, \delta > 0 \text{ が存在する。}$$

$\tau \in \partial S(y, \delta)$ の hitting time とする。 (2.5) に定理の

(iii) を用いると、 $T \leq T \wedge \tau$ にはたらくことがわかる。

$x \in S(y, \delta)$ を任意に固定し、 (U_k, r_k) を supremum の近似列とする。 $t \leq \tau$ のとき、 $\varphi(X(t)) - h(t, X(t)) \leq -\varepsilon$ となるから、 $F \leq 0$ に注意すれば

$$E \int_0^{T \wedge \tau_n} e^{-\int_0^t r_n(s) ds} r_n(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

ここで τ_n は $X(t; U_n, x)$ の $\partial S(y, \delta)$ への hitting time. 更に

$$(2.6) \quad E e^{-\int_0^{T \wedge \tau_n} r_n(s) ds} \rightarrow 1 \quad \text{in prob.}$$

更に (2.5) (2.6) より

$$(2.7) \quad E \int_0^{T \wedge \tau_n} F(t, X(t; U_n, x), U_n(t), h) dt \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

$$M_T(t, x) = \sup_{u \in P} F(t, x, u, V(T-\cdot) \varphi)$$

と仮定し, (iii) と (2.7) より, $M_T \leq 0$ かつ

$$\sup_{(A, R) \in M} E \int_0^{\Delta \wedge \tau} M_T(t, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0$$

と仮定し, $T \in T-s$ ($s < \Delta$) に $\mathcal{F}_t$ に関する,

$$V(T-s-t) \varphi(x) \geq V(T-\Delta) \varphi(x) > \varphi(x) + \varepsilon, \quad t+s \leq \Delta, x \in S(y, \delta)$$

を仮定し, $[0, \Delta-s] \times S(y, \delta) \subset D_\varepsilon(T-s)^c$, と仮定し,

同様の計算により

$$\sup_{(A, R) \in M} E \int_0^{(\Delta-s) \wedge \tau} M_{T-s}(t, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0$$

M_T の定義より, $M_{T-s}(t, x) = M_T(t+s, x)$ と仮定し

$$\sup_{(A,R) \in M} E \int_0^{(\Delta-s)\wedge \tau} M_T(t+s, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0$$

$M_T \leq 0$ であるから, 上式より

$$\sup_{(A,R) \in M} E \int_0^{(\Delta-s)\wedge \tau} \mu e^{-\mu t} M_T(t+s, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0.$$

Lemma 1 より, $\mu \rightarrow \infty$ とし

$$M_T(s, x) = 0 \quad \forall (s, x) \in [0, \Delta] \times S(y, \delta)$$

を得る. したがって, $\mathbb{P}_x^h$ において $(t, x) \in (T-\Delta, T) \times S(y, \delta)$ において

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} V(t) \varphi(x) = \sup_{u \in P} L^u V(t) \varphi(x) - C^u(x) V(t) \varphi(x) + f^u(x).$$

一方, $\theta > 0$ に対して, $V(t) \varphi$ の増大性より

$$[0, \Delta + \theta] \times S(y, \delta) \subset D_\varepsilon(T + \theta)^c.$$

よって, (2.8) は $\mathbb{P}_x^h$ において $(t, x) \in (T-\Delta, T+\theta) \times S(y, \delta)$

で成り立つ. (T, y) は $V(T) \varphi(y) > \varphi(y) + \varepsilon$ となる点の集

みであるから, $\varepsilon \searrow 0$ とし, (iv) を得る.

Reference

1. N. V. Krylov, The control of the solution of a stochastic integral equation
Th. Probab. Appl. 17 (1972), 114-131
2. , Some estimates of the probability density of a stochastic
integral, Math. USSR. Izv. 8 (1974) 233-254.
3. M. Kisio, On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semigroup
Proc. Int. Symp. S.P.E. Kyoto 1976 297-325
4. , On nonlinear semigroup associated with optimal stopping for
Markov processes, Appl. Math. Opt. 4 (1978) 143-169.