

網状フロントの安定性とその分類について

北大・理(院)

塚田 孝治 (Takaharu Tsukada)

0. はじめに

関数芽の特異点論の応用の一つに V.I. Arnold のルジャンドリアン特異点があり、これは実多様体内の曲面から発生する安定した局所的な波を関数芽によって記述する理論である。ここで紹介する結果は曲面に境界や角、その他高次元の角がある場合に対応する網状ルジャンドリアン写像の一般論、及びその分類である。

1 でまず道具となる C^∞ 級関数芽の特異点論について述べる。これは Mather 理論を網状 K 同値という新たな同値関係のもとで展開したものである。次に 2 で角つき曲面から発生する局所的な波を記述する網状ジャンドリアン写像について述べる。

1. 網状関数について

$\mathcal{E}(l)$ で $\mathbf{R}^l$ の 0 で定義された C^∞ 級関数芽全体を表し、 $m(l) = \{f \in \mathcal{E}(l) | f(0) = 0\}$ とする。 $B(l)$ で $(\mathbf{R}^l, 0)$ 上の C^∞ 級微分同相芽全体からなる群を表し、 $B(r, k) = \{\phi \in B(r+k) | \phi(X_\sigma) \subset X_\sigma \text{ for } \sigma \in I_r\}$ とする。ここで $I_r = \{1, \dots, r\}$ であり、ある固定された $\mathbf{R}^{r+k}$ の座標 $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k)$ に対し X_σ は $\{(x, y) \in (\mathbf{R}^{r+k}, 0) | x_\sigma = 0\}$ で定義される。

$f, g \in \mathcal{E}(r+k)$ が網状 K 同値であるとは、 $\phi \in B(r, k)$ と $\mathcal{E}(r+k)$ の単元 u が存在し、 $g = u \cdot f \circ \phi$ を満たすときをいう。開折に対して対応する同値関係と普遍性を定義する。

$f \in \mathcal{E}(r+k)$ の開折 $F \in \mathcal{E}(r+k+n)$ が網状 K 安定であるとは、 F の任意の代表元 $\tilde{F} \in C^\infty(U, \mathbf{R})$ に対して、 $\tilde{F}$ の C^∞ -位相における近傍 $N_{\tilde{F}}$ が存在し、任意の $\tilde{G} \in N_{\tilde{F}}$ に対して、ある点 $(0, y, u) \in U$ で $\tilde{G}$ の $(0, y, u)$ における関数芽が F と網状 K 同値となるときをいう。

定理 $F(x, y, u) \in \mathcal{E}(r+k+n)$ を $f(x, y) \in \mathcal{E}(r+k)$ の開折とすると、次は同値である。

- (1) F は f の網状 K 安定開折である。
- (2) F は f の網状 K 普遍開折である。
- (3) 次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(r+k) = \langle f, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_k} \rangle_{\mathcal{E}(r+k)} \\ + L_{\mathbf{R}} \langle \frac{\partial F}{\partial u_1} \Big|_{u=0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n} \Big|_{u=0} \rangle \end{aligned}$$

2. 網状ルジャンドリアン写像について

$(J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0)$ の標準座標を (q, z, p) とし、 $\alpha = dz - pdq$ で定義される接触構造を入れる。 $\tilde{\pi} : (J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, 0)$ ($((q, z, p) \mapsto (q, z))$) を標準的なルジャンドリアン束とする。

各 $\sigma \subset I_r$ に対し $\tilde{L}_\sigma^0 = \{(q, z, p) \in (J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0) | q_\sigma = p_{I_r - \sigma} = q_{r+1} = \dots = q_n = z = 0\}$ とし、 $\tilde{\mathbf{L}}^0 = \{(q, z, p) \in J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) | q_1 p_1 = \dots = q_r p_r = q_{r+1} = \dots = q_n = z = 0\}$ とおく。写像芽

$$(\tilde{\mathbf{L}}^0, 0) \xrightarrow{i} (J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0) \xrightarrow{\tilde{\pi}} (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, 0)$$

が網状ルジャンドリアン写像であるとは、 $(J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0)$ 上の接触変換 C が存在し、 $i = C|_{\tilde{\mathbf{L}}^0}$ が成立するときをいう。網状ルジャンドリアン写像 $\tilde{\pi} \circ i$ のフロントを各ルジャンドリアン写像 $\tilde{\pi} \circ i|_{\tilde{L}_\sigma^0}$ 達のフロントの和集合、すなわち

$$\bigcup_{\sigma \subset I_r} \tilde{\pi} \circ i(\tilde{L}_\sigma^0)$$

で定義する。

2つの網状ルジャンドリアン写像 $\tilde{\pi} \circ i_1, \tilde{\pi} \circ i_2$ が網状ルジャンドリアン同値であるとは、 $\tilde{\pi}$ のルジャンドリアン同値（すなわち $(J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0)$ 上の接触変換であり $\tilde{\pi}$ のファイバーを保存するもの） Θ と $(J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0)$ 上の各 $\tilde{L}_\sigma^0$

を保存する微分同相写像 Φ が存在し、 $\phi = \Phi|_{\tilde{L}^0}$ とするとき

$$\begin{array}{ccccc} (\tilde{L}^0, 0) & \xrightarrow{i_1} & (J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, 0) \\ \phi \downarrow & & \Theta \downarrow & & g \downarrow \\ (\tilde{L}^0, 0) & \xrightarrow{i_2} & (J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, 0) \end{array}$$

が可換となるときをいう。ここで g は Θ によって誘導される $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, 0)$ の微分同相である。

関数芽 $F(x, y, q, z) \in m(r+k+n+1)$ が網状ルジャンドリアン写像 $\tilde{\pi} \circ i$ の生成族であるとは、 F が非退化条件を満たし、各 $\sigma \in I_r$ に対して

$$i(\tilde{L}_\sigma^0) = \{(q, z, \frac{\partial F}{\partial q} / (-\frac{\partial F}{\partial z})) \mid x_\sigma = \frac{\partial F}{\partial x_{I_r - \sigma}} = \frac{\partial F}{\partial y} = F = 0\}$$

が成立するときをいう。

主定理 1 (1) 任意の網状ルジャンドリアン写像に対してその生成族が存在する。

(2) 任意の非退化な関数芽に対してそれを生成族とする網状ルジャンドリアン写像が存在する。

(3) 2つの網状ルジャンドリアン写像が網状ルジャンドリアン同値である為の必要十分条件はそれらの生成族が安定網状 K 同値となることである。

この定理により、網状ルジャンドリアン写像を分類することと網状 K 同値により非退化な関数芽を分類することは同値であることが分かる。

次に安定性に対して得た結果を述べる。

$J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ の各開集合 U に対し $C(U, J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))$ を U から $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ への接触構造を保存する埋め込み全体からなる集合に C^∞ -位相を入れた空間とする。網状ルジャンドリアン写像 $\tilde{\pi} \circ i$ が安定であるとは次の条件を満たすときをいう： $i = C|_{\tilde{L}^0}$ なる任意の $(J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), 0)$ 上の接触変換 C と C の任意の代表元 $\tilde{C} \in C(U, J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))$ に対して $C(U, J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))$ の $\tilde{C}$ の近傍 N が存在し、任意の $\tilde{T} \in N$ に対して $x_0 = (0, \dots, 0; 0, \dots, 0, p_{r+1}^0, \dots, p_n^0) \in U$

が存在し、 $\tilde{\pi} \circ i$ と $\tilde{\pi} \circ \tilde{T}|_{\mathbf{L}^0}$ at x_0 が網状ルジャンドリアン同値となるときをいう。

主定理 2 $\tilde{\pi} \circ i$ を生成族 $F(x, y, q, z)$ を持つ網状ルジャンドリアン写像とする。このとき $\tilde{\pi} \circ i$ が安定である為の必要十分条件は F が $f = F|_{q=z=0}$ の網状 K 安定開折であることである。

主定理 1 と主定理 2 によって実多様体内の境界や角、その他高次元の角がある曲面から発生する安定した局所的な波を分類する為には網状 K 同値のもとで安定した開折を分類すればよいことが分かる。

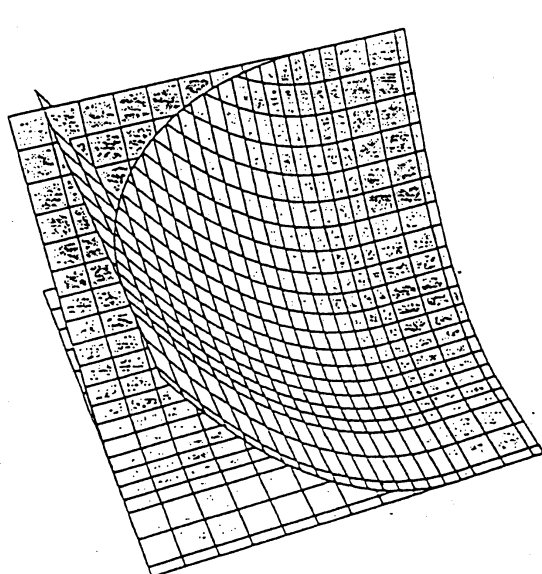
実際に網状 K 同値で $r = 2$, $\text{modality} \leq 1$ の関数芽を分類した結果と代表的なフロントの絵を次に記す。分類表は codimension (すなわち $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ の n のこと) ≤ 7 の分類を含んでいる。

k	Normal form	Codimension	Conditions	Notation
0	$x_1^n \pm x_1 x_2 \pm x_2^m$	$n + m - 1$	$3 \leq n \leq m$	$\bar{14}_{n,m}$
	$x_1^2 \pm x_1 x_2^n \pm x_2^m$	$n + m$	$1 \leq n < m, m \neq 2n$	$\bar{14}'_{n,m}$
	$x_1^2 + ax_1 x_2^n \pm x_2^{2n} \pm x_2^{2n+m}$	$3n + m$	$n \geq 2, a \neq 0$	
			$1 \leq m < n$	$\bar{12}_{n,m}$
	$x_1^2 + ax_1 x_2^n \pm x_2^{2n}$	$4n$	$n \geq 1, a^2 \neq 0, \pm 4$	$\bar{12}_{n,n}$
	$x_1^2 \pm x_2^n$	$4n$	$n \geq 2$	$\bar{12}'_n$
	$(x_1 + x_2)^2 \pm x_2^{3n+m}$	$4n + m$	$n \geq 1, m \geq 0$	$\bar{13}_{n,m}$
1	$\pm y^n + x_1 y \pm x_2 y + x_2^m$	$n + m - 1$	$n \geq 3, m \geq 2$	$\bar{36}_{n,m}$
	$\pm y^n + x_1 y \pm x_2 y^m + x_2^2$	$n + m$	$2 \leq m < n, n \neq 2m$	$\bar{36}'_{m,n}$
	$\pm y^n + x_1 y + x_2^2$	$2n$	$n \geq 3$	$\bar{36}'_{n,n}$
	$\pm y^{2m+n} \pm y^{2m} + x_1 y + ax_2 y^m + x_2^2$	$3m + n$	$m \geq 2, a \neq 0$	
			$1 \leq n < m$	$\bar{36}''_{n,m}$
	$\pm y^{2m} + x_1 y + ax_2 y^m + x_2^2$	$4m$	$m \geq 2$	
			$a^2 \neq 0, \pm 4$	$\bar{36}''_{m,m}$
	$\pm y^{3m+n} + (y^m \pm x_2)^2 + x_1 y$	$4m + n$	$m \geq 2, n \geq 0$	$\bar{36}^\#_{n,m}$
	$y^3 + \varepsilon x_2^2 y + x_1^2 + ax_1 x_2 + \delta x_2^2$	7	$a^2 \neq 4\delta$	$\bar{F}'_4$
	$y^3 + x_1^2 + ax_1 x_2 \pm x_2^2$	8	$a^2 \neq \pm 4$	$\bar{F}_4$
	$f_0 + y^3 \pm x_2^2 y$	8		$\bar{F}_{1,0}^{i'}$
	$f_0 + y^3 + ax_2^2 y \pm 2x_2^3$	8	$a \neq -3$	$\bar{F}_{1,0}^i$
	$f_0 + y^3 \pm x_2 y^2 + ax_2^{3+n}$	$n + 5$	$n \geq 4, a \neq 0$	$\bar{F}_{1,n}^i$
	$f_0 + y^3 + ax_2^3 y \pm x_2^4$	10		$\bar{F}_8^i$
	$f_0 + y^3 \pm x_2^3 y + ax_2^5$	11		$\bar{F}_9^i$
	$f_0 + y^3 + ax_2^4 y \pm x_2^5$	12		$\bar{F}_{10}^i$

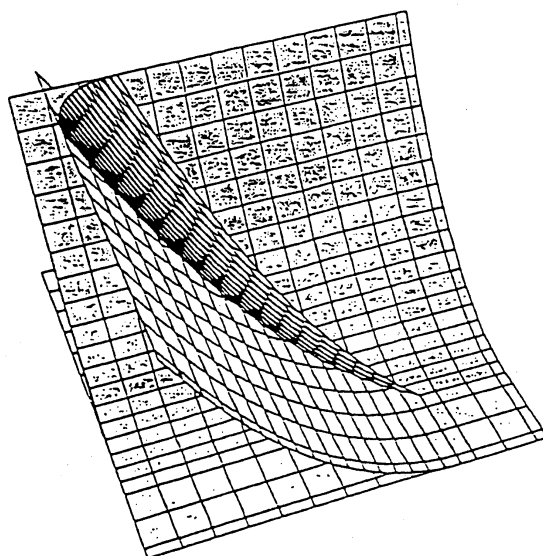
f_0 is $x_1^2 \pm x_1 x_2$ ($i = 1$) or $(x_1 \pm x_2)^2$ ($i = 2$), $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$.

$$12_{1,1} \quad x_1^2 + Ax_1x_2 + x_2^2 + u_1x_1x_2 + u_2x_1 + u_3x_2 + u_4$$

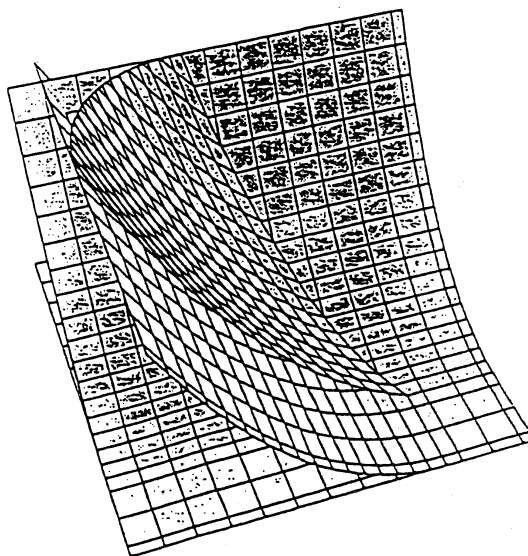
の front ($(\mathbb{R}^4, 0) = \{(u_1, u_2, u_3, u_4)\}$ 内の front を $u_1 = \text{定数}$ で切った図)



$A+u_1 < 0$



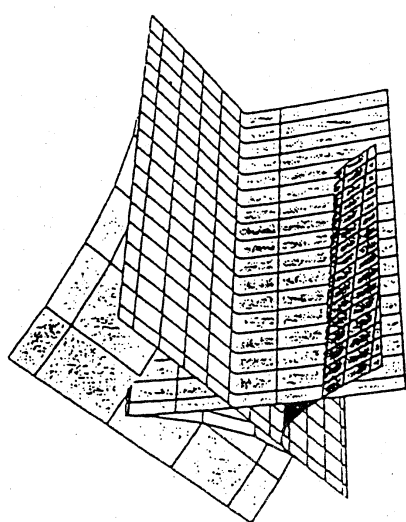
$A+u_1 > 0$



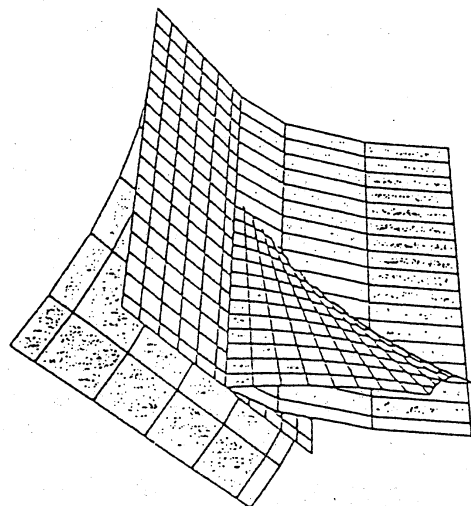
$A+u_1 = 0$

$$14_{2,3} \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^3 + u_1x_2^2 + u_2x_1 + u_3x_2 + u_4$$

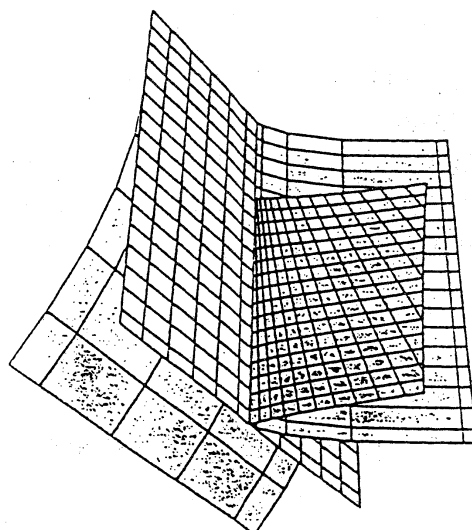
の front ($(\mathbb{R}^4, 0) = \{(u_1, u_2, u_3, u_4)\}$ 内の front を $u_1 = \text{定数}$ で切った図)



$u_1 < 0$



$u_1 > 0$



$u_1 = 0$