

Equivariant Sphere Theorem

早大 教育 相馬輝彦 (Teruhiko Soma)

G を集合 X に作用している group とする。 X の部分集合 Y が G -equivariant であるとは, G の各元 g に対して $g \cdot Y = Y$ あるいは $g \cdot Y \cap Y = \emptyset$ のいずれかが起ることをいう。

3-manifold M に embed された 2-sphere S が M の中の embedded 3-ball を bound しないとき, M の中で essential であるという。また 3-manifold が essential 2-sphere を含まないとき, irreducible であるという。

このノートにおける我々の目的は次の定理を証明することである。Meeks-Simon-Yau [3] はより一般的な結果を得ているが, ここで与える証明は講演者が独立に考えていたものである。

定理 (Equivariant Sphere Theorem). M を compact, orientable 3-manifold とする。 G を M 上に orientation preserving C^∞ -diffeomorphisms として作用している

finite group とする。もし M が "irreducible" でないならば, M は G -equivariant essential 2-sphere を含む。

この定理の応用として次の 2 つの系が得られる。定理から系 1 を証明するのは簡単な練習問題である。系 2 は Sakuma [7, Theorem 2(b)] の議論に上の定理を適用すればよい。

系 1. M を compact, orientable 3-manifold, $p: \tilde{M} \rightarrow M$ を finite covering とする。このとき M が "irreducible" であるための必要十分条件は $\tilde{M}$ が "irreducible" になることである。

系 2. $p: M \rightarrow S^3$ を S^3 中の link L に branch している regular branched covering とする。このとき M が "irreducible" であるための必要十分条件は L が "prime" (すなわち non-composite かつ non-splittable) となることである。

§ 1. 準備

このノートの中では常に C^∞ -category で議論する。またすべての 3-manifolds は orientable であると仮定しておく。

Surface F 中の simple loop ℓ が "essential" であるとは,

α が F の中で contractible でないことをいう。同様に proper simple arc $(\alpha, \partial\alpha)$ in $(F, \partial F)$ が essential であるとは、 α が ∂F の中のいかなる arc にも homotopic rel $\partial\alpha$ でないことをいう。

M を compact 3-manifold とし、 E を ∂M に embed された surface とする。また F を S^2, D^2 以外の compact surface, $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$ を continuous map とする。もし $f_*: \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ が injective であれば、 f は incompressible map と呼ばれる。また $f_*: \pi_1(F, \partial F) \rightarrow \pi_1(M, E)$ が injective のとき、 f は ∂ -incompressible in (M, E) であるという。Incompressible map (∂ -incompressible map) $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$ が embedding であるとき、 $f(F)$ を incompressible (∂ -incompressible) surface in (M, E) という。

3-manifold M が atoroidal であるとは、 M が含む任意の incompressible torus は ∂M のある component と平行であり、かつ M が incompressible, ∂ -incompressible annulus を含まないことをいう。

Compact, irreducible 3-manifold が 2-sided incompressible surface を含むとき、Haken manifold という。

M を metric g を持つ riemannian manifold とし、 F を compact, orientable surface とする。 $f: F \rightarrow M$ を

piecewise smooth map とするとき, f の area $A(f)$ を次の式で定義する。

$$A(f) = \int_F \omega$$

ただし, ω は F の local coordinate (x, y) に対して

$$\omega = \sqrt{|f_x|^2 |f_y|^2 - g(f_x, f_y)} \, dx \, dy$$

で定義される 2-form とする ($|f_x|^2 = g(f_x, f_x)$)。

Piecewise smooth map $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$ が その proper homotopy class の中の任意の piecewise smooth map h に対して $A(f) \leq A(h)$ となるとき least area map であるという。

定理 (Freedman-Hass-Scott [2]). M を incompressible な境界 ∂M をもつ Haken manifold とし, E を ∂M に embed された compact, incompressible surface とする。また M 上に ∂M が convex となるような riemannian metric が定義されていると仮定する。 F を compact, orientable surface とし, $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$ を incompressible, ∂ -incompressible embedding とするとき, 次の (i), (ii) を満足する least area map $h: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$ が存在する。

- (i) h は f に properly homotopic in (M, E) 。
 (ii) h は embedding であるか, または $h(F)$ は M の 1-sided proper submanifold でありかつ $h: F \rightarrow h(F)$ が double covering になる。

ここで ∂M が convex とは, ∂M の各点における mean curvature vector field が zero であるか inward pointing になることをいう。与えられた compact 3-manifold M 上に ∂M が convex になるような riemannian metric を定義するのは容易である。

M を riemannian 3-manifold とする。また F を riemannian metric μ を持つ compact orientable surface とし, $f: F \rightarrow M$ を piecewise smooth map とする。このとき, f の energy $E(f, \mu)$ を次の式で定義する。

$$E(f, \mu) = \int_F |df|^2 d\mu$$

ただし, $d\mu$ は (F, μ) の area form とする。 F 上の 2つの metrics μ_1, μ_2 が同じ conformal structure を定義するとき, $E(f, \mu_1) = E(f, \mu_2)$ であるのはよく知られている。したがって μ の定義する F 上の conformal structure を ϕ とするとき, $E(f, \mu) = E(f, \phi)$ と書く

ことができる。

§ 2. Equivariant Sphere Theorem の証明

M を compact, 3-manifold とし, G を M に orientation preserving C^∞ -diffeomorphism として作用している finite group とする。 ∂M の component に 2-sphere があるとき, 定理の証明は自明である。

(2.1) ∂M の各 component は 2-sphere でない と仮定できる。

点 $x \in M$ における G の isotropy subgroup を $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ とする。このとき $\Sigma = \{x \in M \mid G_x \neq \{1\}\}$ は M の 1-dimensional subcomplex になる (図 1)。特に G が free な作用のときは, $\Sigma = \emptyset$ である。 $N(\Sigma)$ を M における Σ の G -invariant regular neighborhood とする (Bredon [1, Chapter VI, Theorem 2.2] 参照)。このとき G の作用の $M_1 = M - \text{int } N(\Sigma)$ 上への制限は free な作用を定義する。したがって quotient map $p: M \rightarrow M/G$ の M_1 上への制限 $p|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_1/G$ は (unbranched) covering である。 $\bar{\Sigma} = p(\Sigma)$ は M/G 内の 1-dimensional subcomplex となり,

$N(\bar{\Sigma}) = p(N(\Sigma))$ は $\bar{\Sigma}$ の M/G における regular neighborhood となる (図 1)。

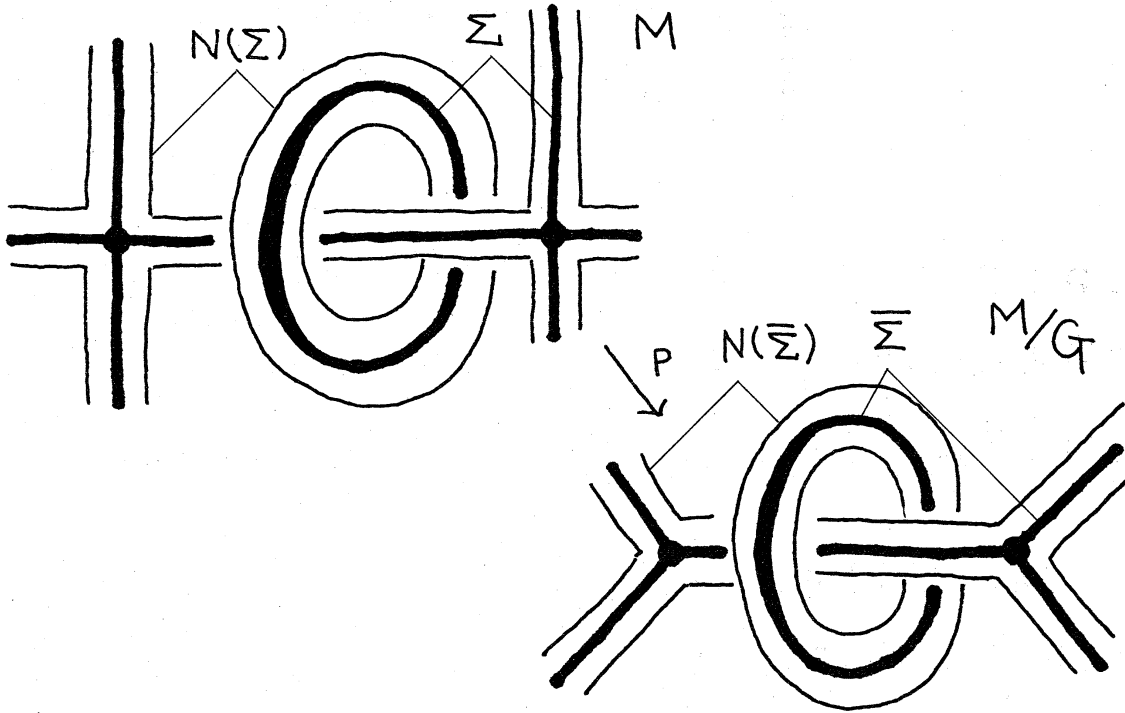


図 1

(2.2) $\partial(M_1/G)$ の各 component は 2-sphere でない。

証明. $\partial(M_1/G)$ のある component S が 2-sphere であるとする。もし $S \cap \partial N = \emptyset$ ならば, $S \subset \partial(M/G)$ でありかつ $p|_{p^{-1}(S)}: p^{-1}(S) \rightarrow S$ は covering になる。 $p^{-1}(S) \subset \partial M$ であるから, これは (2.1) に矛盾する。もし $S \cap \partial N \neq \emptyset$ ならば, S は $\partial N(\bar{\Sigma})$ のある component A を含む。このとき適当な embedded 2-disk $(D, \partial D) \subset (M_1/G, A)$ を取れば, ∂D が $\bar{\Sigma}$ と 1 点で transverse に交わるような $N(\bar{\Sigma})$ の中の disk D_1 を bound するようにできる (図 2)。

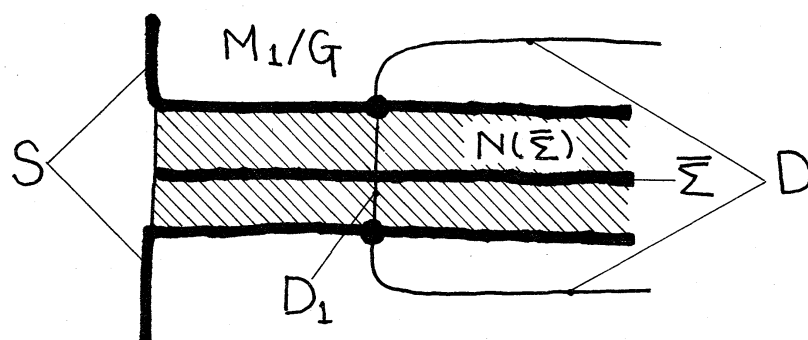


図 2

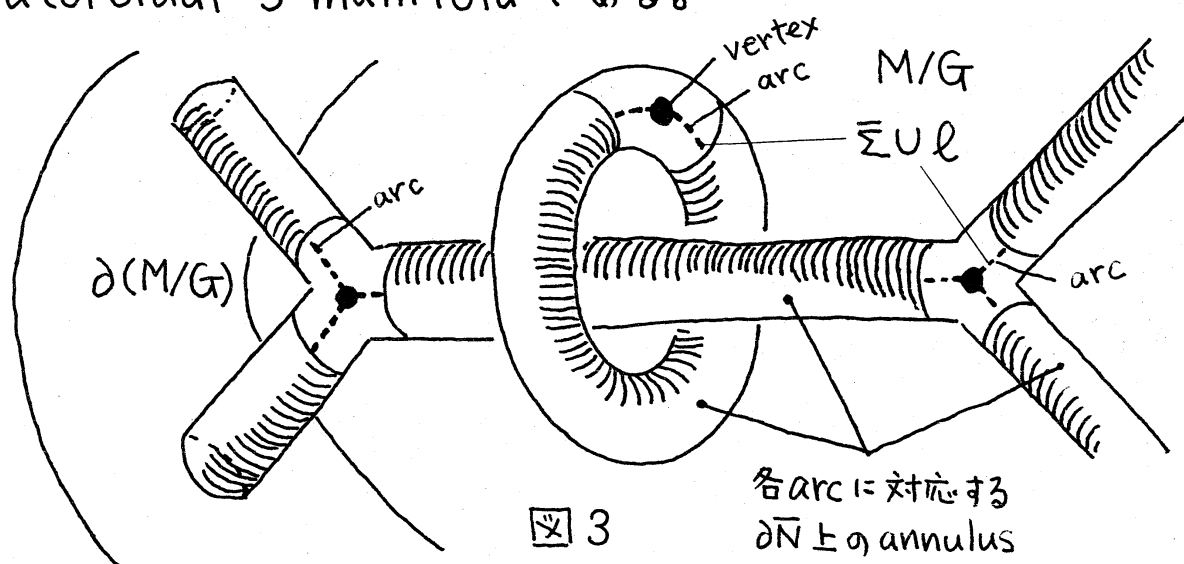
このとき $D \cup D_1$ は $\bar{\Sigma}$ と transverse に 1 点で交わる M/G の中の 2-sphere であるが, このような 2-sphere は存在し得ない (Thurston [9, Chapter 13] 参照)。□

Myers [5] より, $\text{int } M_1/G$ の中の simple loop l で $M_1/G - \text{int } N(l)$ が atoroidal, irreducible, ∂ -irreducible になるようなものが存在する。ここで $\bar{N} = N(\bar{\Sigma}) \cup N(l)$ とおく。

$\bar{\Sigma} \cup l$ の各 simple loop component 上の 1 点を指定しておく。それらの点と $\bar{\Sigma}$ の vertices 全てからなる集合を V とし, $\bar{\Sigma} \cup l - V$ の各 arc component に対して $\partial \bar{N}$ 上に互いに disjoint な embedded annulus を図 3 のように対応させる。このような annuli 全体の和集合を $\bar{E}$ と書く。

(2.2) の証明と同様の議論によって, $\bar{E}$ が incompressible in $M/G - \text{int } \bar{N}$ であることを示すことができる。 $E = p^{-1}(\bar{E})$, $N = p^{-1}(\bar{N})$, $C = M - \text{int } N$ とおくと, $p|_C: C \rightarrow M/G - \text{int } \bar{N}$ は unbranched covering であるから, E は incom-

compressible in C であり, C は irreducible, ∂ -irreducible, atoroidal 3-manifold である。



S を M に embed された essential 2-sphere とする。もし $S \cap N = \emptyset$ であれば, $S \subset C$ となり, S が essential in M であることに反する。よって $S \cap N \neq \emptyset$ 。この S を M 中の isotopy で動かして $S \cap \partial N \subset E$ かつ $S \cap N$ が solid handlebody N の meridian disks になるようにできる。 $P = S - \text{int}(S \cap N)$ とおくと, $(P, \partial P)$ は (C, E) に properly embed された planar surface である (図4)。

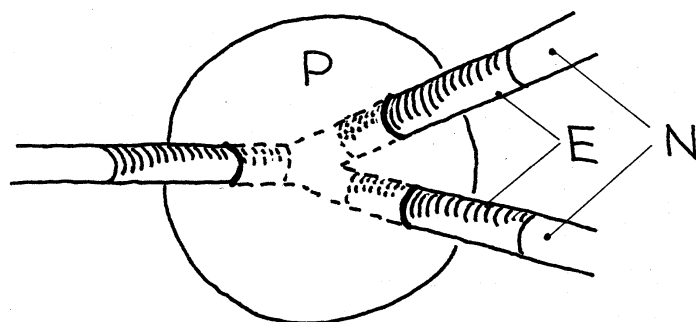


図4

逆に $(P, \partial P)$ を (C, E) 内の planar surface とし, ∂P の各 component $\partial_i P$ が N 中の互いに disjoint な meridian disk D_i を bound するとき, P は completion 可能であるといい, $\mathcal{L}(P) = P \cup (\bigcup_i D_i)$ を P の completion という。 $\mathcal{L}(P)$ は (isotopy in M を除けば) $\{D_i\}$ の取り方によらない。集合 $\mathcal{P}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{P} = \{ (P, \partial P) \subset (C, E) \mid P \text{ は completion 可能な planar surface, } \mathcal{L}(P) \text{ は essential in } M \}$$

上の議論より, $\mathcal{P} \neq \emptyset$ 。

Topological space X に対してその connected component の個数を $|X|$ で表すことにする。

$$\mathcal{P}_0 = \{ P \in \mathcal{P} \mid |\partial P| = n \}$$

とおく。ただし $n = \min \{ |\partial P| \mid P \in \mathcal{P} \}$ 。 $\mathcal{P}_0$ の各元 P が incompressible, ∂ -incompressible in (C, E) であることは容易に示される。

(2.3) $n > 2$ 。

この証明は C が atoroidal でありかつ E が incompressible in C であることより明らか。

これ以後は, C 上には常に ∂C が convex になるような G -invariant riemannian metric が定義されているとす

る。このような metric が定義できるのを示すのは容易である (Bredon [1, Chapter VI, Theorem 2.1] 参照)。

$|\bar{P}| = n$ となる planar surface $\bar{P}$ を 1 つ固定しておく。 P_0 の各元 P に対し, embedding $f_P: \bar{P} \rightarrow C$ で $f_P(\bar{P}) = P$ になるものを 1 つ対応させる。Freedman-Hass-Scott の定理により, f_P は least area map h_P に proper homotopic であり, かつ h_P は embedding であるか, あるいは M の中の 1-sided submanifold $h_P(\bar{P})$ 上の double covering である。

注意. f_P に対して, その proper homotopy class の中の least area map は唯一つとは限らないが, その中の 1 つを指定して h_P とおく。

compact, orientable surface F から M への proper immersion の列 $\{f_n\}$ で $\{A(f_n)\}$ が有界となるものがあるとき, それらの面積 $A(f_n)$ の中で最小のものを求めようとするとき, $A(f_n)$ の代りに f_n の energy $E(f_n)$ を利用する場合がある。 f_n によって M から induce される conformal structure を ϕ_n とすると, $A(f_n) = \frac{1}{2} E(f_n, \phi_n)$ となる。もし F が 2-disk であれば, F 上に定義できる conformal structure は唯一つであるから, $A(f_n) = \frac{1}{2} E(f_n)$

と書くことができる。しかし一般の場合は F 上に定義できる conformal structure は一意でない。したがって $\{f_n\}$ に何らかの条件を付けることによって, $\{\phi_n\}$ を control しなければならない。Schoen-Yau [8, Theorem 3.1] は各 f_n が incompressible, ∂ -incompressible であれば, $\{\phi_n\}$ は F の moduli $R(F)$ の中の compact 集合に含まれることを示した。よって, この場合 (必要ならば) 部分列を取ることによって) $\phi_n \rightarrow \phi \in R(F)$ と仮定できる。

(2.4) 補題. $A(h_{P_0}) = \inf \{ A(h_P) \mid P \in \mathcal{P}_0 \}$ を満たす $P_0 \in \mathcal{P}_0$ が存在する。

証明. 補題が成立しないとすると, $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}_0$ で

$$A(h_1) > A(h_2) > A(h_3) > \dots$$

を満足するものが存在する。ただし $h_n = h_{P_n}$ とする。 ϕ_n を h_n によって induce された $\bar{P}$ 上の conformal structure とすると, $E(h_n, \phi_n) = 2A(h_n)$ ($n=1, 2, \dots$) は有界である。上で注意したように $\phi_n \rightarrow \phi \in R(\bar{P})$ と仮定できる。 $\{h_n\}$ の部分列 $\{h_{n_k}\}$ で harmonic map $h \in C^1(\bar{P} - \{z_1, \dots, z_g\})$ に収束するものが存在する (Sacks-Uhlenbeck [6, Theorem 2.3] 参照)。このとき十分大きな k, l ($k < l$) に対して h_{n_k} は h_{n_l} に properly homotopic in (C, E) になる。 $A(h_{n_k}) > A(h_{n_l})$ であるから,

これは h_{n_k} が least area map であることに反する。よって補題は証明された。□

$h_{p_0} = h_0$, $\text{Im } h_0 = Q$ とおく。 $(Q, \partial Q)$ は (C, E) の 1-sided あるいは 2-sided の proper submanifold である。

まず Q が G -equivariant であることを示す。もしそうでないならば, G のある元 g に対して $Q \neq g \cdot Q$ かつ $Q \cap g \cdot Q \neq \emptyset$ が成立する。このようなことが起こらないことをいうには, 次の 3 つの場合が成立しないことを示せばよい。

場合 1. h_0 は embedding であり, かつ Q は $g \cdot Q$ と transverse に交わる。

C の subset A に対し, ∂A で A とその copy A' を $A \cap E$ に沿って貼り合せたものを表わすことにする。特に $A \cap E = \emptyset$ のとき ∂A は A と A' の disjoint union である。Waldhausen [10, Proposition 5.4] により, Q は P_0 に isotopic in (C, E) である。よって $Q \in \mathcal{P}_n$ 。 $Q, g \cdot Q$ を completion するための N の meridian disks $\{D_i\}_{i=1}^n, \{\bar{D}_i\}_{i=1}^n$ を適当に取ることにより, $\mathcal{S}(Q)$ は $\mathcal{S}(g \cdot Q)$ に transverse に交わり, かつ $D_i \cap \bar{D}_i$ は proper arcs in $D_i (\bar{D}_i)$ のみからなるようにできる。Minimal surface の標準的議論により次の (2.5) (したがって (2.6)) が示される。

(2.5) $Q \cap g \cdot Q$ の各 arc (および "loop") component は Q , $g \cdot Q$ のいずれにおいても essential である。

(2.6) $\partial Q \cap \partial(g \cdot Q)$ の各 loop component は ∂Q , $\partial(g \cdot Q)$ のいずれにおいても essential である。

$\mathcal{S}(Q) \cap \mathcal{S}(g \cdot Q)$ の simple loop component で bound される $\mathcal{S}(Q)$ または $\mathcal{S}(g \cdot Q)$ の中の各 disk D に対して, その complexity $c(D)$ を次の辞書的順序対で定義する。

$$c(D) = (-\chi(\partial(D \cap C)), A(D \cap C)) .$$

ここで $D \cap C$ の代りに $\partial(D \cap C)$ の Euler 標数を考えるのは, $\partial(\partial(D \cap C))$ の各 component が "loop" になり Euler 標数の計算が容易になるからである (図 5)。

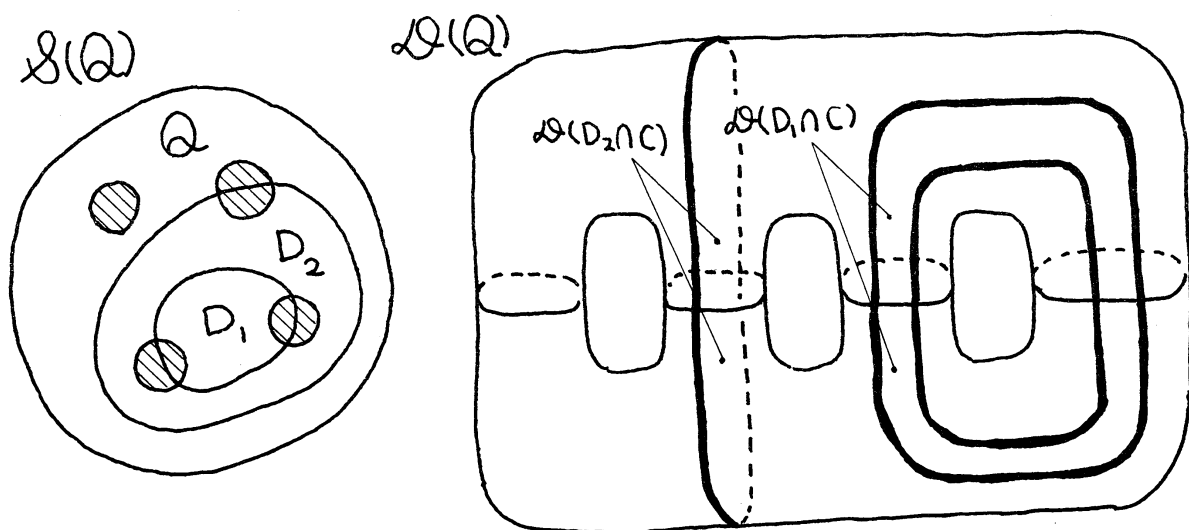


図 5

また (C, E) に proper に embed された planar surface

(connected でなくてもよい) $(P, \partial P)$ の complexity を $c(P) = (-\chi(P), A(P))$ で定義する。 $-\chi(\partial P) = -2\chi(P)$ であることを注意せよ。

$D_1 \subsetneq D_2$ のとき, $A(D_1 \cap C) < A(D_2 \cap C)$ でありかつ $\partial(D_1 \cap C) \subsetneq \partial(D_2 \cap C)$ である。このとき $-\chi(\partial(D_2 \cap C)) = -\chi(\partial(D_1 \cap C)) - \chi(\overline{\partial(D_2 \cap D_1) \cap C})$ であり, (2.6) より $-\chi(\overline{\partial(D_2 - D_1)}) \geq 0$ であるから, $-\chi(\partial(D_2 \cap C)) \geq -\chi(\partial(D_1 \cap C))$ となる。したがって $c(D_1) < c(D_2)$ となる。よって complexity が最小の disk D_0 は inner most disk である。ここで $D_0 \subset \delta(g \cdot Q)$ と仮定してよい。 ∂D_0 は $\delta(Q)$ を 2つの disks D_1, D_2 に separate する。 $S_i = D_0 \cup D_i$, $P_i = S_i \cap C$ とおく。少なくとも S_1, S_2 の一方は essential in M であるが, P_1, P_2 が completion 可能かどうか, あるいは connected であるかどうかとも自明でない。

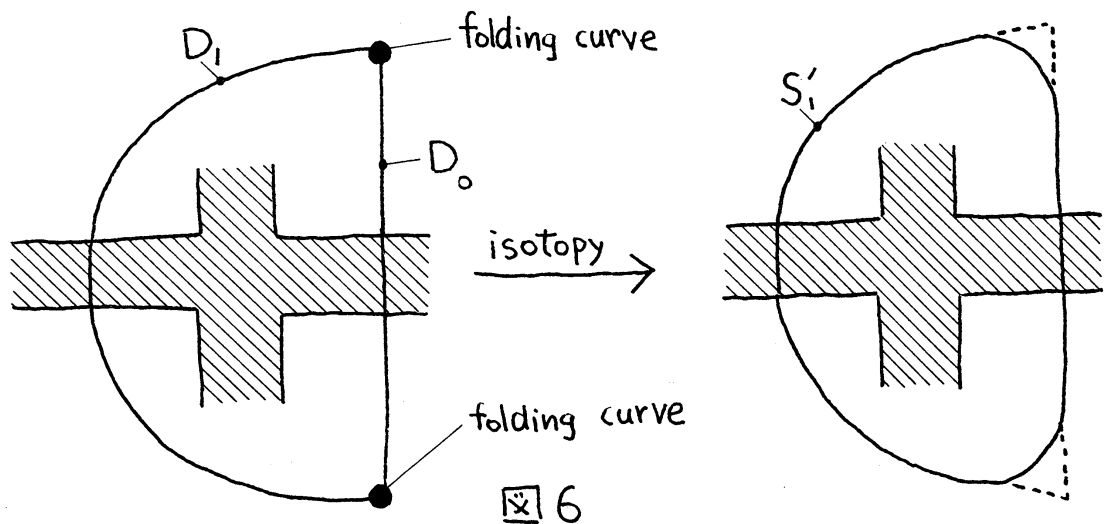
まず S_1 は essential in M であると仮定してよい。 $c(D_0) \leq c(D_2)$ より, $c(P_1) \leq c(Q)$ である。

(2.7) P_1 は disk component を持たない。

証明. P_1 が disk component Δ を持ったとする。 $\Delta \cap \partial D_0 = \emptyset$ ならば, $\Delta \subset Q$ (または $\Delta \subset g \cdot Q$) であり, $\partial \Delta \subset E$ より $\partial \Delta \subset \partial Q$ (または $\partial \Delta \subset \partial(g \cdot Q)$)。よって $\Delta = Q$ (または $\Delta = g \cdot Q$) となり, (2.3) に矛盾する。 $\Delta \cap \partial D_0 \neq \emptyset$ のとき,

Δ における $\Delta \cap \partial D_0$ の中の inner most arc (または loop) α は Δ の中の disk Δ_0 を切り取る。 Δ_0 は Q (または $g \cdot Q$) に含まれるから, α は inessential in Q (または in $g \cdot Q$) となり, (2.5) に矛盾する。よって (2.7) が成立する。□

ここで P_1 は smooth な embedding ではないので, folding curve を持っている。 P_1 を (C, E) の中の適当な C^0 -isotopy で deform することにより, その folding curve を解消して $A(P'_1) < A(P_1)$ となる planar surface P'_1 が得られる (Meeks-Yau [4, Lemma 7] 参照), (図 6)。 S_1 のこの isotopy による結果を S'_1 とする。



このとき $c(P'_1) < c(Q)$ である。 P'_1 が completion 可能でないときは少なくとも次の (a) または (b) が起こる。

(a) $\partial P'$ のある component が E で contractible。

このとき E 内の 2-disk Δ で $\Delta \cap \partial P'_1 = \partial \Delta$ となるものが存在する。このとき S'_1 を Δ に沿って surgery することによって 2 つの 2-spheres S_{11}, S_{12} が得られる (図 7)。

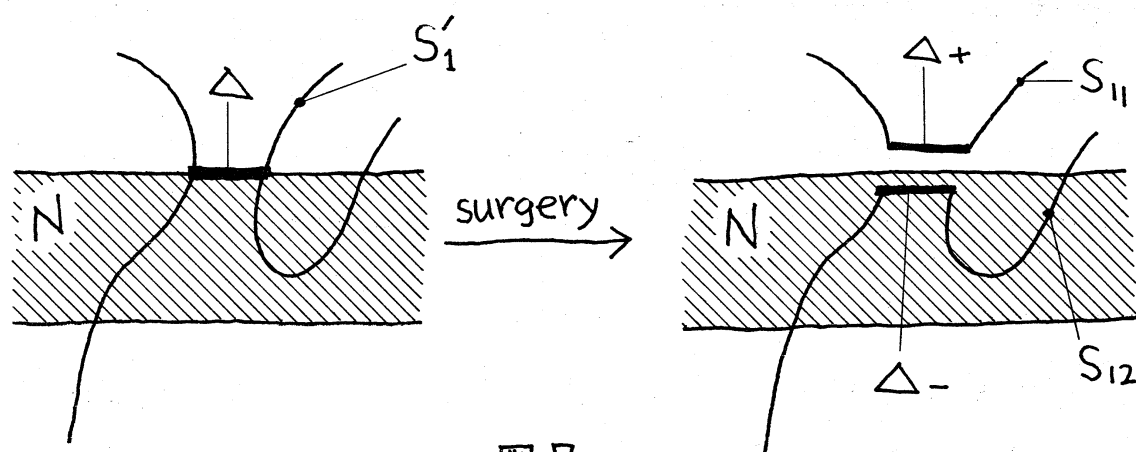


図 7

$P_{1i} = S_{1i} \cap C$ とおく。(2.7) より $-\chi(P_{11}) < -\chi(P'_1), -\chi(P_{12}) \leq -\chi(P'_1)$ かつ $A(P_{12}) < A(P'_1)$ 。明らかに P_{12} は disk component を持たない。 P_{11} が disk component D を持つならば、明らかに $D \supset \Delta_+$ である。 E は incompressible in C であるから、 ∂D は E の中の disk Δ_1 を bound する。 B を $\Delta_1 \cup D$ によって bound される C の中の 3-ball とする。 S_{11} を B の M の中での十分小さな近傍 $N(B)$ を support としてもつ isotopy で deform して、 D を N の中に押し込むようにできる (図 8)。 S_{11} のこの isotopy による結果を S_{13} とし、 $P_{13} = S_{13} \cap C$ とする。 P_{13} は P'_1 の components のいくつかからなる proper subset になる。よって (2.7) より $-\chi(P_{13}) \leq -\chi(P'_1)$,

$A(P_{13}) < A(P'_1)$ である。

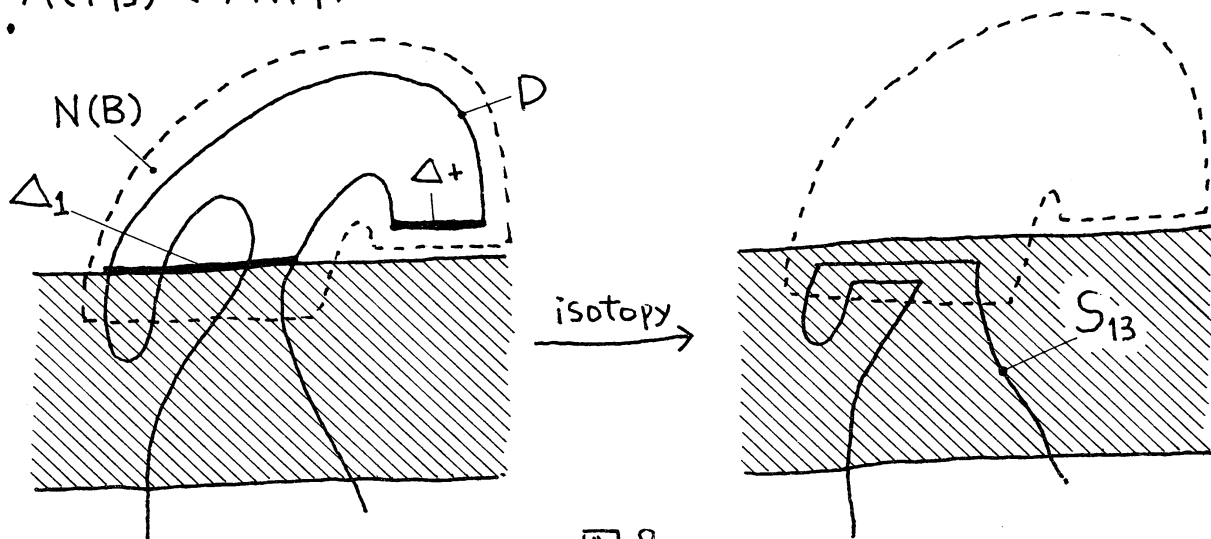


図 8

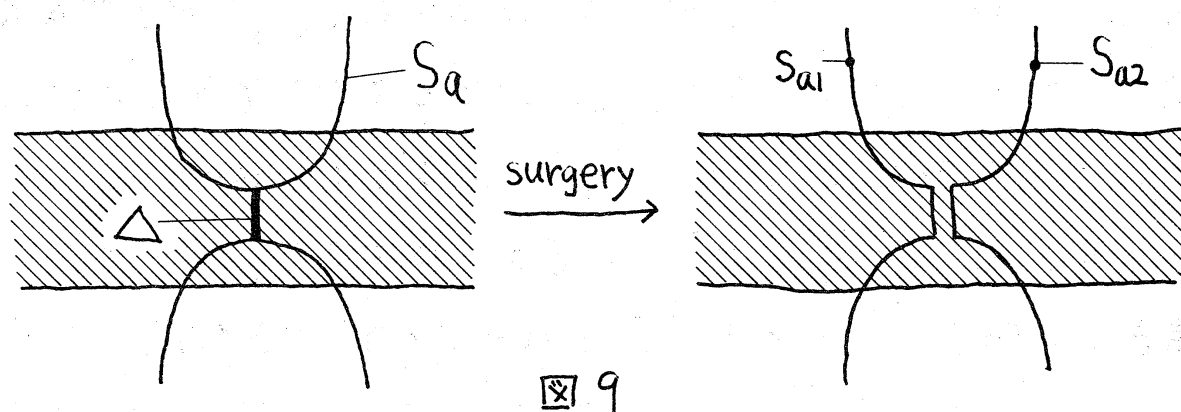
したがって S_{1i} ($i=1, 2, 3$) の中の少なくとも 1 つは essential in M であり, P_{1i} は disk component を持たず, かつ $c(P_{1i}) < c(P')$ である。また P_{1i} の作り方から, $|P_{1i}| - \chi(P_{1i}) < |P'_1| - \chi(P'_1)$ である。したがって 上のような操作は有限回で終り, その結果としてできた 2-sphere を S_a とすると, S_a は essential in M , $P_a = S_a \cap C$ は disk component を持たない, ∂P_a の各 component は essential in E , かつ $c(P_a) < c(P')$ 。

S_a が P_a の completion による 2-sphere でないときは, 次の (b) が起る。

(b) $S_a \cap N$ の component で disk でないものが存在する。

このとき $S_a \cap N$ は compressible in N である。 Δ を $S_a \cap N$ の N における compressing disk とする。 S_a を Δ に沿って

surgeryすることによって2つの2-spheres S_{a1}, S_{a2} が得られる(図9)。 $P_{ai} = S_{ai} \cap C$ とおく。



S_{a1} は essential in M であると仮定できる。 P_{a1} は P_a のいくつかの components からなる proper subset である。 P_a は disk component を持たないから, $c(P_{a1}) < c(P_a)$ である。また $|P_{a1}| < |P_1|$ であるから, このような操作は有限回で終る。その結果できた 2-sphere を S_b とし, $P_b = S_b \cap C$ とすると, S_b は essential in M , $c(P_b) < c(P'_1) < c(Q)$, $S_b \cap N$ は N の meridian disks。特に $P_b \in \mathcal{P}$ である (P'_1 に対して (a), (b) が成立しないとき, $P'_1 = P_b$ とする)。このとき $c(P_b) < c(Q)$ 。もし $-\chi(P_b) < -\chi(Q)$ であれば, $|P_b| < |Q| = n$ となり n の定義に矛盾する。 $-\chi(P_b) = -\chi(Q)$, $A(P_b) < A(Q)$ であれば, $P_b \in \mathcal{P}_0$ であるから補題(2.4)に矛盾する。よって場合1は起こり得ない。

場合2. h_0 は embedding であるが, Q と $g \cdot Q$ の intersec-

tion は transverse でない。

[4, Lemma 2] より Q と $g \cdot Q$ は有限個の点を除いて transverse に交わる。このとき任意の正数 ε に対して, これらの有限個の点の十分小さな近傍を support としてもつような isotopy によって Q を動かし Q' を作り, Q' は $g \cdot Q'$ と transverse に交わりかつ $A(Q') < A(Q) + \varepsilon$ となるようにできる。このときも場合 1 と同様にして P_1 から P_1' を作ることもできるが, この P_1' に対して $A(P_1') < A(P_1) - \varepsilon \leq A(Q') - \varepsilon < A(Q)$ が成立するように上の ε を選ぶことができる ([2, Lemma 1.3] 参照)。以下、場合 1 と同様にして場合 2 が起らないことが証明できる。

場合 3. $\hbar_0: \bar{P} \rightarrow Q \subset M$ が double covering。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, Q の regular neighborhood $N(Q)$ が存在して, $Q' = \overline{(\partial N(Q) - \partial N(Q) \cap E)}$ とおいたとき, $A(Q') < A(\hbar_0) + \varepsilon$ となりかつ Q' と $g \cdot Q'$ が transverse に交わるようにできる。この場合も場合 1, 2 と同様にして起らないことが証明できる。

したがって Q は G -equivariant である。 $\hbar_0$ が embedding のときは $Q = P$ とおく。 $\hbar_0$ が double covering のときは, Q の G -equivariant regular neighborhood $N(Q)$ に対して, 場合 3 と同様にして作った Q' を P とする。いずれの場合も P は G -equivariant でありかつ $P \in \mathcal{P}_0$ である。よって

$\mathcal{S}(P)$ として G -equivariant であるものが存在する。 $\mathcal{S}(P)$ は essential in M であるから, これが我々が求めていた 2-sphere である。これで証明を終わる。□

参考文献

- [1] G. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press 1972.
- [2] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds (to appear).
- [3] W. Meeks III, L. Simon and S.-T. Yau, Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature, Ann. of Math. 116 (1982), 621-659.
- [4] W. Meeks III and S.-T. Yau, The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds - the embedding of the solution given by Douglas-Morrey and an analytic proof of Dehn's lemma, Topology 21 (1982), 409-442.
- [5] R. Myers, Simple knots in compact orientable

- 3-manifolds, Trans. A. M. S. 273 (1982), 75-91.
- [6] J. Sacks and K. Uhlenbeck, Minimal immersions of closed Riemannian surfaces, Trans. A. M. S. 271 (1982), 639-652.
- [7] M. Sakuma, On regular coverings of links, Math. Ann. 260 (1982), 303-315.
- [8] R. Schoen and S.-T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. 110 (1979), 127-142.
- [9] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds (to appear).
- [10] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.